**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**Національний університет «Запорізька політехніка»**

# КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЇХ ВИКОНАННЯ

**(частина 2)**

для студентів інженерно-фізичного факультету
денної форми навчання

**2022**

Контрольні роботи з вищої математики та методичні вказівки до їх виконання (частина 2) для студентів інженерно-фізичного факультету денної форми навчання / Укл.: Н. В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 39 с.

Укладач: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Експерт спеціальності: О. В. Климов, доцент, к.т.н.

Рецензент: Н. М. Антоненко, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Рекомендовано до видання НМР машинобудівного факультету НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 21 .10 .2022

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 21.09.2022

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Запропоновані завдання до контрольних роботи і методичні вказівки щодо їх виконання відповідають курсу «Вища математика», який читається для студентів інженерно-фізичного факультету та факультету будівництва, архітектури та дизайну денної форми навчання у другому семестрі двосеместрового курсу. Дана збірка задач також може використовуватись для студентів інших технічних спеціальностей, на яких вивчається вища математика в обсязі двосеместрового курсу.

Посібник містить завдання для двох модульних контрольних робіт та методичні вказівки до їх виконання (повністю розв'язані типові варіанти з усіма необхідними поясненнями). Кожна контрольна робота складена у тридцяти варіантах.

Контрольна робота №1 охоплює теми третього модуля вивчення курсу, а саме: криволінійні інтеграли, подвійні інтеграли та їх застосування, елементи теорії функцій комплексної змінної, диференціальні рівняння. Контрольна робота №2 охоплює теми четвертого модуля вивчення курсу, а саме: теорія ймовірності та елементи математичної статистики.

В кінці наведено список рекомендованої літератури для підготовки. В нього включено авторські підручники, а також методичні посібники для виконання розрахунково-графічних задач, які виконуються студентами протягом семестру в якості домашньої самостійної роботи.

Студенти виконують кожну контрольну роботу в кінці вивчення відповідного модуля дисципліни. Контрольна робота виконується під час аудиторних занять, вона розрахована на дві академічні години.

Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською мовою в письмовій формі, бажано в зошиті у клітинку. Необхідно залишати поля для приміток. На титульному аркуші роботи потрібно вказати назву предмету, групу та курс, прізвище, ім'я та по батькові студента.

В контрольній роботі студент повинен розв'язати подані задачі методами, які розглядались на лекційних та практичних заняттях, а також зробити всі необхідні креслення (графічні розв'язки). При цьому студентові необхідно показати набуті теоретичні знання з курсу.

При оцінюванні контрольної роботи показником її якості є, перш за все, те, наскільки студент самостійно і правильно розв'язав поставлені задачі та зрозумів зміст отриманих розв'язків. Результати виконання контрольної роботи оцінюються відповідною кількістю рейтингових балів.

Після перевірки та оцінювання роботи провадиться аналіз розв'язків та їх обговорення. Таким чином, ці контрольні роботи є важливою складовою частиною самостійної аудиторної роботи студентів в рамках практичних занять; вони допомагають студентам оцінити свій поточний рівень знання матеріалу. Окрім того, для викладача ці роботи є методом діагностики та контролю засвоєння навчального матеріалу студентами.

Матеріали даного посібника можуть бути використані також для практичної ілюстрації теоретичних положень під час викладення лекційного матеріалу, при проведенні практичних занять, а також для проведення модульного контролю (його аудиторної частини).

# 1 КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1 (МОДУЛЬ 3)

## 1.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №1 (розв’язання типового варіанту)

### Варіант 0

**1.** Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I = \int\limits_l (2x+4y)dx + (2x+y)dy$, де крива $l$ задається наступними умовами:

$l: y = -3x+5$ від точки з абсцисою $x_1 = 1$ до точки з абсцисою $x_2 = 0$.

**2.** Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2 y\, dxdy$, де область інтегрування $D$ обмежена кривими $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

**3.** Обчислити $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{57}$.

**4.** Розв’язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\left(x^2+1\right)y' - y^2 = 25.$$

**5.** Розв’язати диференціальне рівняння $y'' - 5y' + 6y = x + 2$.

### Розв’язання варіанту 0

**1.** Використовуючи рівняння лінії інтегрування та формулу для обчислення криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx,$$

перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений інтеграл за змінною $x$ і обчислимо його:

$$l: \; y = -3x + 5, \; dy = -3dx;$$

$$I = \int_1^0 (2x + 4(-3x+5))dx + (2x + (-3x+5))(-3dx) =$$

$$= \int_1^0 (5 - 7x)dx = \left(5x - \frac{7x^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = -1{,}5.$$

***Відповідь:*** $-1{,}5$ **.**

**2.** На рис. 1.1 зображена область $D$, яка обмежена кривими $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

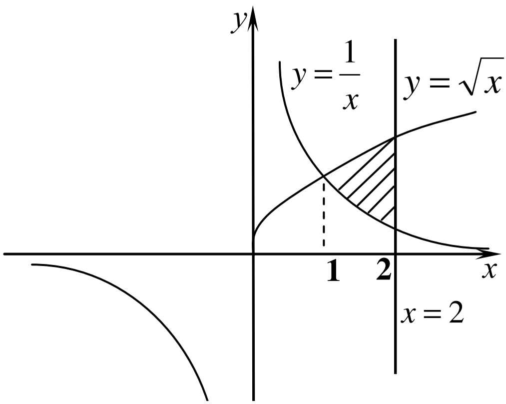


Рис. 1.1

Знайдемо абсциси точок перетину гіперболи $xy = 1$ і вітки параболи $y = \sqrt{x}$ :

