МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
ректор ЗНТУ
проф. __________ С. Б. Бєліков
«____»_______________ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

Частина ІІ. Методичні вказівки до виконання практичних занять.
Розділ 4. ***Мережеве планування і управління. Теорія ігор. Теорія прийняття рішень.***

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина II, розділ 4) / Склали: доц. Кузькін О. Ф., доц. Лащених О. А. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2018.— 49 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.
доц., канд. техн. наук Лащених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ
Протокол № ___ від «___» _________ 2018 р.

П Р А К Т И Ч Н Е З А Н Я Т Т Я №15

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ МЕРЕЖЕВОГО ГРАФІКА

Мета заняття: ознайомлення з основами мережевого планування та управління, поняттям мережевого графіка та розрахунку його основних часових параметрів.

Стисла теоретична довідка

Мережева модель — це модель комплексу операцій, поданих у вигляді графу (мережі). Основні елементи мережевої моделі — ***роботи*** і ***події*** (рисунок 15.1).

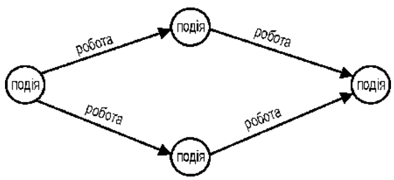


Рисунок 15.1 — Графічне зображення мережевої моделі

Робота (***дійсна робота***) – це елемент мережевої моделі, який позначає виробничий процес і вимагає витрат часу t і ресурсів R, тобто $t \neq 0$ і $R \neq 0$. У мережевій моделі також розрізняють ще два види робіт — ***очікування*** і ***фіктивні роботи***.

Очікування — це робота, що вимагає витрат часу, але не вимагає витрат ресурсів, тобто $t \neq 0$ і $R = 0$. Під очікуванням в мережевій моделі розуміють технологічні або організаційні перерви між дійсними роботами (наприклад, очікування навантаження-розвантаження, тимчасове зберігання вантажів і т.ін.).

Фіктивна робота (***залежність***) не вимагає затрат часу і ресурсів, тобто $t = 0$ і $R = 0$. У мережевому графіку залежність позначає те, що виконання наступних робіт можливе тільки за умови виконання попередніх робіт. Фіктивна робота може виражати ресурсну або технологічну залежність між іншими роботами.

Подія — це факт отримання остаточних результатів всіх попередніх їй робіт, які дають можливість розпочати виконання наступних робіт. Подія не має тривалості у часі. Вона характеризується тільки моментом свого відбування.

На мережевому графіку події зображають кружечком, дійсні роботи і очікування — суцільними стрілками, залежності або фіктивні роботи — пунктирними стрілками.

В мережевій моделі розрізнюють ***початкові*** та ***кінцеві*** події. Подія, з котрої виходить робота, називається початковою або попередньою по відношенню до даної роботи. Подія, в яку входить робота, називається кінцевою або наступною.

Кожний мережевий графік має дві обов'язкові події — ***вихідну*** (подію, до якої не входить жодна з робіт) та ***завершальну*** (подію, з якої не виходить жодна з робіт).

Шлях мережевої моделі — це безперервна технологічна послідовність робіт на мережевому графіку від деякої попередньої події до наступної. Якщо початковою подією шляху є вихідна подія графіка, а кінцевою подією — завершальна подія графіка, то такий шлях називається ***повним***. Довжина шляху визначається тривалістю робіт, з яких він складається. Повний шлях максимальної тривалості називають ***критичним***. Він визначає термін виконання всього комплексу робіт.

Події мережевого графіка нумеруються так, щоб для кожної роботи порядковий номер її кінцевої події j був більшим, ніж номер її початкової події i ($i < j$). Кожна робота кодується двома цифрами. Перша цифра означає початок роботи і відповідає номеру її початкової події, друга означає закінчення роботи і відповідає номеру її кінцевої події.

При побудові мережевого графіка у кружках вказуються номери подій, стрілки показують роботи, а цифри над стрілками показують тривалість робіт.

Загальноприйнятим є, що мережа викреслюється зліва направо, а кожна подія з більшим порядковим номером зображується дещо праворуч від події з меншим порядковим номером. Стрілки, які зображують роботи, можуть мати довільну довжину і нахил, але необхідно прагнути до того, щоб їх загальний напрямок був також зліва направо. На мережевих графіках не рекомендується взаємний перетин стрілок. Щоб уникнути цього, допускається зміщення подій або зображення стрілок у вигляді ламаних ліній.

Основні правила побудови мережевого графіка:

1) до кожної події повинно входити і виходити з неї не менше однієї роботи (це правило не стосується вихідної та завершальної подій);

2) роботи мережевого графіка не повинні утворювати замкнених контурів;

3) якщо на графіку необхідно показати, що дві роботи можуть виконуватись паралельно у часі, до графіку вводять допоміжну роботу та фіктивну подію (рисунок 15.2).

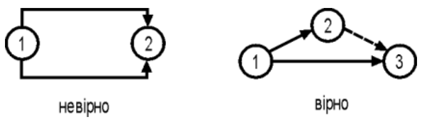


Рисунок 15.2 — Графічне зображення паралельних робіт

Розрахунок мережевого графіка зводиться до визначення таких даних: очікуваних термінів виконання комплексу робіт у відповідності з мережевим графіком; складу критичної зони (критичних і підкритичних шляхів), тобто визначення тих робіт, які мають мінімальні резерви часу; термінів їх початку і закінчення; ранніх і пізніх термінів початку і закінчення інших робіт мережевого графіка з визначенням у них резервів (запасів) часу.

Ранній термін відбування події — термін, раніше якого подія відбутися не може, розраховується за формулою

$$T_{\text{р}}(j) = \max\left[T_{\text{р}}(i) + t_{i-j}\right]. \tag{15.1}$$

де $T_{\text{р}}(i)$ — ранній термін відбування попередньої події;

t_{i-j} — тривалість роботи (i, j).

Пізній термін відбування події — термін, до якого подія обов'язково відбудеться за умови не збільшення часу на виконання всього комплексу робіт, розраховується за формулою

$$T_п(i) = \min\left[T_п(j) - t_{i-j}\right]. \quad (15.2)$$

де $T_п(j)$ — пізній термін відбування наступної події.

Резерв часу події — максимально допустимий період часу, на який можна затримати відбування події, не викликаючи при цьому збільшення критичного шляху, розраховується за формулою

$$R(i) = T_п(i) - T_р(i). \quad (15.3)$$

Ранній термін початку роботи — термін, раніше якого виконання роботи не розпочнеться, розраховується за формулою

$$t_{ij}^{рп} = T_р(i). \quad (15.4)$$

Пізній термін початку роботи — термін, до якого роботу необхідно розпочати без збільшення тривалості всього комплексу робіт, розраховується за формулою

$$t_{ij}^{пп} = T_п(j) - t_{i-j}. \quad (15.5)$$

Ранній термін закінчення роботи — термін, раніше якого виконання роботи не завершиться, розраховується за формулою

$$t_{ij}^{рз} = T_р(i) + t_{i-j}. \quad (15.6)$$

Пізній термін закінчення роботи — термін, закінчення роботи після якого призведе до збільшення тривалості виконання всього комплексу робіт, розраховується за формулою

$$t_{ij}^{пз} = T_п(j). \quad (15.7)$$

Повний резерв часу роботи — час, на який можна перенести початок виконання роботи, або збільшити її тривалість без збільшення загального терміну виконання всього комплексу робіт (довжини критичного шляху), розраховується за однією з формул

$$R_{i-j} = \begin{cases} t_{i-j}^{\text{пп}} - t_{i-j}^{\text{рп}}; \\ t_{i-j}^{\text{пз}} - t_{i-j}^{\text{рз}}; \\ T_{\text{п}}(j) - T_{\text{р}}(i) - t_{i-j}. \end{cases} \qquad (15.8)$$

Повний резерв часу роботи може бути використаний частково чи повністю для неї чи для будь-якої з робіт, що лежать на її максимальному шляху, що не належить іншим шляхам більшої довжини.

Вільний резерв часу роботи — час, на який можна перенести початок виконання роботи, або збільшити її тривалість, не порушуючи ранніх термінів відбування всіх подій мережевого графіка та не зменшуючи повних та вільних резервів часу всіх його робіт, розраховується за формулою

$$\overline{R}_{i-j} = T_{\text{р}}(j) - T_{\text{р}}(i) - t_{i-j}. \qquad (15.9)$$

Вільний резерв часу роботи може бути використаний частково чи повністю для неї чи для будь-якої з робіт, що знаходяться на ділянці її максимального шляху, розташованому між кінцевою подією даної роботи та найближчою передуючою подією, з якої виходять інші шляхи, що не належать даній роботі за умови, що така подія відбулася у свій ранній термін.

Частинний резерв часу роботи — час, на який можна перенести початок виконання роботи, або збільшити її тривалість, не зменшуючи резервів часу попередніх робіт, розраховується за формулою

$$r_{i-j} = T_{\text{п}}(j) - T_{\text{п}}(i) - t_{i-j}. \qquad (15.10)$$

Частинний резерв часу роботи є часткою її повного резерву, яку можна використати повністю чи частково для неї чи для інших наступних за нею робіт, розташованих на ділянці її шляху, обмеженій найближчою наступною подією, в якому вона перетинається з іншим шляхом більшої довжини.

Незалежний резерв часу роботи — час, на який можна затримати або відкласти початок виконання роботи, не збільшуючи не тільки загальний термін виконання комплексу робіт, але й не затримуючи жодну з інших робіт мережевого графіка, розраховується за формулою

$$R^{\text{н}}_{i-j} = T_{\text{р}}(j) - T_{\text{п}}(i) - t_{i-j}. \tag{15.11}$$

На відміну від попередніх резервів часу, незалежний резерв часу роботи можна використати тільки для роботи, що його має, та не можна використати ані для жодної з попередніх, ані для жодної з наступних за нею робіт. Значення незалежного резерву часу деякої роботи може бути як додатним, так і від'ємним. У останньому випадку він показує, скільки часу не буде достатньо, щоб виконати роботу до моменту раннього відбування її кінцевої події, за умови, якщо робота розпочнеться з моменту пізнього відбування її початкової події.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Для заданого мережевого графіка знайти критичний шлях, розрахувати ранні і пізні терміни відбування подій, резерви часу всіх подій і робіт, терміни раннього та пізнього початку і закінчення робіт. Для розрахованого мережевого графіка побудувати також лінійний графік виконання робіт. Вихідні дані до виконання практичного заняття наведені у таблиці 15.1 та на рисунку 15.3.