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{x}, \; x = 1.$$

Згідно з правилами обчислення подвійних інтегралів перейдемо до повторного інтегралу:

$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 ydy = \int_1^2 dx \left( x^2 \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{2} \left( \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2} \left( x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left( \frac{x^4}{8} - \frac{x}{2} \right)\Bigg|_1^2 = \frac{2^4}{8} - \frac{2}{2} - \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) = 1{,}375\,.$$

***Відповідь:*** $1{,}375$.

**3.** Знайдемо модуль і аргумент числа $z = -1 - i\sqrt{3}$. Оскільки $x = -1 < 0$, $y = -\sqrt{3} < 0$, то $z$ належить III квадранту;

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2\,;$$

$$\varphi = arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{-1} + \pi = arctg\,\sqrt{3} + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Отже, число $z$ можна подати у тригонометричній формі:

$$z = -1 - i\sqrt{3} = 2\left( cos\frac{4}{3}\pi + i\,sin\frac{4}{3}\pi \right).$$

Застосовуючи формулу Муавра $z^n = r^n(cos\,n\varphi + i\,sin\,n\varphi)$ при $n = 57$, одержуємо:

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{57} = 2^{57}\left( cos\left( 57 \cdot \frac{4\pi}{3} \right) + i\,sin\left( 57 \cdot \frac{4\pi}{3} \right) \right) =$$

$$= 2^{57}\left(cos\,76\pi + i\,sin\,76\pi\right) = 2^{57}\,.$$

***Відповідь:*** $2^{57}$.

**4.** $\left(x^2+1\right)y'-y^2=25$.

Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння:

$$\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx}=25+y^2,$$

$$\frac{dy}{y^2+25}=\frac{dx}{x^2+1},$$

$$\int\frac{dy}{y^2+25}=\int\frac{dx}{x^2+1},$$

$$\frac{1}{5}arctg\,\frac{y}{5}=arctgx+C\ .$$

***Відповідь:*** $\frac{1}{5}arctg\,\frac{y}{5}=arctgx+C$ .

**5.** $y''-5y'+6y=x+2$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=3.$$

Розв'язок однорідного рівняння: $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y_ч=Ax+B\ ,$$

$$y_ч'=A\ ,\qquad\qquad y_ч''=0\ .$$

Підставимо $y_ч$, $y_ч'$ та $y_ч''$ у вихідне рівняння, отримаємо:

$$0-5A+6(Ax+B)=x+2\ .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях $x$ в лівій та правій частинах останньої тотожності та отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $A$, $B$:

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 6A=1 \\ x^0 & 6B-5A=2 \end{array}$$

Отримуємо, що $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{17}{36}$.

Отже, $y_ч = \frac{x}{6} + \frac{17}{36}$.

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = y_0 + y_ч = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{17}{36}.$$

***Відповідь:*** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{17}{36}$.

## 1.2 Варіанти контрольної роботи №1

### Варіант 1

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x+2y)dx + (x+y)dy$, де $l: y = x+1$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D: x = 3; y = x; xy = 1$.
3. Обчислити $(1-i)^{137}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\left(4+y^2\right)dx - 2\left(y + yx^2\right)dy = 0$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 9y = x$.

### Варіант 2

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (2x+y)dx + (-x+y)dy$, де $l: y = 2x+1$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (8y+1)dxdy$, $D: y = -\frac{x}{2}; y = \frac{x}{2}; x = 1$.

3. Обчислити $(1-i)^{136}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $xy' = y+4$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 4y = x$.

**Варіант 3**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l 4xdx + (x+y)dy$, де $l: y = x+1$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-8y)dxdy$, $D: y = 2-x^2; y = x^2$.
3. Обчислити $(1-i)^{135}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $y'\sqrt{1-x^2} - tg\ y = 0$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - y = x$.

**Варіант 4**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (4x-y)dx + (x-y)dy$, де $l: y = x+4$; від точки з абсцисою $x_1 = 2$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D: x = 0; y = x; y = 1$.
3. Обчислити $(1-i)^{134}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $sin\, y\, dx + x\, cos\, y\, dy = 0$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 16y = x$.

**Варіант 5**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(5x+y)dx+(x-y)dy$, де $l: y=x^2+1$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(3-2y)dxdy$, $D: y=x^2; y=4$.
3. Обчислити $(1+i)^{137}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $sin\,x\cdot ctg\,y\,dx-\dfrac{dy}{sin\,x}=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-25y=x$.

**Варіант 6**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(x-2y)dx+xydy$, де $l: y=x^2+1$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x+2y)dxdy$, $D: x=1; x=2; y=x; y=\dfrac{x}{2}$.
3. Обчислити $(1+i)^{136}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $tgx\dfrac{dy}{dx}=y+3$.
5. Розв'язати рівняння $y''-9y=-x$.