Таблиця 15.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 15

Вар.	Схема	Тривалість виконання робіт, *год*.										
		a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*l*	*m*
1	*а*	8	10	8	4	15	15	14	12	10	7	13
2	*б*	3	9	15	5	10	11	3	10	4	15	11
3	*в*	11	15	7	4	3	12	3	14	14	9	3
4	*г*	9	12	14	6	5	8	9	14	15	9	15
5	*а*	10	8	13	5	4	12	11	10	3	12	13
6	*б*	13	5	8	15	7	14	11	8	4	9	5
7	*в*	14	14	12	8	14	13	3	11	6	13	10
8	*г*	4	15	12	6	9	4	7	4	13	13	7
9	*а*	8	9	9	12	12	14	7	9	10	10	6
10	*б*	15	12	13	8	3	7	11	11	8	4	4
11	*в*	8	6	6	10	4	13	7	8	12	7	11
12	*г*	7	9	9	7	4	9	15	5	3	13	6
13	*а*	14	5	10	7	4	6	5	8	15	7	15
14	*б*	12	9	4	7	4	14	14	8	13	3	11
15	*в*	9	5	11	5	14	14	12	3	6	4	13
16	*г*	15	9	4	14	4	10	14	5	12	5	10
17	*а*	11	10	3	10	10	5	5	5	7	5	14
18	*б*	9	13	11	14	9	8	9	13	6	15	15
19	*в*	9	6	3	14	14	4	5	11	10	6	15
20	*г*	13	6	6	5	5	11	9	11	3	13	14
21	*а*	14	14	6	10	3	10	4	3	3	14	12
22	*б*	3	5	6	9	7	14	3	15	12	4	8
23	*в*	7	12	9	5	6	12	9	13	13	12	11
24	*г*	6	13	15	8	3	8	12	7	10	4	5
25	*а*	4	10	13	6	15	7	4	8	6	8	7
26	*б*	5	3	14	3	9	12	6	3	8	8	5
27	*в*	7	5	9	9	10	7	6	10	13	3	8
28	*г*	6	3	8	9	6	10	4	11	10	8	5
29	*а*	7	9	8	8	5	2	10	10	15	7	10
30	*б*	15	3	5	7	8	3	10	9	6	10	2

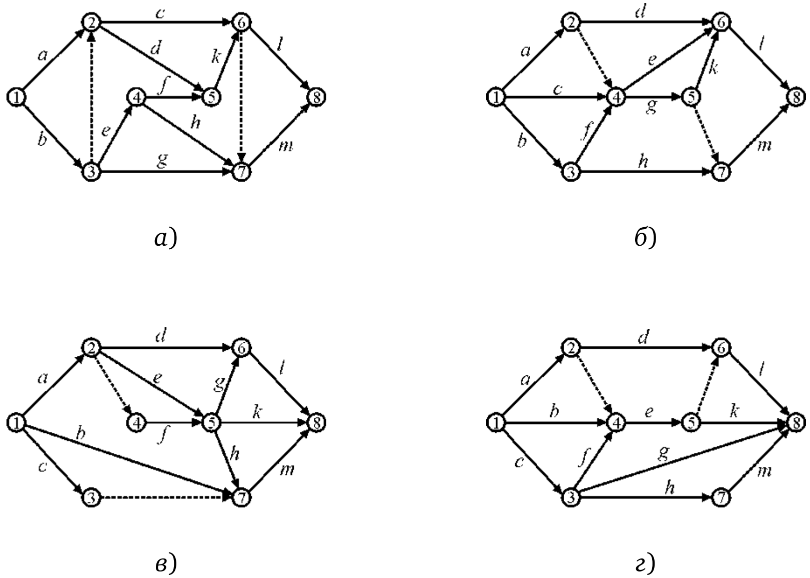


Рисунок 15.3 — Варіанти схем мережевого графіка

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для мережевого графіка, наведеного на рисунку 15.4.

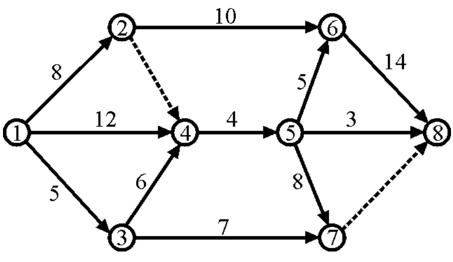


Рисунок 15.4 — Варіант мережевого графіка (приклад)

Розв’язок.

Для зручності розрахунків кожний кружечок, що позначає подію на мережевому графіку, розділимо на чотири сектори (рисунок 15.5).

У верхньому секторі будемо записувати номер події. У правому секторі — термін пізнього відбування події. У лівому секторі — термін раннього відбування події. У нижньому секторі — резерв часу події.

Тривалість фіктивних робіт 2–4 та 7–8 покладаємо рівними нулю.

Розрахунок мережевого графіка починаємо з ***визначення термінів раннього відбування подій*** (ліві сектори кружків). Термін раннього відбування вихідної події *1* приймаємо рівним нулю (рисунок 15.6).

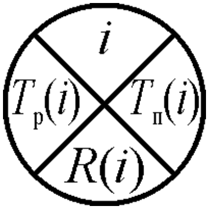


Рисунок 15.5 — Позначення секторів подій

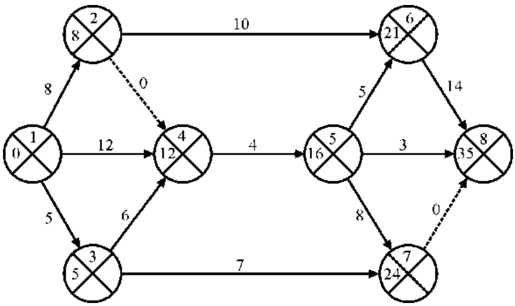


Рисунок 15.6 — Розрахунок ранніх термінів відбування подій

Термін раннього відбування подій *2* та *3* (до них входить тільки по одній роботі) розраховується як

$$T_{\text{р}}(2) = T_{\text{р}}(1) + t_{1-2} = 0 + 8 = 8;$$

$$T_{\text{р}}(3) = T_{\text{р}}(1) + t_{1-3} = 0 + 5 = 5.$$

Термін раннього відбування події *4* (до неї входять три роботи 2–4, 1–4 та 3–4) розраховуємо за формулою (15.1):

$$T_{\text{р}}(4) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_{\text{р}}(1) + t_{1-4} = 0 + 12 = 12 \\ T_{\text{р}}(2) + t_{2-4} = 8 + 0 = 8 \\ T_{\text{р}}(3) + t_{3-4} = 5 + 6 = 11 \end{array} \right| = 12.$$

Аналогічним чином розраховуємо терміни раннього відбування всіх подій мережевого графіка, рухаючись у напрямку від вихідної події до завершальної (*прямий хід*). Завершальна подія графіка *8* має термін раннього відбування $T_{\text{р}}(8) = 35$. Це значення є терміном виконання всього комплексу робіт мережевого графіка.

Для ***визначення пізнього терміну відбування подій*** мережевого графіка (праві сектори кружків) покладаємо термін пізнього відбування кінцевої події *8* рівним терміну її раннього відбування, тобто $T_{\text{п}}(8) = T_{\text{р}}(8) = 35$ (рисунок 15.7).

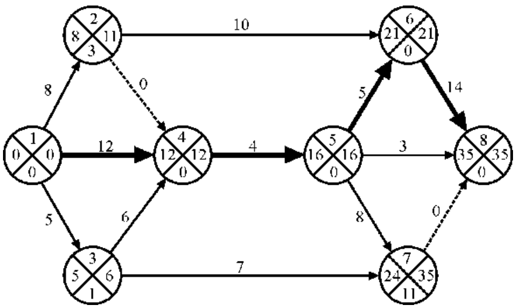


Рисунок 15.7 — Розрахунок пізніх термінів відбування подій, резервів часу подій та визначення критичного шляху графіку

Термін раннього відбування подій *6* та *7* (з них виходить тільки по одній роботі) розраховується як

$$T_п(6) = T_п(8) + t_{6-8} = 35 - 14 = 21;$$
$$T_п(7) = T_п(8) + t_{7-8} = 35 - 0 = 35.$$

Термін пізнього відбування події *5* (з неї виходять три роботи 5–6, 5–8 та 5–7) розраховуємо за формулою (15.2):

$$T_п(5) = \min \begin{cases} T_п(6) - t_{5-6} = 21 - 5 = 16 \\ T_п(8) - t_{5-8} = 35 - 3 = 32 \\ T_п(7) - t_{5-7} = 35 - 8 = 27 \end{cases} \Bigg| = 16.$$

Аналогічним чином розраховуємо терміни пізнього відбування всіх подій мережевого графіка (рисунок 15.7), рухаючись у напрямку від завершальної події до вихідної (*зворотний хід*). Якщо розрахунки виконані правильно, термін пізнього відбування початкової події повинен дорівнювати нулю.

Для ***визначення резервів часу подій*** (нижні сектори кружків) використовуємо формулу (15.3). Наприклад, для події *2* резерв часу

$$R(2) = T_п(2) - T_р(2) = 11 - 8 = 3.$$

Для ***пошуку критичного шляху*** проходимо по роботах мережевого графіка від вихідної події до завершальної через події, що мають нульовий резерв часу. У нашому випадку критичний шлях проходить через події 1 – 4 – 5 – 6 – 8 (на рисунку 15.7 показаний жирними стрілками). Роботи 1–4, 4–5, 5–6, 6–8 називаються ***критичними***, їх сумарна тривалість дорівнює терміну виконання комплексу робіт (35). Важливість критичних робіт полягає в тому, що *вони не мають резервів часу* і будь-яка затримка у виконанні цих робіт неминуче *призведе до збільшення терміну виконання всього комплексу робіт*.