**Варіант 7**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x-y)dx+(2x-2y)dy$, де $l: y=x^2$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2 y dx dy$, $D: y=x^2; y=\sqrt{x}$.
3. Обчислити $(1+i)^{135}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\left(x^2+16\right)\frac{dy}{dx}+4y^2=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-4y=-x$.

**Варіант 8**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x+y)dx+(x-y)dy$, де $l: y=x^2$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D 2xydxdy$, $D: x=4; y=x; xy=1$.
3. Обчислити $(1+i)^{134}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{dx}-(5x-2)ctgy=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-y=-x$.

**Варіант 9**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(-2x+y)dx+(x-2y)dy$, де $l: y=-3x+2$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x+y+1)dxdy$, $D: y=2; y=x; y=2x$.
3. Обчислити $(1-i)^{133}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $ctgx\dfrac{dy}{dx}=y\,ln\,y$.
5. Розв'язати рівняння $y''-16y=-x$.

**Варіант 10**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(2x+4y)dx+(-4x+4y)dy$, де $l: y=x+1$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(x^2+3y^2\right)dxdy$, $D: x=0; y=x; x+y=2$.
3. Обчислити $(1-i)^{132}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $y'=3\sqrt[3]{y^2}$.
5. Розв'язати рівняння $y''-25y=-x$.

## Варіант 11

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(3x-4y)dx+(3x+1)dy$, де $l: y=-x+2$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x-3y)dxdy$, $D: y=x; y=x^2$.
3. Обчислити $(1-i)^{131}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $y' ctgx+y=2$.
5. Розв'язати рівняння $y''+3y'+2y=x$.

## Варіант 12

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(-2xy)dx+\left(2x^2-1\right)dy$, де $l: y=-2x+3$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(\sqrt{x}-y\right)dxdy$, $D: x=4; y=\sqrt{x}; y=0$.
3. Обчислити $(1-i)^{130}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\left(y^2-5\right)\frac{dy}{dx}+2x^3y^2=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-3y'+2y=x$.

**Варіант 13**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l \left(x^2+4y\right)dx+4xydy$, де $l:\ y=-2x+1$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ x=1;\ y=x^2;\ y=0$.
3. Обчислити $(1+i)^{133}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $ye^x dx=\ln ydy$.
5. Розв'язати рівняння $y''+y'-2y=x$.

**Варіант 14**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x+2y)dx+\left(x^2+2\right)dy$, де $l:\ y=2-\dfrac{x^2}{2}$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=1$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (3-y)dxdy$, $D:\ y=\dfrac{x^2}{2};\ y=2$.
3. Обчислити $(1+i)^{132}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dx}{y^3}-\dfrac{dy}{x^5}=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-y'-2y=x$.

## Варіант 15

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x+6y)dx+(x+y)dy$, де $l: y=x+2$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D: y=x; y=x^2$.
3. Обчислити $(1+i)^{131}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\sqrt{y^2+9}dx=2(x+3)ydy$.
5. Розв'язати рівняння $y''+3y'+2y=-x$.

## Варіант 16

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (3x+2y)dx+(x+2y)dy$, де $l: y=3x+1$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D: x=0; y=x; x+y=1$.
3. Обчислити $(1+i)^{130}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $xydx+(x+5)dy=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-3y'+2y=-x$.

## Варіант 17

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (3x-y)dx+x^2ydy$, де $l: y=2x-1$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=3$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (2y-4x)dxdy$, $D: x=1; x=2; y=x; y=\frac{x}{2}$.
3. Обчислити $(1-i)^{129}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{dx}=x^2y^2+2xy^2$.
5. Розв'язати рівняння $y''+y'-2y=-x$.

## Варіант 18

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (4x^2-y^2)dx+(2x-y)dy$, де $l: y=2x+1$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+2)dxdy$, $D: x=3; y=x; xy=1$.
3. Обчислити $(1-i)^{128}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-y'-2y=-x$.

## Варіант 19

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (-x+y)dx+(-x-y)dy$, де $l: y=-x+4$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D: x=0; y=0; x+y=1$.

3. Обчислити $(1-i)^{127}$.
4. Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними $x^3y^2y' + 2 = 2y$.
5. Розв’язати рівняння $y'' + 4y' + 3y = x$.

**Варіант 20**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (4x+2y)dx + (2x+y)dy$, де $l: y = -2x+1$; від точки з абсцисою $x_1 = 2$ до точки з абсцисою $x_2 = 3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, $D: y = 0; y = x; x + y = 1$.
3. Обчислити $(1-i)^{126}$.
4. Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними $x\left(1+y^2\right) + y\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$.
5. Розв’язати рівняння $y'' + 4y' + 3y = -x$.

**Варіант 21**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (-x+y)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, де $l: y = x+2$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2 + 6y^2\right)dxdy$, $D: y = x; y = x^2$.
3. Обчислити $(1+i)^{129}$.
4. Розв’язати рівняння з відокремлюваними змінними $y' = 4x - 2$.

5. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 3y = -x$.