Розрахунок термінів раннього та пізнього початку та закінчення робіт зручно виконувати у табличній формі (таблиця 15.2) за формулами (15.4) – (15.11). Покажемо приклад розрахунку для роботи 3 – 7:

Таблиця 15.2 — Розрахунок ранніх та пізніх термінів початку та закінчення робіт та резервів часу робіт

Робота i–j	t_{i-j}	Терміни початку робіт		Терміни закінчення робіт		Резерви часу робіт			
		ранні $t_{i-j}^{\text{рп}}$	пізні $t_{i-j}^{\text{пп}}$	ранні $t_{i-j}^{\text{рз}}$	пізні $t_{i-j}^{\text{пз}}$	R_{i-j}	$\overline{R}_{i-j}$	r_{i-j}	$R_{i-j}^{\text{н}}$
1 – 2	8	0	3	8	11	3	0	3	0
1 – 3	5	0	1	5	6	1	0	1	0
1 – 4	12	0	0	12	12	0	0	0	0
2 – 6	10	8	11	18	21	3	3	0	0
3 – 4	6	5	6	11	12	1	1	0	0
3 – 7	7	5	28	12	35	23	12	22	11
4 – 5	4	12	12	16	16	0	0	0	0
5 – 6	5	16	16	21	21	0	0	0	0
5 – 7	8	16	27	24	35	11	0	11	0
5 – 8	3	16	32	19	35	16	16	16	16
6 – 8	14	21	21	35	35	0	0	0	0

$$t_{3-7}^{\text{рп}} = T_{\text{р}}(3) = 5; \qquad t_{3-7}^{\text{пп}} = T_{\text{п}}(7) - t_{3-7} = 35 - 7 = 28;$$

$$t_{3-7}^{\text{рз}} = T_{\text{р}}(3) + t_{3-7} = 5 + 7 = 12; \qquad t_{3-7}^{\text{пз}} = T_{\text{п}}(7) = 35;$$

$$R_{3-7} = T_{\text{п}}(7) - T_{\text{р}}(3) - t_{3-7} = 35 - 5 - 7 = 23;$$

$$\overline{R}_{3-7} = T_{\text{р}}(7) - T_{\text{р}}(3) - t_{3-7} = 24 - 5 - 7 = 12;$$

$$r_{3-7} = T_{\text{п}}(7) - T_{\text{п}}(3) - t_{3-7} = 35 - 6 - 7 = 22;$$

$$R_{3-7}^{\text{н}} = T_{\text{р}}(7) - T_{\text{н}}(3) - t_{3-7} = 24 - 6 - 7 = 11.$$

Для розрахованого графіка будуємо лінійний графік робіт (рисунок 15.8). По вісі абсцис відкладаємо час, по вісі ординат — роботи (відстань між роботами по вертикалі довільна).

Номери початкової та кінцевої події проставляємо відповідно на початку та кінці роботи. Фіктивні роботи зображуємо точками та пунктиром між номерами їх початкових та кінцевих подій.

Роботи розташовуються горизонтально знизу догори, починаючи з роботи, що має менший номер її кінцевої події. Далі роботи розташовують у порядку збільшення номерів їх кінцевих подій, а роботи, що входять до однієї події — у порядку збільшення номерів їх початкових подій.

Номери подій показуємо у кружечках. Над кожною з робіт проставляємо її тривалість. Залитим прямокутником позначаємо виконання роботи, починаючи з раннього терміну її початку.

Прямокутником на продовженні виконання роботи показуємо повний резерв часу роботи. Пунктирною лінією всередині цього прямокутника показуємо вільний резерв часу роботи. Вертикальною суцільною лінією показуємо зв'язок між роботами, що утворюють критичний шлях. Пунктирними вертикальними лініями показуємо залежності між некритичними роботами.

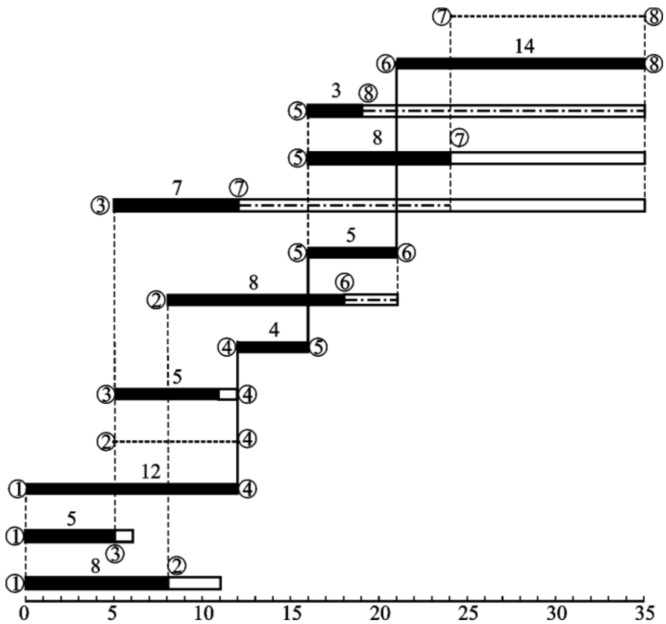


Рисунок 15.8 — Лінійний графік робіт

Контрольні запитання

1. Що таке мережевий графік, як та з чого він складається?
2. Які види робіт розрізняють на мережевих графіках? Поясніть, у чому полягає їх відмінність.
3. Дайте визначення наступним поняттям: *робота*, *подія*, *вихідна подія*, *завершальна подія*, *початкова подія*, *кінцева подія*, *шлях*, *повний шлях*, *критичний шлях*?
4. Дайте тлумачення та поясніть, як розраховуються наступні показники мережевого графіка: ранні та пізні терміни відбування подій, резерви часу подій, ранні та пізні терміни початку та закінчення робіт?
5. Які види резервів часу робіт розрізняють? Поясніть їх сутність та напишіть формули для їх розрахунку.
6. У якій послідовності виконується розрахунок мережевого графіка на графічній моделі?
7. Що таке лінійний графік робіт і як він складається?

П Р А К Т И Ч Н Е З А Н Я Т Т Я №16

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГОР 2×2 ГРАФІЧНИМ ТА АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДАМИ

Мета заняття: вивчення методів рішення ігор 2×2 без сідлової точки графічним та аналітичним методами.

Стисла теоретична довідка

Теорія ігор вивчає ситуації прийняття рішень декількома взаємодіючими сторонами (їх називають ***гравцями***). Основна задача теорії ігор — пошук оптимальних ***стратегій***, що дають гравцям найбільший середній виграш (найменший середній програш) за даних умов гри при її багаторазовому повторенні.

Стратегія — це набір правил (програма), які визначають, який із наявних ходів необхідно зробити при кожній реалізації гри. ***Ходом*** називається вибір гравцем однієї із передбачених правилами дій. Стратегії можуть бути ***чистими***, якщо рекомендується обирати певні невипадкові ходи або ***змішані***, в якій ходи передбачається приймати випадково.

Гра називається ***парною***, якщо у ній беруть участь два гравці (їх позначають як A та B). Гра називається ***грою з нульовою сумою***, якщо сумарний виграш гравців на протязі гри не змінюється та дорівнює нулю (виграш гравця A дорівнює програшу гравця B чи навпаки). Гра називається ***матричною***, якщо у кожного з гравців A та B є обмежена кількість стратегій та умови гри задані у вигляді ***платіжної матриці*** (таблиця 16.1).

Таблиця 16.1 — Платіжна матриця гри

Стратегії гравця А	Стратегії гравця В					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m						

Елементи платіжної матриці можуть бути *додатними*, *від'ємними* або рівними *нулю*. Якщо елемент матриці виграшів додатний то гравець B у певній ситуації сплачує стороні A суму, яка дорівнює елементу матриці. Якщо елемент матриці від'ємний, то гравець A сплачує стороні B суму, яка дорівнює абсолютному значенню елемента матриці. Якщо елемент матриці дорівнює нулю, ніякої сплати не відбувається.

Розв'язання гри полягає у знаходженні оптимальних стратегій гравців

$$S_A^* = (p_1, p_2, \ldots, p_m); \qquad S_B^* = (q_1, q_2, \ldots, q_n); \qquad (16.1)$$

де p_1, p_2, ..., p_m — імовірності вибору гравцем A його чистих стратегій $A_1 \ldots A_m$;

q_1, q_2, ..., q_n — імовірності вибору гравцем B його чистих стратегій $B_1 \ldots B_n$.

Дотримання гравцями оптимальних стратегій дає можливість одержати кожному з них максимальний середній виграш (мінімальний середній програш), що називається ***ціною гри***.

Гра називається такою, що має ***сідлову точку***, якщо її ***нижня ціна*** α дорівнює ***верхній ціні*** β:

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij}; \qquad \beta = \min_j \max_i c_{ij}; \qquad \alpha = \beta. \quad (16.2)$$

У випадку, коли гра має сідлову точку кажуть, що гра має ***рішення в чистих стратегіях***.

При рішенні гри слід керуватись такою послідовністю дій:

1) знайти верхню та нижню ціну гри та перевірити наявність у гри сідлової точки та рішення у чистих стратегіях;

2) за відсутності у гри сідлової точки спробувати спростити гру, шляхом виключення з платіжної матриці домінуючих (заздалегідь невигідних) та дублюючих стратегій;

3) після спрощення платіжної матриці гри її рішення проводять одним з методів, з огляду на кількість стратегій кожного гравця: гра 2×2 вирішується аналітичним методом; гра 2×m чи n×2 — графоаналітичним методом, гра m×n — методом лінійного програмування чи методом ітерацій.

Рішення гри 2×2 без сідлової точки аналітичним методом.

У такій грі у кожного гравця є по дві активні стратегії. Змішані стратегії гравців можна записати у вигляді

$$S_A = (p_1, p_2); \quad S_B = (q_1, q_2).$$

Компоненти оптимальних змішаних стратегій гравців p_1, p_2, q_1, q_2 та ціну гри γ обчислюють за формулами

$$p_1 = \frac{c_{22} - c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}; \qquad p_2 = 1 - p_1;$$

$$q_1 = \frac{c_{22} - c_{12}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}; \qquad q_2 = 1 - q_1; \qquad (16.3)$$

$$\gamma = \frac{c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}}{c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}}.$$

Рішення гри 2×2 без сідлової точки графічним методом. Графічний метод полягає у побудові графіків очікуваних виграшів гравців *A* та *B* при використанні своїх змішаних стратегій проти чистих стратегій суперника. Для побудови графіків складають функціональні рівняння середньоочікуваних виграшів, що одержує один з гравців при використанні ним довільно взятої змішаної стратегії проти чистих стратегій іншого гравця.

для стратегій гравця A	*для стратегій гравця B*
$\gamma_1 = (c_{11} - c_{21})p_1 + c_{21};$	$\gamma_1 = (c_{11} - c_{12})q_1 + c_{12};$
$\gamma_2 = (c_{12} - c_{22})p_1 + c_{22}.$	$\gamma_2 = (c_{21} - c_{22})q_1 + c_{22}.$

Після цього в прямокутних системах координат (p_1, γ) та (q_1, γ) будують графіки прямих $\gamma_1(p_1)$, $\gamma_2(p_1)$, $\gamma_1(q_1)$, $\gamma_2(q_1)$. Ординати точок перетину прямих визначають ціну гри γ^*, а їх абсциси — імовірності p_1 та q_1. Знаючи p_1 та q_1 знаходять p_2 та q_2 за формулами:

$$p_2 = 1 - p_1; \quad q_2 = 1 - q_1. \qquad (16.4)$$

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Підприємство має намір перевозити два види вантажів (A_1 та A_2) з використанням тари двох типів (B_1 та B_2). Витрати на перевезення кожного з вантажів у наявних типах тари неоднакові, складають c_{ij} (i =1..2; j = 1..2) та задані у вигляді матриці 2×2. Визначити оптимальні пропорції кожного з типів тари у парку тарних засобів підприємства, за яких досягаються гарантовані витрати на перевезення вантажів у несприятливих умовах перевезень.

Вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 16.1. Рішення задачі виконати графічним та аналітичним методами.

Таблиця 16.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 16

Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2
1	A_1	2	8	9	A_1	6	5	17	A_1	16	10
	A_2	10	3		A_2	2	7		A_2	4	12
2	A_1	1	2	10	A_1	3	12	18	A_1	10	6
	A_2	5	1		A_2	8	1		A_2	8	10
3	A_1	7	6	11	A_1	9	5	19	A_1	4	7
	A_2	5	10		A_2	4	8		A_2	12	5
4	A_1	2	9	12	A_1	24	13	20	A_1	18	8
	A_2	7	6		A_2	5	15		A_2	9	20
5	A_1	14	7	13	A_1	15	5	21	A_1	21	13
	A_2	10	16		A_2	7	14		A_2	10	15
6	A_1	26	11	14	A_1	9	1	22	A_1	8	6
	A_2	18	21		A_2	5	4		A_2	7	9
7	A_1	2	3	15	A_1	10	6	23	A_1	14	1
	A_2	5	1		A_2	2	8		A_2	4	12
8	A_1	8	2	16	A_1	4	6	24	A_1	12	20
	A_2	3	9		A_2	5	4		A_2	16	10

Продовження таблиці 16.1.

Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2
25	A_1	18	2	26	A_1	4	15	27	A_1	3	11
	A_2	2	10		A_2	9	5		A_2	5	4
28	A_1	5	14	29	A_1	1	9	30	A_1	10	24
	A_2	6	2		A_2	5	0		A_2	14	5

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання роботи за умов, заданих платіжною матрицею, наведеною у таблиці 16.2.

Розв'язок.

Попередній аналіз показує, що гра не має сідлової точки:

$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j c_{ij} = 6;$

$\beta = \min\limits_j \max\limits_i c_{ij} = 10.$

Таким чином, $\alpha \neq \beta$. Гарантовані витрати на виконання перевезень (ціна гри) γ задовольняють нерівності $6 \leqslant \gamma \leqslant 10$.

Таблиця 16.2 — Матриця витрат (приклад)

	B_1	B_2
A_1	12	4
A_2	6	10

Рішення гри графічним методом.

Складаємо рівняння середньоочікуваних виграшів гравців:

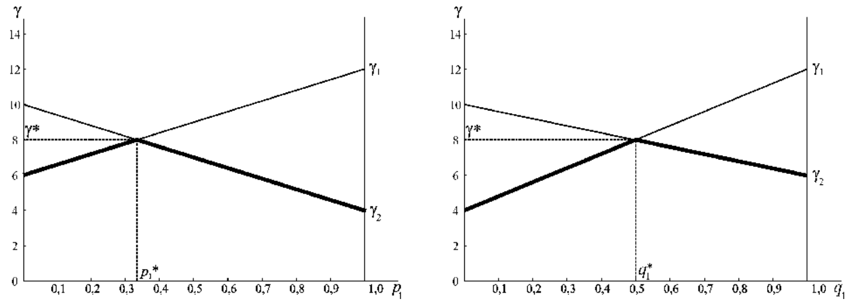
для стратегій гравця A

$$\gamma_1 = (12-6)p_1 + 6 = 6p_1 + 6;$$
$$\gamma_2 = (4-10)p_1 + 10 = -6p_1 + 10.$$

для стратегій гравця B

$$\gamma_1 = (12-4)q_1 + 4 = 8q_1 + 4;$$
$$\gamma_2 = (6-10)q_1 + 10 = -4q_1 + 10.$$

У системах координат (p_1, γ) та (q_1, γ) будуємо графіки відповідних прямих (рисунок 16.1).



для стратегій гравця A *для стратегій гравця B*

Рисунок 16.2 — Графічний розв'язок гри 2×2

Безпосередньо за графіками знаходимо:

$p_1 \approx 0{,}33;$ $p_2 = 1 - 0{,}33 = 0{,}67;$

$q_1 \approx 0{,}5;$ $q_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$

$\gamma^* \approx 8.$

Рішення гри аналітичним методом.

За формулами (16.3) знаходимо компоненти оптимальних змішаних стратегій гравців:

$$p_1 = \frac{10-6}{12+10-4-6} = \frac{4}{12} \approx 0{,}33; \qquad p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}33 - 0{,}67;$$

$$q_1 = \frac{10-4}{12+10-4-6} = \frac{6}{12} = 0{,}5; \qquad q_2 = 1 - q_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$\gamma^* = \frac{12 \cdot 10 - 6 \cdot 4}{12+10-4-6} = \frac{96}{12} = 8.$$

Таким чином, шукані оптимальні змішані стратегії гравців:

$$S_A^* = (0{,}33;\ 0{,}67); \qquad S_B^* = (0{,}50;\ 0{,}50); \qquad \gamma^* = 8.$$

Це означає, що підприємству необхідно мати 50% тари першого типу та 50% тари другого типу. При цьому у несприятливих умовах перевезень буде перевозитись 33% вантажу першого виду та 67% вантажу другого виду. Гарантовані витрати на перевезення вантажів для підприємства у цих умовах складуть 8 *у.г.о*.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення наступним поняттям: *гра, гравець, стратегія, хід, чиста стратегія, змішана стратегія*.
2. Поясніть, яка гра називається матричною парною грою з нульовою сумою?
3. Що таке платіжна матриця гри? Який сенс мають її елементи?
4. У чому полягає розв’язання гри?
5. Що таке сідлова точка гри і як перевіряється її наявність?
6. У якому порядку виконують розв’язання ігор?
7. Наведіть формули для розрахунку змішаних стратегій та ціни гри 2×2, що не має сідлової точки?
8. Дайте графічну інтерпретацію гри 2×2, що має сідлову точку.
9. У якій послідовності розв’язують гру 2×2 графічним методом?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №17

РОЗВЯЗУВАННЯ ІГОР 2×*n*, *m*×2 ГРАФОАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

Мета заняття: засвоєння основних понять теорії ігор та графоаналітичного методу рішень парних матричних ігор 2×*n* та *m*×2 без сідлової точки.

Стисла теоретична довідка

Графоаналітичний метод рішення ігор $2{\times}n$ та $m{\times}2$ полягає у наступному:

1) складають рівняння середньоочікуваних виграшів, що забезпечує гравець A (гра $2{\times}n$) чи B (гра $m{\times}2$), при використанні змішаної стратегії $S_A = (p_1, p_2)$ чи $S_B = (q_1, q_2)$ проти кожної з активних стратегій S_B^j $(j = \overline{1,n})$ гравця B чи S_A^i $(i = \overline{1,m})$ гравця A за формулами

$$\gamma_j = (c_{1j} - c_{2j})p_1 + c_{2j} \quad (j = \overline{1,n}) \qquad \text{для гри } 2{\times}n; \qquad (17.1)$$

$$\gamma_i = (c_{i1} - c_{i2})q_1 + c_{i2} \quad (i = \overline{1,m}) \qquad \text{для гри } m{\times}2. \qquad (17.2)$$

2) у системі координат (p_1, γ) для гри $2{\times}n$ чи (q_1, γ) для гри $m{\times}2$ будують графіки функцій γ_j чи γ_i;

3) за побудованими графіками γ_j чи γ_i визначають графік функції $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ для гри $2{\times}n$ чи $\gamma = \max(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ для гри $m{\times}2$ і на ньому визначають екстремальну точку $\max\gamma = (p_1^*, \gamma^*)$ чи $\min\gamma = (q_1^*, \gamma^*)$;

4) обираються будь-які дві прямі лінії ***з протилежним нахилом***, що перетинаються в екстремальній точці;

5) переходять до гри $2{\times}2$, взявши в якості активних стратегій гравця B (для гри $2{\times}n$) чи гравця A (для гри $m{\times}2$) дві стратегії, що відповідають прямим, які перетинаються у екстремальній точці;

6) отриману гру $2{\times}2$ розв’язують аналітичним методом.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Для щоденного виконання перевезень на двох (варіанти 1–16) чи чотирьох (варіанти 17–30) міських маршрутах (стратегії A_i)

автотранспортне підприємство може розподілити наявний рухомий склад між ними чотирма (варіанти 1–16) чи двома (варіанти 17–30) способами (стратегії B_j). Економічні показники роботи автобусів на маршрутах по варіантах задані платіжною матрицею 2×4 (варіанти 1–16) чи 4×2 (варіанти 17–30), елементи якої означають: нуль – підприємство працює згідно плану, додатне число – підприємство одержує додатковий прибуток, від'ємне число – підприємство несе збитки. Визначити оптимальний варіант розподілу автобусів по маршрутах за допомогою методів теорії ігор.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблицях 17.1 (варіанти 1–16) та 17.2 (варіанти 17–30).