## Варіант 22

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x+y)dx + xdy$, де $l: y = x^2 + 1$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$, $D: x = 0; y = 2 - x; y = x$.
3. Обчислити $(1+i)^{128}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\frac{dy}{dx} = \frac{2(y+1)}{x+1}$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 3y = x$.

## Варіант 23

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (2x+3y)dx + x^2 ydy$, де $l: y = 2x + 1$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{y}{x} dxdy$, $D: x = 2; y = x; y = \frac{x}{2}$.
3. Обчислити $(1+i)^{127}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $2y\frac{dy}{dt} + 5t^4 = 1$.
5. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' - 3y = -x$.

**Варіант 24**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(3x-5)dx+(x-y)dy$, де $l: \ y=-2x+1$; від точки з абсцисою $x_1=1$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} xdxdy$, $D: x=0; \ y=x; \ y=2$.
3. Обчислити $(1+i)^{126}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dz}{dx}=5^{x-z}$.
5. Розв'язати рівняння $y''+2y'-3y=x$.

**Варіант 25**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}\left(y^2+5\right)dx-xydy$, де $l: \ y=-x$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(x+y)dxdy$, $D: x=1; \ y=x; \ y=\dfrac{x}{2}$.
3. Обчислити $(1-i)^{125}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $1+\dfrac{dy}{dx}=sin\,2x$.
5. Розв'язати рівняння $y''-2y'-3y=-x$.

**Варіант 26**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(-3x+2y)dx+(x+2y)dy$, де $l: y=x+4$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}(3x+2y)dxdy$, $D: y=0; y=1-x^2$.
3. Обчислити $(1-i)^{124}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $e^{2y}\,dx-\left(1+e^{y}\right)sin^2\,xdy=0$.
5. Розв'язати рівняння $y''-2y'-3y=x$.

**Варіант 27**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l}(-2x+2y)dx+x^2ydy$, де $l: y=x-1$; від точки з абсцисою $x_1=0$ до точки з абсцисою $x_2=3$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}xydxdy$, $D: x=5; y=x; xy=1$.
3. Обчислити $(1-i)^{123}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $2x^2yy'-y^2=8$.
5. Розв'язати рівняння $y''+5y'+6y=-x$.

**Варіант 28**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (x-3y)dx + 2ydy$, де $l: \ y = x^2$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 1$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}dxdy$, $D: x = 1; x = 2; y = x; y = \frac{x}{2}$.
3. Обчислити $(1+i)^{125}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $xy' + 1 = y^2$.
5. Розв'язати рівняння $y'' + 5y' + 6y = x$.

**Варіант 29**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_l (-3y)dx + (3x+y)dy$, де $l: \ y = -x + 2$; від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(2x + 3y^2\right)dxdy$, $D: x = 1; y = x; y = 2x$.
3. Обчислити $(1+i)^{124}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $3x^2\frac{dy}{dx} - 1 = cos\,2y$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = x$.

**Варіант 30**

1. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l} 2xdx + (-2x + y)dy$, де $l : y = 2x - 3$; від точки з абсцисою $x_1 = 1$ до точки з абсцисою $x_2 = 2$.
2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} 3xydxdy$, $D : x = 4; y = x; xy = 1$.
3. Обчислити $(1 + i)^{123}$.
4. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dx}{dt} = 4t^3\sqrt{x}$.
5. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = -x$.

# 2 КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2 (МОДУЛЬ 4)

## 2.1 Методичні вказівки до виконання контрольної роботи №2 (розв'язання типового варіанту)

### Варіант 0

**1.** В партії з 20 виробів 5 бракованих. З партії обираються навмання 6 виробів. Визначити ймовірність того, що серед цих 6 виробів 2 виявляться бракованими.

**2.** Ймовірність того, що протягом робочого дня не виникне збоїв у забезпеченні сировиною, дорівнює 0,86. Знайти ймовірність того, що протягом робочого тижня (п'яти днів):

а) збої будуть протягом трьох днів;

б) збої стануться не більше ніж в один день;

в) збої стануться принаймні в один день.

**3.** На потоці навчається 110 студентів. З них 10 навчаються відмінно, 50 – добре, 15 – незадовільно, а решта – задовільно. Ймовірність розв'язання задачі для відмінника складає 0,96, для четвірочника – 0,75, для трієчника – 0,46, для двієчника – 0,15.

а) Яка ймовірність розв'язати задачу для навмання вибраного студента потоку?

б) Навмання взятий студент не розв'язав задачу. Яка ймовірність, що це четвірочник?

**4.** Задано ряд розподілу випадкової величини $X$ :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 16 |
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | $p_4$ | 0,1 | 0,15 | 0,1 | 0,05 | 0,1 | 0,05 |

Знайти ймовірність $p_4$, математичне сподівання $MX$, дисперсію $DX$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$. Зобразити графік функції розподілу $F(x)$.

**5.** Випадкова помилка вимірювання $X$ розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Систематична помилка (математичне сподівання) складає $a = 4$. Знайти ймовірність того, що помилка вимірювання $X$ прийме значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, $\alpha = 2, \beta = 11$.

**Розв'язання варіанту 0**

**1.** Кількість способів обрати 6 виробів із загальної кількості 20 виробів складає:

$$C_{20}^{6} = \frac{20!}{6!14!} = 38760.$$

Це кількість всіх можливих випадків.

Кількість способів обрати 2 бракованих вироби з 5 бракованих виробів, які є в наявності, складає:

$$C_{5}^{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Кількість способів обрати 6-2=4 небракованих вироби з 20-5=15 небракованих виробів, які є в наявності, складає:

$$C_{15}^{4} = \frac{15!}{4!11!} = 1365.$$

Тоді

$$m = C_{5}^{2} \cdot C_{15}^{4} = 13650.$$

Це кількість всіх сприятливих випадків.

За означенням ймовірність – відношення кількості всіх сприятливих випадків до кількості всіх можливих випадків:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{13650}{38760} = \frac{455}{1292} \approx 0{,}3522.$$

***Відповідь:*** $\frac{455}{1292} \approx 0{,}3522$.

**2.** Умова задачі відповідає схемі незалежних випробувань Бернуллі з параметрами $q = 0{,}86$ (ймовірність того, що за день не виникнуть збої), $p = 1 - q = 0{,}14$ (ймовірність того, що за день виникнуть збої), $n = 5$. Тоді ймовірність того, що $k$ днів будуть зі збоями, обчислюється за формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

а) У нашому випадку маємо:

$$P_5(3) = C_5^3 (0{,}14)^3 (0{,}86)^{5-3} = \frac{5!}{2!3!}(0{,}14)^3 \cdot (0{,}86)^2 =$$
$$= 0{,}020294624 \approx 0{,}0203.$$

б) Маємо:

$$P(k \le 1) = P_5(0) + P_5(1) =$$
$$= C_5^0 (0{,}14)^0 (0{,}86)^{5-0} + C_5^1 (0{,}14)^1 (0{,}86)^{5-1} =$$
$$= \frac{5!}{5!0!} 1 \cdot (0{,}86)^5 + \frac{5!}{4!1!} 0{,}14 \cdot (0{,}86)^4 =$$
$$= 0{,}8533327296 \approx 0{,}8533.$$

в) Знайдемо ймовірність протилежної події (збої не виникнуть жодного дня):

$$P(k < 1) = P_5(0) = C_5^0 (0{,}14)^0 (0{,}86)^{5-0} = \frac{5!}{5!0!} 1 \cdot (0{,}86)^5 =$$
$$= 0{,}4704270176 \approx 0{,}4704.$$

Тоді шукана ймовірність:

$$P(k \ge 1) = 1 - P(k < 1) = 1 - 0{,}4704270176 =$$
$$= 0{,}5295729824 \approx 0{,}5296.$$

***Відповідь:*** а) $0{,}0203$;
б) $0{,}8533$;
в) $0{,}5296$.

**3.** Нехай гіпотеза $B_i$**,** $i = 5,4,3,2$**,** полягає в тому, що навмання вибраний студент є відмінником (четвірочником, трієчником, двієчником відповідно). Тоді

$$P(B_5) = \frac{10}{110} = \frac{1}{11}, \qquad P(B_4) = \frac{50}{110} = \frac{5}{11},$$

$$P(B_3) = \frac{110 - 10 - 50 - 15}{110} = \frac{35}{110} = \frac{7}{22}, \qquad P(B_2) = \frac{15}{110} = \frac{3}{22}.$$

Нехай подія $A$ полягає в тому, що навмання вибраний студент розв'язав задачу, тоді ймовірність цієї події при виконанні гіпотези $B_i$**,** $i = 5,4,3,2$**,** позначимо $P_{B_i}(A)$ (умовна ймовірність). Маємо за умовою задачі:

$$P_{B_5}(A) = 0{,}96, \qquad P_{B_4}(A) = 0{,}75,$$

$$P_{B_3}(A) = 0{,}46, \qquad P_{B_2}(A) = 0{,}15.$$

а) Ймовірність того, що навмання вибраний студент розв'яже задачу, обчислюємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) =$$

$$= P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) + P_{B_4}(A) \cdot P(B_4) + P_{B_5}(A) \cdot P(B_5) =$$

$$= 0{,}15 \cdot \frac{3}{22} + 0{,}46 \cdot \frac{7}{22} + 0{,}75 \cdot \frac{5}{11} + 0{,}96 \cdot \frac{1}{11} = \frac{1309}{2200} = 0{,}595.$$

б) Ймовірність того, що навмання вибраний студент, який не розв'язав задачу, виявиться четвірочником (ймовірність здійснення гіпотези $B_4$**,** якщо подія $\overline{A}$ вже здійснилась) знаходимо за формулою Байєса:

$$P_{\overline{A}}(B_4) = \frac{P(B_4) \cdot \mathrm{P}_{B_4}(\overline{A})}{\mathrm{P}(\overline{A})} = \frac{(1 - 0{,}75) \cdot \frac{5}{11}}{\left(1 - \frac{1309}{2200}\right)} = \frac{250}{891} \approx 0{,}2806.$$

***Відповідь:*** а) $0{,}595$;

б) $\dfrac{250}{881} \approx 0{,}2806$.