Таблиця 17.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 17

Варіант		B_1	B_2	B_3	B_4	Варіант		B_1	B_2	B_3	B_4
1	A_1	–9	4	–8	3	9	A_1	–5	0	4	–1
	A_2	2	–6	3	–5		A_2	8	7	3	8
2	A_1	–1	1	0	–2	10	A_1	–1	0	2	1
	A_2	4	5	–3	9		A_2	5	2	8	–4
3	A_1	4	2	3	5	11	A_1	5	–1	0	3
	A_2	0	7	–1	–4		A_2	2	4	–2	2
4	A_1	7	8	2	0	12	A_1	–2	0	4	3
	A_2	–4	–3	0	5		A_2	6	1	–3	2
5	A_1	5	4	5	1	13	A_1	–3	7	2	4
	A_2	2	1	–4	3		A_2	10	0	5	–1
6	A_1	6	–1	3	0	14	A_1	0	4	2	1
	A_2	0	5	3	5		A_2	6	–5	2	9
7	A_1	4	7	–1	0	15	A_1	1	0	7	–3
	A_2	2	1	3	8		A_2	10	5	0	6
8	A_1	4	7	–1	0	16	A_1	1	0	7	–3
	A_2	2	1	3	8		A_2	10	5	0	6

Таблиця 17.2 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 17

Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2	Вар.		B_1	B_2
17	A_1	7	–4	22	A_1	–5	4	27	A_1	–3	8
	A_2	5	0		A_2	–1	2		A_2	2	7
	A_3	3	–1		A_3	0	3		A_3	4	–1
	A_4	–2	6		A_4	2	1		A_4	5	4
18	A_1	–6	0	23	A_1	9	–1	28	A_1	6	0
	A_2	4	–4		A_2	5	4		A_2	–2	5
	A_3	3	–6		A_3	0	6		A_3	3	4
	A_4	2	–1		A_4	1	4		A_4	0	1
19	A_1	0	10	24	A_1	–1	–3	29	A_1	–2	9
	A_2	2	8		A_2	–8	2		A_2	0	4
	A_3	4	1		A_3	0	–4		A_3	2	1
	A_4	1	0		A_4	2	–3		A_4	–4	7
20	A_1	0	4	25	A_1	5	–5	30	A_1	–5	8
	A_2	6	–3		A_2	0	2		A_2	5	6
	A_3	2	0		A_3	–6	9		A_3	3	6
	A_4	1	4		A_4	–1	1		A_4	4	1
21	A_1	2	10	26	A_1	–3	15				
	A_2	4	7		A_2	5	10				
	A_3	–2	5		A_3	7	5				
	A_4	1	12		A_4	4	6				

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для умов, заданих платіжною матрицею 2×4 (таблиця 17.3).

Таблиця 17.3 — Платіжна матриця гри (приклад)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	4	5	2
A_2	–2	8	–1	4

Розв'язок.

Спочатку перевіримо, чи є у гри ***сідлова точка*** (рішення в чистих стратегіях). Для цього знаходимо нижню ціну гри α та верхню ціну гри β (таблиця 17.4).

Таблиця 17.4 — Перевірка наявності сідлової точки

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j c_{ij}$	$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j c_{ij}$
A_1	8	4	5	2	2	**2**
A_2	–2	8	–1	4	–2	
$\max\limits_i c_{ij}$	8	8	5	4	$\alpha = 2;\ \beta = 4$ $\alpha \neq \beta$	
$\beta = \min\limits_j \max\limits_i c_{ij}$	**4**					

Так як нижня ціна гри не дорівнює верхній, тобто $\alpha \neq \beta$, то робимо висновок, що гра не має сідлової точки та рішення у чистих стратегіях.

Спробуємо ***спростити*** платіжну матрицю гри.

Розглянемо гру з позицій гравця B. Порівнюючи його активні стратегії B_2 та B_4 помічаємо, що стратегія B_2 для гравця B є заздалегідь невигідною, оскільки при будь-якому ході гравця A він програє більше, використовуючи активну стратегію B_2 ніж використовуючи активну стратегію B_4 . Як кажуть, стратегія B_4 ***домінує*** стратегію B_2. Таким чином, стратегію B_2 з гри можна виключити, в результаті отримуємо гру з платіжною матрицею 2×3 (таблиця 17.5).

Таблиця 17.5 — Спрощена платіжна матриця

	B_1	B_3	B_4
A_1	8	5	2
A_2	–2	–1	4

Складаємо функціональні рівняння середньоочікуваних виграшів гравця A за формулою (17.1):

$$\gamma_1 = [8-(-2)]p_1 + (-2) = 10p_1 - 2;$$

$$\gamma_3 = [5-(-1)]p_1 + (-1) = 6p_1 - 1;$$
$$\gamma_4 = [2-4]p_1 + 4 = -2p_1 + 4.$$

За складеними рівняннями у системі координат (p_1, γ) будуємо відповідні графіки рівнянь γ_i (рисунок 17.1).

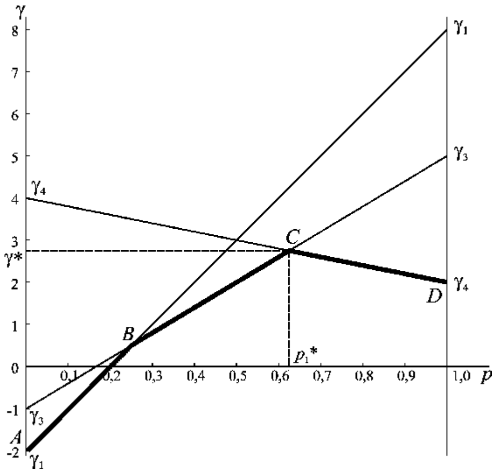


Рисунок 17.1 — Графіки рівнянь $\gamma_i = f(p_1)$

Будуємо графік функції $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)$. Він охоплює нижню границю побудованих прямих γ_i та утворює контур *ABCD* (на рисунку 17.1 він показаний жирними лініями).

Екстремальна (максимальна) точка контуру — точка *C*. У ній перетинаються прямі γ_3 та γ_4. Отже, отримуємо гру 2×2, у якій з боку гравця *B* маємо дві активні стратегії — B_3 та B_4 (таблиця 17.6).

Таблиця 17.6 — Гра 2×2

	B_3	B_4
A_1	5	2
A_2	–1	4

Оптимальні змішані стратегії гравців знаходимо за формулами (16.3):

$$p_1 = \frac{4-(-1)}{5+4-2-(-1)} = 0{,}625; \qquad p_2 = 1-0{,}625 = 0{,}375;$$

$$q_1 = \frac{4-2)}{5+4-2-(-1)} = 0{,}25; \qquad q_2 = 1-0{,}25 = 0{,}75;$$

$$\gamma = \frac{5\cdot 4-2\cdot(-1)}{5+4-2-(-1)} = 2{,}75.$$

Тобто, $S_A^* = (0{,}625;\ 0{,}375)$, $S_B^* = (0,\ 0,\ 0{,}25;\ 0{,}75)$, $\gamma^* = 2{,}75$. Автотранспортному підприємству слід з імовірністю 0,25 (25 днів зі 100) виділяти рухомий склад за третім варіантом, та з імовірністю 0,75 (75 днів зі 100) — за четвертим варіантом. При цьому рухомий склад 62,5% днів відпрацює на першому маршруті та 37,5% днів — на другому маршруті, а підприємство буде одержувати середній щоденний прибуток 2,75 у.г.о.

Контрольні запитання

1. Як виконується спрощення платіжної матриці гри? Поясніть принцип домінування стратегій.
2. Поясніть порядок рішення ігор $2\times n$ та $m\times 2$ графоаналітичним методом.
3. У чому полягає відмінність у графоаналітичному розв'язуванні ігор $2\times n$ у порівнянні з іграми $m\times 2$?
4. Викладіть зміст теореми про кількість активних стратегій гравців у парних матричних іграх з платіжною матрицею довільного розміру.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №18

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГОР *m×n* МЕТОДОМ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета заняття: засвоєння методу розв'язування ігор $m \times n$ без сідлової точки методом лінійного програмування.

Стисла теоретична довідка

Метод лінійного програмування дозволяє розв'язати гру довільного розміру, шляхом зведення гри з невід'ємною платіжною матрицею до пари двоїстих задач лінійного програмування.

Розв'язок виконують у наступному порядку.

1. При наявності у платіжній матриці гри від'ємних елементів її перетворюють в додатну за формулою $c'_{ij} = c_{ij} + M$, де M — довільне додатне число, що більше ніж найменший від'ємний елемент платіжної матриці. При такому перетворенні компоненти оптимальних змішаних стратегій гравців *не змінюються*, а ціна гри *збільшується* на M.

2. Формують пару двоїстих задач лінійного програмування

для стратегій гравця A	*для стратегій гравця B*
$Z_A = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \Rightarrow \min$	$Z_B = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \Rightarrow \max$
$c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \ldots + c_{mj}x_m \geqslant 1$ $(j = \overline{1,n})$	$c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \ldots + c_{in}y_n \leqslant 1$ $(i = \overline{1,m})$
$x_i \geqslant 0 \; (i = \overline{1,m})$	$y_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,n})$

3. Розв'язують ці задачі (наприклад, симплекс-методом) та визначають оптимальні значення змінних $x_i^* \; (i = \overline{1,m})$, $y_j^* \; (j = \overline{1,n}$) і значення цільової функції $Z_A^* = Z_B^*$.