**4.** Ймовірність $p_4$ знайдемо з умови нормування $\sum p_i = 1$:

$$p_4 = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}05) = 0{,}05.$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$MX = \sum x_i\, p_i =$$
$$= (-1) \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 + 7 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 8 \cdot 0{,}15 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 + 11 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}05 = 5{,}85.$$

Знайдемо дисперсію:

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 =$$
$$= (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 5^2 \cdot 0{,}05 + 7^2 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 8^2 \cdot 0{,}15 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}05 + 11^2 \cdot 0{,}1 + 16^2 \cdot 0{,}05 - 5{,}85^2 =$$
$$= 54{,}95 - 34{,}2225 = 20{,}7275.$$

Знайдемо середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{20{,}7275} \approx 4{,}5527.$$

Знайдемо функцію розподілу (підсумовуючи накопичені ймовірності):

$$F(x)=\begin{cases} 0; & x\le -1 \\ 0{,}1; & -1<x\le 1 \\ 0{,}3; & 1<x\le 3 \\ 0{,}4; & 3<x\le 5 \\ 0{,}45; & 5<x\le 7 \\ 0{,}55; & 7<x\le 8 \\ 0{,}7; & 8<x\le 9 \\ 0{,}8; & 9<x\le 10 \\ 0{,}85; & 10<x\le 11 \\ 0{,}95; & 11<x\le 16 \\ 1; & x>16 \end{cases}$$

Графік функції розподілу зображений на рис. 2.1.

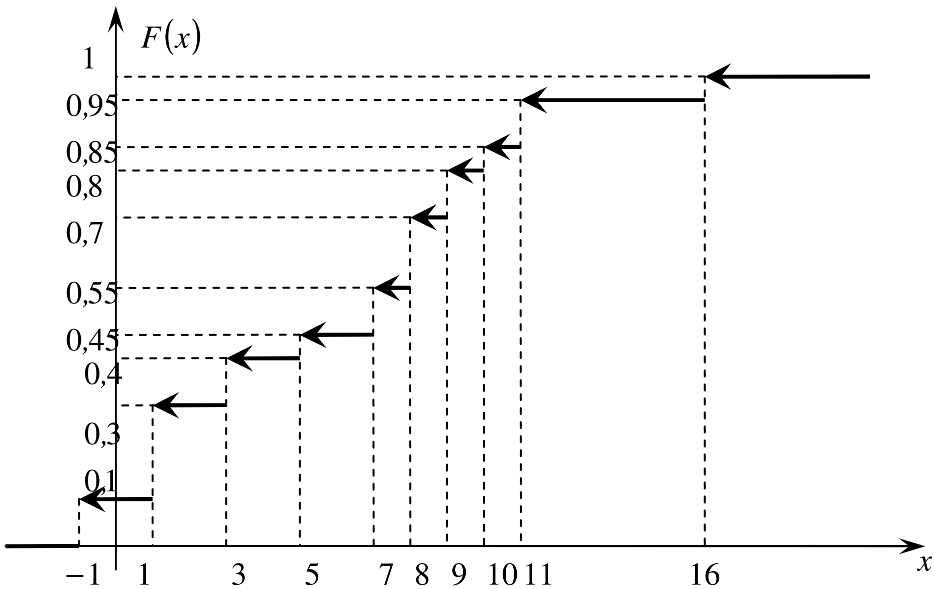


Рис. 2.1

***Відповідь:*** $p_4 = 0{,}05$;

$MX = 5{,}85$;

$DX = 20{,}7275$;

$\sigma(X) \approx 4{,}5527$;

$F(x)$ – рис. 2.1.

**5.** Шукану ймовірність знаходимо за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, значення якої знаходимо за таблицями (див. додаток В). Маємо:

$$P(2 < X < 11) = \Phi\left(\frac{11-4}{5}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{5}\right) = \Phi(1{,}4) - \Phi(-0{,}4) =$$

$$= \Phi(1{,}4) + \Phi(0{,}4) = 0{,}4192 + 0{,}1554 = 0{,}5746.$$

Ми скористались непарністю функції $\Phi(x)$.

***Відповідь:*** $0{,}5746$.

## 2.2 Варіанти контрольної роботи №2

УВАГА! В умови задач підставте замість $N$ номер свого варіанту.

**Задача 1**. Директор фірми уклав $N+7$ договорів. П’ять з них, всупереч порадам юриста, він уклав із порушенням податкового законодавства. Знайти ймовірність того, що під час податкової перевірки серед навмання взятих чотирьох договорів два виявляться без порушень законодавства.

**Задача 2**. Курсант робить $N+3$ незалежні постріли по мішені з ймовірністю влучення 0,2. Знайти ймовірність:

а) двох влучень;

б) не менше двох влучень;

в) не більше одного влучення.

**Задача 3**. Імовірність того, що клієнт банку не поверне позику в період економічного зростання, дорівнює $\frac{1}{N+20}$, а в період економічної кризи – $\frac{1}{N}$. Економічний прогноз стверджує, що ймовірність економічного зростання дорівнює 0,45. Чому дорівнює ймовірність того, що випадково обраний клієнт банку не поверне отриманий кредит? Якщо клієнт банку не повернув отриманий кредит, то яка ймовірність, що економіка перебуває у стані кризи?

**Задача 4**. Закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | $N$ |
| $p_i$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | $p_4$ | 0,1 |

Знайти ймовірність $p_4$, математичне сподівання $MX$, дисперсію $DX$ та середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$. Зобразіть графік функції розподілу $F(x)$.

**Задача 5**. Пакувальний апарат розфасовує пральний порошок у пакети, середня вага яких 930 г, а середньоквадратичне відхилення $(20+0{,}1\cdot N)$ г. Яка частка пакетів (у процентах) матиме вагу до 900 г?

# ЛІТЕРАТУРА


1. Анпілогов, Д. І. Диференціальне числення [Текст] : навч. посібник / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 308 с.
2. Анпілогов, Д.І. Інтегральне числення [Текст] : навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 254 с.
3. Анпілогов, Д. І. Диференціальні рівняння [Текст] : навч. посібник / Д. І. Анпілогов, Н. В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2019. – 176 с.
4. Розрахунково-графічні завдання з вищої математики (частина 2) для студентів інженерно-фізичного та транспортного факультетів усіх форм навчання / Укл. : В. М. Онуфрієнко, Н. В. Сніжко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018 – 42 с.
5. Практикум з вищої математики (частина 2) для студентів інженерно-фізичного факультету денної форми навчання / Укл. : Н. В. Сніжко, Н. М. Антоненко. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 50 с.

## **Додаток А**

Таблиця похідних

В таблиці $u = u(x)$ – диференційовна функція

| | |
|---|---|
| 1. $(C)' = 0$, $C = const$; | 11. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; |
| 2. $(x)' = 1$; | 12. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$; |
| 3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$; | 13. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; |
| 4. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; | 14. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; |
| 5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - const$; | 15. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; |
| 6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$; | 16. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; |
| 7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$; | 17. $(shu)' = chu \cdot u'$; |
| 8. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$; | 18. $(chu)' = shu \cdot u'$; |
| 9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; | 19. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$; |
| 10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; | 20. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$. |

## **Додаток Б**
Таблиця основних інтегралів

В таблиці $u = u(x)$ – диференційовна функція

| | |
|---|---|
| 1. $\int du = u + C$; | 13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|tg\frac{u}{2}\right\| + C$; |
| 2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$; | 14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$; |
| 3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$; | 15. $\int sh u\, du = ch u + C$; |
| 4. $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$; | 16. $\int ch u\, du = sh u + C$; |
| 5. $\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$; | 17. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + C$; |
| 6. $\int e^{u} du = e^{u} + C$; | 18. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + C$; |
| 7. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$; | 19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$; |
| 8. $\int \cos u\, du = \sin u + C$; | 20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$; |
| 9. $\int tgu\, du = -\ln\|\cos u\| + C$; | 21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$; |

| | |
|---|---|
| 10. $\int ctgu\,du = \ln\left\|\sin u\right\| + C$; | 22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$; |
| 11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\,u + C$; | 23. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du =$ <br> $= \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} +$ <br> $+ \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$; |
| 12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\,u + C$; | 24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du =$ <br> $= \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ <br> $\pm \frac{1}{2}a^2 ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$. |

# Додаток В

Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,19 | 0,0753 | 0,38 | 0,1480 | 0,57 | 0,2157 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,20 | 0,0793 | 0,39 | 0,1517 | 0,58 | 0,2190 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,21 | 0,0832 | 0,40 | 0,1554 | 0,59 | 0,2224 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,22 | 0,0871 | 0,41 | 0,1591 | 0,60 | 0,2257 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,23 | 0,0910 | 0,42 | 0,1628 | 0,61 | 0,2291 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,24 | 0,0948 | 0,43 | 0,1664 | 0,62 | 0,2324 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,25 | 0,0987 | 0,44 | 0,1700 | 0,63 | 0,2357 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,26 | 0,1026 | 0,45 | 0,1736 | 0,64 | 0,2389 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,27 | 0,1064 | 0,46 | 0,1772 | 0,65 | 0,2422 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,28 | 0,1103 | 0,47 | 0,1808 | 0,66 | 0,2454 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,29 | 0,1141 | 0,48 | 0,1844 | 0,67 | 0,2486 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,30 | 0,1179 | 0,49 | 0,1879 | 0,68 | 0,2517 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,31 | 0,1217 | 0,50 | 0,1915 | 0,69 | 0,2549 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,32 | 0,1255 | 0,51 | 0,1950 | 0,70 | 0,2580 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,33 | 0,1293 | 0,52 | 0,1985 | 0,71 | 0,2611 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,34 | 0,1331 | 0,53 | 0,2019 | 0,72 | 0,2642 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,35 | 0,1368 | 0,54 | 0,2054 | 0,73 | 0,2673 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,36 | 0,1406 | 0,55 | 0,2088 | 0,74 | 0,2703 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,37 | 0,1443 | 0,56 | 0,2123 | 0,75 | 0,2734 |