4. Розраховують компоненти оптимальних змішаних стратегій гравців за формулами

$$\gamma' = \frac{1}{Z_A^*} = \frac{1}{Z_B^*}; \qquad \gamma^* = \gamma' - M;$$

$$p_i = \gamma' \cdot x_i^* = \frac{x_i^*}{Z_A^*} \ (i = \overline{1,m}); \qquad q_j = \gamma' \cdot y_j^* = \frac{y_j^*}{Z_B^*} \ (j = \overline{1,n}).$$

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Автотранспортне підприємство (A) може виділяти щодня три типи автомобілів для перевезення вантажовідправнику (B), що використовує їх на перевезеннях трьох видів вантажу. Прибуток сторін від виконання перевезень (в умовних грошових одиницях) заданий платіжною матрицею 3×3. Методами теорії ігор оцінити економічну доцільність виконання перевезень з боку АТП та визначити його оптимальну стратегію з метою максимізації середньоденного прибутку.

Вихідні дані до виконання заняття по варіантах наведені у таблиці 18.1.

Таблиця 18.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 18

Вар.		B_1	B_2	B_3	Вар.		B_1	B_2	B_3
1	A_1	5	6	7	3	A_1	6	–5	1
	A_2	9	8	1		A_2	9	0	–4
	A_3	–6	–4	8		A_3	3	4	5
2	A_1	–5	0	4	4	A_1	–1	8	1
	A_2	3	2	2		A_2	2	6	0
	A_3	7	1	1		A_3	–4	0	5

Продовження таблиці 18.1.

Вар.		B_1	B_2	B_3	Вар.		B_1	B_2	B_3
5	A_1	9	–6	0	15	A_1	–5	–9	1
	A_2	2	5	–5		A_2	–1	5	–2
	A_3	1	8	2		A_3	3	8	–4
6	A_1	0	–1	7	16	A_1	2	1	–4
	A_2	3	–2	2		A_2	5	0	1
	A_3	–5	4	0		A_3	–8	2	3
7	A_1	–6	–1	5	17	A_1	0	0	6
	A_2	5	–4	7		A_2	–3	1	4
	A_3	0	1	–5		A_3	2	6	–5
8	A_1	–1	–3	1	18	A_1	0	–7	11
	A_2	2	9	–5		A_2	9	3	2
	A_3	4	4	0		A_3	–7	7	1
9	A_1	8	1	–1	19	A_1	5	–4	12
	A_2	9	–4	7		A_2	3	0	10
	A_3	0	8	2		A_3	–15	3	–1
10	A_1	2	8	–4	20	A_1	0	12	–1
	A_2	–10	1	5		A_2	4	–2	9
	A_3	–3	6	–2		A_3	2	1	6
11	A_1	–3	–1	8	21	A_1	–2	8	1
	A_2	2	–1	–5		A_2	8	–5	–7
	A_3	6	0	6		A_3	–6	1	8
12	A_1	2	–4	10	22	A_1	9	3	9
	A_2	–5	0	8		A_2	–2	5	6
	A_3	3	–1	–9		A_3	7	–1	0
13	A_1	–8	0	2	23	A_1	10	–5	0
	A_2	0	6	–4		A_2	5	8	–3
	A_3	5	–5	–5		A_3	–4	2	1
14	A_1	9	0	–4	24	A_1	1	7	–3
	A_2	–2	6	–2		A_2	4	1	8
	A_3	–1	–5	7		A_3	–6	–1	5

Продовження таблиці 18.1.

Вар.		B_1	B_2	B_3	Вар.		B_1	B_2	B_3
25	A_1	–2	–8	12	28	A_1	–6	5	10
	A_2	0	7	–1		A_2	0	4	12
	A_3	4	0	9		A_3	5	1	–2
26	A_1	–2	–8	12	29	A_1	–9	6	8
	A_2	0	7	–1		A_2	2	3	–1
	A_3	4	0	9		A_3	4	0	–2
27	A_1	–2	–8	12	30	A_1	12	–5	4
	A_2	0	7	–1		A_2	10	1	3
	A_3	4	0	9		A_3	–7	0	–1

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для умов гри, заданих платіжною матрицею (таблиця 18.2).

Таблиця 18.2 — Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3
A_1	–9	0	10
A_2	5	–2	1
A_3	3	1	–2

Розв’язок.

Попередній аналіз платіжної матриці гри показує, що гра не має сідлової точки:

$$\alpha = \max_i \min_j c_{ij} = \max\{-9; -2; -2\} = -2;$$

$$\beta = \min_j \max_i c_{ij} = \min\{5; 1; 10\} = 1.$$

$$\alpha \neq \beta.$$

Серед елементів платіжної матриці є від'ємні, найменше з яких дорівнює $c_{11} = -9$. Отже, перехід до платіжної матриці з додатними елементами можна, призначивши $M = 10$ та додавши це значення до всіх її елементів (таблиця 18.3).

Таблиця 18.3 — Перетворена платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	10	20
A_2	15	8	11
A_3	13	11	8

На підставі цієї перетвореної платіжної матриці формулюємо дві двоїсті задачі лінійного програмування:

для стратегій гравця A

$$Z_A = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 15x_2 + 13x_3 &\geqslant 1; \\ 10x_1 + 8x_2 + 11x_3 &\geqslant 1; \\ 20x_1 + 11x_2 + 8x_3 &\geqslant 1. \end{aligned}$$

$$x_i \geqslant 0 \; (i = \overline{1,3})$$

для стратегій гравця B

$$Z_B = y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 1y_1 + 10y_2 + 20y_3 &\leqslant 1; \\ 15y_1 + 8y_2 + 11y_3 &\leqslant 1; \\ 13y_1 + 11y_2 + 8y_3 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

$$y_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,3})$$

Вирішуючи ці дві задачі отримаємо:

$$x_1^* = 0{,}019; \;\; x_2^* = 0{,}005; \;\; x_1^* = 0{,}070; \qquad Z_{A\min} = 0{,}094;$$
$$y_1^* = 0{,}024\,; \;\; y_2^* = 0{,}043; \;\; y_1^* = 0{,}027; \qquad Z_{B\max} = 0{,}094.$$

Розраховуємо ціну гри і компоненти оптимальних змішаних стратегій гравців для перетвореної (таблиця 18.3) платіжної матриці:

$$\gamma' = \frac{1}{Z_{A\min}} = \frac{1}{Z_{B\max}} = \frac{1}{0,094} = 10,64;$$

$$p_1^* = \gamma' \cdot x_1 = 10,64 \cdot 0,019 = 0,202;$$
$$p_2^* = \gamma' \cdot x_2 = 10,64 \cdot 0,005 = 0,053;$$
$$p_3^* = \gamma' \cdot x_3 = 10,64 \cdot 0,070 = 0,745;$$
$$q_1^* = \gamma' \cdot y_1 = 10,64 \cdot 0,024 = 0,255;$$
$$q_2^* = \gamma' \cdot y_2 = 10,64 \cdot 0,043 = 0,458;$$
$$q_3^* = \gamma' \cdot y_3 = 10,64 \cdot 0,027 = 0,287.$$

Дійсна ціна гри для вихідної платіжної матриці

$$\gamma^* = \gamma' - M = 10,64 - 10 = 0,64.$$

Оптимальною стратегією АТП буде $S_A^* = \{0,202;\ 0,053;\ 0,745\}$, тобто слід у 20,2% днів планового періоду виділяти для перевезень автомобілі першого типу, у 5,3% днів — автомобілі другого типу і у 75,5% днів — автомобілі третього типу. При цьому автомобілі будуть 25,5% днів перевозити перший вид вантажу, 45,8% днів — другий вид вантажу і 28,7% днів — третій вид вантажу. Це економічно вигідно АТП, оскільки воно буде в середньому отримувати щодня 0,64 $у.г.о.$ прибутку.

Контрольні запитання

1. При якому розмірі платіжної матриці гри для її рішення можна застосувати метод лінійного програмування?
2. Якими повинні бути елементи платіжної матриці гри для її рішення методом лінійного програмування?
3. Запишіть умови пари двоїстих задач лінійного програмування для знаходження компонентів оптимальних змішаних стратегій гравців при рішенні гри методом лінійного програмування.

4. Як, знаючи рішення пари двоїстих задач лінійного програмування, знайти імовірності використання гравцями активних стратегій у грі?

5. Як знайти дійсну ціну гри, якщо для вихідної платіжної матриці застосовувалось перетворення?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №19

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІГОР $m \times n$ МЕТОДОМ ІТЕРАЦІЙ

Мета заняття: вивчення методів розв'язування ігор $m \times n$ без сідлової точки наближеним ітераційним методом Брауна-Робінсон.

Стисла теоретична довідка

Метод Брауна-Робінсон є наближеним методом рішення ігор довільного розміру без сідлової точки. Ідея методу полягає у наступному.

Розігрується штучний експеримент, у якому гравці A та B по черзі застосовують один проти одного свої активні стратегії, маючи намір виграти побільше (програти найменше). Експеримент складається з декількох послідовних «партій» гри. Починається вона з того, що один з гравців (наприклад, A) обирає довільно одну із своїх активних стратегій A_i. Гравець B відповідає йому такою з своїх активних стратегій B_j, яка гірша за все для A, тобто надає виграшу гравця A при застосуванні ним стратегії A_i мінімальне значення. Надалі знов, черга гравця A — він відповідає гравцю B такою своєю стратегією A_k, яка дає максимальний виграш при застосуванні гравцем B стратегії B_j. У подальшій черговій відповіді гравець B застосовує таку свою стратегію, яка є найгіршою не для останньої стратегії A_k, а для змішаної стратегії, у якій застосовані досі стратегії A_i, A_k зустрічаються з рівними ймовірностями. І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожний гравець відповідає на черговий хід другого тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього відносно змішаної стратегії іншого гравця, до якої всі застосовані досі стратегії входять пропорційно частотам їх застосовування.

Даний метод є дуже простим, однак йому властивий суттєвий недолік — ітераційний процес сходиться дуже повільно.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Розв'язати ітераційним методом гру 3×3, умови якої задані у практичному занятті 18. Автотранспортне підприємство (A) може виділяти щодня три типи автомобілів для перевезення вантажовідправнику (B), що використовує їх на перевезеннях трьох видів вантажу. Прибуток сторін від виконання перевезень (в умовних грошових одиницях) заданий платіжною матрицею 3×3. Методами теорії ігор оцінити економічну доцільність виконання перевезень з боку АТП та визначити його оптимальну стратегію з метою максимізації середньоденного прибутку.

Вихідні дані до виконання завдання прийняти з практичного заняття 18 згідно таблиці 18.1. Для пошуку наближеного розв'язку заданої гри за методом Брауна-Робінсон виконати 15 ітерацій.

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання роботи за умов задачі, заданих платіжною матрицею 3×3 (таблиця 19.1).

Таблиця 19.1 — Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3
A_1	–9	0	10
A_2	5	–2	1
A_3	3	1	–2

Розв'язок.

У таблиці 19.2 наведені перші 15 кроків ітераційного процесу. Рішення починаємо з того, що гравець A обирає будь-яку свою активну стратегію (у нашому прикладі стратегію A_3).

Нижче наведені пояснення до ітераційної таблиці.

1. У першому стовпчику зазначений номер розігруваної партії (пари виборів) k, у другому — номер i вибраної у даній партії стратегії гравця A.

2. У наступних трьох стовпчиках записують накопичений виграш за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці у попередніх партіях та при стратегіях B_1, B_2, B_3 гравця B у даній партії. Результат одержується додаванням елементів відповідного рядка платіжної матриці до значень попереднього рядка розрахункової таблиці.

3. Серед цих накопичених виграшів знаходять мінімальний (у таблиці 19.2 такий виграш позначено зірочкою). Якщо мінімальних виграшів декілька, позначаються всі. Позначене число визначає відповідний вибір гравця B у даній партії — він обирає ту стратегію, яка відповідає позначеному мінімальному виграшу (якщо їх декілька, вибирається будь-яке). Таким чином, визначається номер оптимальної (у даній партії) стратегії гравця B. Номер цієї стратегії записується у наступному стовпчику.

4. У наступних трьох стовпчиках фіксується накопичений виграш за k партій, відповідно, при стратегіях A_1, A_2, A_3 гравця A (визначається додаванням елементів відповідного стовпчика платіжної матриці до значень попереднього рядка розрахункової таблиці). З цих значень у таблиці 19.2 позначено зірочкою максимальне — воно визначає вибір стратегії сторони A у наступній партії (рядком нижче).

5. В останніх трьох стовпчиках таблиці 19.2 записують: $\gamma_{н}$ — нижню оцінку ціни гри, яка дорівнює накопиченому виграшу гравця A, поділеному на кількість розіграних партій k; $\gamma_{в}$ — верхню оцінку ціни гри, яка дорівнює накопиченому виграшу гравця B, поділеному на k; $\overline{\gamma}$ — середнє арифметичне між цими двома оцінками.

Таблиця 19.2 — Розрахункова таблиця

Номер партії k	Стратегія гравця A	Накопичений виграш гравця A при стратегіях гравця B			Стратегія гравця B	Накопичений виграш гравця B при стратегіях гравця A			Ціна гри		
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3	$\gamma_н$	$\gamma_в$	$\overline{\gamma}$
1	3	3	1	–2*	3	10*	1	–2	–2	10	4
2	1	–6*	1	8	1	1	6*	1	–3	3	0
3	2	–1*	–1*	9	2	1	4*	2	–0,33	1,33	0,5
4	2	4	–3*	10	2	1	2	3*	–0,75	0,75	0
5	3	7	–2*	8	2	1	0	4*	–0,4	0,8	0,2
6	3	10	–1*	6	2	1	–2	5*	–0,17	0,71	0,27
7	3	13	0*	4	2	1	–4	6*	0	0,86	0,43
8	3	16	1*	2	2	1	–6	7*	0,13	0,88	0,51
9	3	19	2	0*	3	11*	–5	5	0	1,22	0,61
10	1	10	2*	10	2	11*	–3	4	0,2	1,1	0,65
11	1	1*	2	20	1	2	2	7*	0,09	0,64	0,37
12	3	4	3*	18	2	2	0	8*	0,25	0,67	0,46
13	3	7	4*	16	2	2	–2	9*	0,31	0,69	0,5
14	3	10	5*	14	2	2	–4	10*	0,36	0,71	0,54
15	3	13	6*	12	2	2	–6	11*	0,4	0,73	0,57

Для знаходження наближеного рішення гри необхідно підрахувати частоту використання активних стратегій гравців за виконану кількість кроків ітераційного процесу N.

Гравець A використав за $N = 15$ партій стратегію A_1 3 рази ($m_1 = 3$), стратегію A_2 — 2 рази ($m_2 = 2$), стратегію A_3 — 10 разів ($m_3 = 10$).

Гравець B використав за $N = 15$ партій стратегію B_1 2 рази ($w_1 = 3$), стратегію B_2 — 11 разів ($w_2 = 11$), стратегію B_3 — 2 рази ($w_3 = 2$).

Таким чином, наближені значення компонентів оптимальних змішаних стратегій гравців складуть:

гравця A:

$$p_1 \approx \frac{m_1}{N} \approx \frac{3}{15} = 0{,}2; \quad p_2 \approx \frac{m_2}{N} \approx \frac{2}{15} = 0{,}13; \quad p_3 \approx \frac{m_3}{N} \approx \frac{10}{15} = 0{,}67;$$

гравця B:

$$q_1 \approx \frac{w_1}{N} \approx \frac{2}{15} = 0{,}13; \quad q_2 \approx \frac{w_2}{N} \approx \frac{11}{15} = 0{,}73; \quad q_3 \approx \frac{w_3}{N} \approx \frac{2}{15} = 0{,}13.$$

Наближене значення ціни гри (значення $\overline{\gamma}$ у останньому рядку розрахункової таблиці) $\overline{\gamma} \approx 0{,}57$.

Для порівняння наведемо точне рішення гри, отримане у практичному занятті 18:

$$S_A^* = \{0{,}202;\ 0{,}053;\ 0{,}745\}; \quad S_B^* = \{0{,}255;\ 0{,}458;\ 0{,}287\}; \quad \gamma^* \approx 0{,}64.$$

Контрольні запитання

1. Для рішення яких ігор призначений наближений ітераційний метод Брауна-Робінсон? У чому полягає його сутність?

2. З яких стовпчиків складається розрахункова таблиця і як заповнюються її рядки?

3. Укажіть переваги та недоліки методу Брауна-Робінсон.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №20

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мета заняття: вивчення критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

Стисла теоретична довідка

Прийняття рішень в умовах невизначеності характеризується тим, що дії однієї з конфліктуючих сторін залежать не від свідомо діючого об'єкта, а набувають властивостей невизначеності (об'єктивної дійсності). Такого супротивника у грі прийнято називати ***природою*** (*П*). Дії природи відрізняються від дій свідомого гравця тим, що природа, на відміну від гравця, який кожним ходом намагається завдати супротивнику найбільшої шкоди, діє невизначено, зокрема, можливо, на користь супротивнику.

Для прийняття рішень у таких іграх застосовують різноманітні критерії, в залежності від наявності інформації про стан природи. Нижче наведені деякі класичні критерії прийняття рішень у грі з природою.

1. ***Максимінний критерій Вальда***.

Згідно з цим критерієм вибирається така стратегія гравця *А*, яка гарантує при будь-яких умовах виграш не менший ніж максимін відповідної платіжної матриці гри

$$W = \max_i \min_j c_{ij} . \tag{20.1}$$

Якщо керуватись цим критерієм, то необхідно завжди орієнтуватись на найгірший результат у грі і обирати таку стратегію, при якій виграш у найгірших умовах буде максимальним.

2. ***Мінімаксний критерій ризику Севіджа***.

У цьому випадку при виборі оптимальної стратегії слід орієнтуватися не на виграш, а на ***ризик***. Ризиком гравця A при виборі деякої стратегії A_i в умовах природи $П_j$ називається різниця між максимальним виграшем, що можна одержати, якщо знати наміри природи, і виграшем, який отримає гравець A в тих же умовах, застосовуючи стратегію A_i. Якщо б гравець A знав заздалегідь майбутній стан природи $П$, то він обрав би стратегію, якій відповідає максимальний елемент у даному стовпчику, тобто $\beta_j = \max_j c_{ij}$. Тоді величина ризику за визначенням дорівнює $r_{ij} = \beta_j - c_{ij}$.

Матриця ризиків будується таким чином:

1) визначається для кожного стану природи (стовпчика) найбільший елемент $\max_j c_{ij}$;

2) елемент матриці ризиків одержують відніманням відповідного елементу платіжної матриці з максимального елемента даного стовпчика.

Критерій Севіджа рекомендує в умовах невизначеності обирати стратегію, що забезпечує мінімальне значення максимального ризику

$$S = \min_i \max_j r_{ij} . \tag{20.2}$$

3. ***Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.***

Згідно з цим критерієм для кожної активної стратегії гравця визначають лінійну комбінацію мінімального та максимального виграшу і обирають ту стратегію, для котрої ця величина буде найбільшою.

Критерій Гурвіца записується у вигляді

$$H = \max_i [\alpha \max_j c_{ij} + (1-\alpha) \min_j c_{ij}] . \tag{20.3}$$

де α — коефіцієнт, що характеризує ступінь оптимізму ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

Коефіцієнт α вибирається з суб’єктивних міркувань в залежності від ступеня відповідальності: чим більше наслідки помилкових рішень, тим більше бажання застрахуватись від ризику, отже, тим ближче до нуля вибирається α.