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,76 | 0,2764 | 0,99 | 0,3389 | 1,22 | 0,3883 | 1,45 | 0,4265 |
| 0,77 | 0,2794 | 1,00 | 0,3413 | 1,23 | 0,3907 | 1,46 | 0,4279 |
| 0,78 | 0,2823 | 1,01 | 0,3438 | 1,24 | 0,3925 | 1,47 | 0,4292 |
| 0,79 | 0,2852 | 1,02 | 0,3461 | 1,25 | 0,3944 | 1,48 | 0,4306 |
| 0,80 | 0,2881 | 1,03 | 0,3485 | 1,26 | 0.3952 | 1,49 | 0,4319 |
| 0,81 | 0,2910 | 1,04 | 0,3508 | 1,27 | 0.3980 | 1,50 | 0,4332 |
| 0,82 | 0.2939 | 1,05 | 0,3531 | 1,28 | 0,3997 | 1,51 | 0,4345 |
| 0,83 | 0,2967 | 1,06 | 0,3554 | 1,29 | 0,4015 | 1,52 | 0,4357 |
| 0,84 | 0,2995 | 1,07 | 0,3577 | 1,30 | 0,4032 | 1,53 | 0,4370 |
| 0,85 | 0,3023 | 1,08 | 0,3599 | 1,31 | 0,4049 | 1,54 | 0,4382 |
| 0,86 | 0,3051 | 1,09 | 0,3621 | 1,32 | 0,4066 | 1,55 | 0,4394 |
| 0,87 | 0,3078 | 1,10 | 0,3643 | 1,33 | 0,4082 | 1,56 | 0,4406 |
| 0,88 | 0,3106 | 1,11 | 0,3665 | 1,34 | 0,4099 | 1,57 | 0,4418 |
| 0,89 | 0,3133 | 1,12 | 0,3686 | 1,35 | 0,4115 | 1,58 | 0,4429 |
| 0,90 | 0,3159 | 1,13 | 0,3708 | 1,36 | 0,4131 | 1,59 | 0,4441 |
| 0,91 | 0,3186 | 1,14 | 0,3729 | 1,37 | 0,4147 | 1,60 | 0,4452 |
| 0,92 | 0,3212 | 1,15 | 0,3749 | 1,38 | 0,4162 | 1,61 | 0,4463 |
| 0,93 | 0,3238 | 1,16 | 0,3770 | 1,39 | 0,4177 | 1,62 | 0,4474 |
| 0,94 | 0,3264 | 1,17 | 0,3790 | 1,40 | 0,4192 | 1,63 | 0,4484 |
| 0,95 | 0,3289 | 1,18 | 0,3810 | 1,41 | 0,4207 | 1,64 | 0,4495 |
| 0,96 | 0,3315 | 1,19 | 0,3830 | 1,42 | 0,4222 | 1,65 | 0,4505 |
| 0,97 | 0,3340 | 1,20 | 0,3849 | 1,43 | 0,4230 | 1,66 | 0,4515 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,21 | 0,3869 | 1,44 | 0,4251 | 1,67 | 0,4525 |

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,68 | 0,4535 | 1,91 | 0,4719 | 2,28 | 0,4887 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,69 | 0,4545 | 1,92 | 0,4726 | 2,30 | 0,4893 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,70 | 0,4554 | 1,93 | 0,4732 | 2,32 | 0,4898 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,71 | 0,4564 | 1,94 | 0,4738 | 2,34 | 0,4904 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,72 | 0,4573 | 1,95 | 0,4744 | 2,36 | 0,4909 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,73 | 0,4582 | 1,96 | 0,475 | 2,38 | 0,4913 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,74 | 0,4591 | 1,97 | 0,4756 | 2,40 | 0,4918 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,75 | 0,4599 | 1,98 | 0,4761 | 2,42 | 0,4922 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,76 | 0,4608 | 1,99 | 0,4767 | 2,44 | 0,4927 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,77 | 0,4616 | 2,00 | 0,4772 | 2,46 | 0,4931 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,78 | 0,4525 | 2,02 | 0,4783 | 2,48 | 0,4934 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,79 | 0,4633 | 2,04 | 0,4793 | 2,50 | 0,4938 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,80 | 0,4641 | 2,06 | 0,4803 | 2,52 | 0,4941 | 2,98 | 0,4985 |
| 1,81 | 0,4649 | 2,08 | 0,4812 | 2,54 | 0,4945 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,82 | 0,4656 | 2,10 | 0,4821 | 2,56 | 0,4948 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,83 | 0,4664 | 2,12 | 0,4830 | 2,58 | 0,4951 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,84 | 0,4671 | 2,14 | 0,4838 | 2,60 | 0,4953 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,85 | 0,4678 | 2,16 | 0,4846 | 2,62 | 0,4956 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,86 | 0,4686 | 2,18 | 0,4854 | 2,64 | 0,4959 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,87 | 0,4693 | 2,20 | 0,4861 | 2,66 | 0,4961 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,88 | 0,4699 | 2,22 | 0,4868 | 2,68 | 0,4963 | 5,00 | 0,499997 |
| 1,89 | 0.4706 | 2,24 | 0,4875 | 2,70 | 0,4965 | | |
| 1,90 | 0,4713 | 2,26 | 0,4881 | 2,72 | 0,4967 | | |