При $\alpha = 0$ критерій Гурвіца перетворюється у максимінний критерій Вальда.

При $\alpha = 1$ критерій Гурвіца є критерієм «крайнього» оптимізму, який рекомендує обирати ту стратегію, що забезпечує у найкращих умовах максимальний виграш.

4. ***Критерій Баєса–Лапласа.***

Вибираючи цей критерій, відходять від умов повної невизначеності, вважаючи, що можливим станам природи можна надати певну імовірність їх появи. Визначивши математичне очікування виграшу для повного розв'язання, вибирають те, котре забезпечує найбільше значення виграшу

$$L = \max_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j \,, \qquad (20.4)$$

де p_j — ймовірність появи *j*-го стану природи.

Принцип Байєса–Лапласа можна застосовувати, якщо досліджувані стани природи та рішення, які приймаються, багаторазово повторюються. Тоді, наприклад, статистичними методами, базуючись на частотах появи окремих станів природи у минулому, можна оцінити імовірність їх появи у майбутньому. При одиничних рішеннях, які не повторюються, принцип Байєса–Лапласа застосовувати не можна, оскільки ці рішення порушують стаціонарність розподілу імовірностей станів природи.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Щодоби на промислове підприємство надходять під розвантаження залізничні вагони. Можливу заздалегідь невідому кількість вагонів, що надходять щодоби, за умовами виконання вантажних операцій, можна поділити на три категорії:

$П_1$ — надходить максимально можлива кількість вагонів;

$П_2$ — надходить середньодобова кількість вагонів;

$П_3$ — надходить мінімальна кількість вагонів.

Підприємство може використати наступні варіанти організації обробки вагонів на вантажних фронтах:

A_1 — обробка вагонів в одну зміну;

A_2 — обробка вагонів в дві зміни;

A_3 — обробка вагонів в три зміни;

A_4 — утримання чергової резервної бригади вантажників.

Витрати, що несе підприємство від простою вагонів під розвантаженням утримання бригад вантажників на під'їзних коліях в залежності від їх добової кількості, задані платіжною матрицею 4×3 . Використовуючи критерії Вальда, Севіджа, Гурвіца та Баєса-Лапласа прийняти рішення про варіант організації обробки вагонів на вантажних фронтах підприємства.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 20.1.

Таблиця 20.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 20

Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$	Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$
1	A_1	8	14	70	4	A_1	16	21	81
	A_2	20	30	40		A_2	30	36	65
	A_3	44	45	21		A_3	48	36	50
	A_4	60	20	14		A_4	54	18	20
2	A_1	20	28	64	5	A_1	19	32	75
	A_2	45	49	51		A_2	40	49	61
	A_3	70	55	29		A_3	50	36	39
	A_4	84	36	17		A_4	80	24	23
3	A_1	10	15	68	6	A_1	15	34	75
	A_2	24	30	52		A_2	35	48	64
	A_3	48	27	40		A_3	60	52	30
	A_4	56	12	30		A_4	72	40	20

Продовження таблиці 20.1.

Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$	Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$
7	A_1	24	15	80	15	A_1	10	20	60
	A_2	39	45	58		A_2	32	40	46
	A_3	56	35	40		A_3	44	30	31
	A_4	64	25	25		A_4	59	10	16
8	A_1	9	18	72	16	A_1	22	34	78
	A_2	20	20	54		A_2	49	56	56
	A_3	45	38	40		A_3	60	48	40
	A_4	64	30	26		A_4	84	20	30
9	A_1	23	28	85	17	A_1	30	42	83
	A_2	51	40	70		A_2	52	65	70
	A_3	70	60	49		A_3	71	60	54
	A_4	90	40	27		A_4	96	36	28
10	A_1	40	54	88	18	A_1	36	50	96
	A_2	72	68	63		A_2	49	73	62
	A_3	86	52	50		A_3	71	64	40
	A_4	98	30	35		A_4	92	50	24
11	A_1	38	48	80	19	A_1	26	30	65
	A_2	72	81	71		A_2	46	50	38
	A_3	90	70	57		A_3	60	54	26
	A_4	98	52	30		A_4	70	28	20
12	A_1	20	30	72	20	A_1	35	48	84
	A_2	42	60	62		A_2	60	60	68
	A_3	58	64	50		A_3	79	72	49
	A_4	80	41	31		A_4	92	50	30
13	A_1	21	32	72	21	A_1	8	16	62
	A_2	50	46	42		A_2	27	30	40
	A_3	70	54	30		A_3	40	30	28
	A_4	81	30	20		A_4	59	20	12
14	A_1	16	25	75	22	A_1	18	26	86
	A_2	45	59	63		A_2	44	42	68
	A_3	68	30	35		A_3	65	34	38
	A_4	84	20	15		A_4	80	25	24

Продовження таблиці 20.1.

Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$	Вар.		$П_1$	$П_2$	$П_3$
23	A_1	18	28	90	27	A_1	20	35	64
	A_2	42	50	60		A_2	38	59	50
	A_3	60	42	49		A_3	59	40	36
	A_4	72	24	27		A_4	71	28	18
24	A_1	35	48	90	28	A_1	35	24	75
	A_2	68	64	70		A_2	41	51	69
	A_3	82	52	46		A_3	69	50	40
	A_4	95	21	28		A_4	70	80	15
25	A_1	35	48	90	29	A_1	82	46	25
	A_2	68	64	70		A_2	51	35	30
	A_3	82	52	46		A_3	30	58	40
	A_4	95	21	28		A_4	15	60	70
26	A_1	35	48	90	30	A_1	61	95	45
	A_2	68	64	70		A_2	55	50	52
	A_3	82	52	46		A_3	36	40	75
	A_4	95	21	28		A_4	29	36	81

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для умов гри, заданих платіжною матрицею (таблиця 20.2).

Таблиця 20.2 — Платіжна матриця гри з природою

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	15	25	40
A_2	24	30	32
A_3	36	28	20
A_4	45	14	5

Розв'язок.

1. ***Критерій Вальда***. У кожному рядку платіжної матриці знаходимо найменший елемент і оберемо ту стратегію підприємства, для якої це значення буде максимальним (таблиця 20.3).

Таблиця 20.3 — Вибір рішення за критерієм Вальда

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min\limits_j c_{ij}$
A_1	15	25	40	15
A_2	24	30	32	**24***
A_3	36	28	20	20
A_4	45	14	5	5

Таким чином, критерій Вальда рекомендує обирати стратегію A_2 (організувати обробку вагонів у дві зміни).

2. ***Критерій Севіджа***.

Побудуємо матрицю ризиків, для чого у кожному стовпчику платіжної матриці відшукуємо найбільший елемент та віднімаємо від нього всі інші елементи даного стовпчика (таблиця 20.4).

У побудований матриці ризиків у кожному рядку відшукуємо найбільший елемент та обираємо ту стратегію підприємства, для якої це значення буде мінімальним (таблиця 20.4).

Таблиця 20.4 — Матриця ризиків

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\max\limits_j r_{ij}$
A_1	30	5	0	30
A_2	21	0	8	21
A_3	9	2	20	**20***
A_4	0	16	35	35

Таким чином, критерій Севіджа рекомендує обирати стратегію A_3 (організувати обробку вагонів у три зміни).

3. ***Критерій Гурвіца***.

Приймаємо ступінь оптимізму $\alpha = 0{,}6$. У кожному рядку платіжної матриці відшукуємо максимальний та мінімальний елементи і розраховуємо за формулою (20.3) значення критерію H_i (таблиця 20.5). Обираємо ту стратегію підприємства, для якої це значення буде максимальним.

Таблиця 20.5 — Вибір рішення за критерієм Гурвіца

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min\limits_j c_{ij}$	$\max\limits_j c_{ij}$	H_i
A_1	15	25	40	15	40	**30***
A_2	24	30	32	24	32	28,8
A_3	36	28	20	20	36	29,6
A_4	45	14	5	5	45	29

Таким чином, критерій Гурвіца рекомендує обирати стратегію A_1 (організувати обробку вагонів в одну зміну).

4. ***Критерій Баєса-Лапласа***.

За умови, коли немає інформації про імовірності станів природи та її поведінку в минулому, при використанні критерію Баєса-Лапласа можна прийняти положення про рівну імовірність появи кожного з можливих станів природи. Оскільки кількість можливих станів природи у нашому випадку дорівнює 3, імовірність появи кожного з них становить $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

Для кожного рядка вихідної платіжної матриці за формулою (20.4) розраховуємо значення критерію L. Результати розрахунку наведені у таблиці 20.6.

Таблиця 20.6 — Вибір рішення за критерієм Баєса-Лапласа

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$L = \max_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j$
A_1	15	25	40	26,67
A_2	24	30	32	**28,67***
A_3	36	28	20	28,00
A_4	45	14	5	21,33

Таким чином, критерій Баєса-Лапласа рекомендує обирати стратегію A_2 (організувати обробку вагонів у дві зміни).

Результати розрахунків щодо прийняття рішень за критеріями зводимо до таблиці 20.7.

Таблиця 20.7 — Результати прийняття рішень за критеріями

Стратегії A_i	Критерії				Кількість прийнятих рішень
	Вальда	*Севіджа*	*Гурвіца*	*Баєса-Лапласа*	
A_1			+		1
A_2	+			+	**2**
A_3		+			1
A_4					0

Найбільшу кількість рішень прийнято за стратегією A_2 (дві), тому цю стратегію (організувати обробку вагонів у дві зміни) слід вважати оптимальною.

Контрольні запитання

1. Дайте поняття природи та гри з природою.
2. Чим дії природи у грі відрізняються від дій активного гравця?
3. Дайте правила вибору оптимальних стратегій у грі з природою за критеріями *Вальда*, *Севіджа*, *Гурвіца*, *Баєса-Лапласа*.
4. Що таке матриця ризиків та як розраховуються її елементи?
5. Дайте міркування щодо вибору значення ступеню оптимізму при виборі рішення за критерієм Гурвіца.
6. У яких умовах можна використовувати критерій Баєса-Лапласа?