МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
ректор ЗНТУ
проф. _________ С. Б. Бєліков
«____»______________ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

Частина III. Методичні вказівки до самостійної роботи студента
Розділ 1. *Лінійне програмування. Цілочислове програмування. Динамічне програмування.*

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина III, розділ 1)/ Склали: доц. Кузькін О. Ф., доц. Лащених О. А. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. — 56 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.
доц., канд. техн. наук Лащених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ
Протокол № ___ від «___» ________ 2018 р.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

ДВОЇСТІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета роботи: вивчення двоїстості у лінійному програмуванні, теорем двоїстості та правил складання двоїстих задач.

Стисла теоретична довідка

Кожній задачі лінійного програмування (вона називається *прямою* задачею) відповідає *двоїста*. Формування двоїстої задачі виконується за певними правилами.

Наприклад, якщо *пряма* задача має вигляд:

максимізувати $Z = c_1x_2 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max$,

за умови обмежень на змінні

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m; \end{cases}$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n}\ ,$$

то *двоїста* задача записується наступним чином:

мінімізувати $F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \Rightarrow \min$,

за умови обмежень на змінні

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \leqslant c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \leqslant c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \leqslant c_n; \end{cases}$$
$$y_j \geqslant 0,\ \ j = \overline{1,m}.$$

Двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за наступними правилами:

1) кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;

2) кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі. Кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі;

3) якщо у прямій задачі цільова функція *максимізується,* то у двоїстій — *мінімізується* і навпаки;

4) коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі;

5) вільними членами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних прямої задачі.

Двоїсті пари задач лінійного програмування можуть бути *симетричними* та *несиметричними*. У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задачі представлені нерівностями, а змінні можуть набувати тільки невід'ємних значень. У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути подані рівняннями, а двоїстої — лише нерівностями, при цьому змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких (у тому числі і від'ємних значень).

У таблиці 1.1 наведені можливі форми прямих та двоїстих задач лінійного програмування.

Зв'язок між прямою та двоїстою задачами визначається наступними теоремами двоїстості.

Теорема 1. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача теж має оптимальний план, причому значення цільових функцій обох задач співпадають. Якщо ж цільова функція однієї задачі є необмеженою, то друга задача немає жодного допустимого рішення.

Теорема 2. Якщо в результаті рішення прямої задачі її деяке i-те обмеження виконується як строга рівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Теорема 3. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, що зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Тобто, відповідна додатна оцінка двоїстої задачі показує приріст цільової функції прямої задачі, якщо запас дефіцитного ресурсу збільшиться на одну одиницю.

Таблиця 1.1 — Можливі форми прямої та двоїстої задач

Пряма задача	Двоїста задача
Симетричні задачі	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max;$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i\ ;$ $x_j \geqslant 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \min;$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j\ ;$ $y_i \geqslant 0.$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i\ ;$ $x_j \geqslant 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j\ ;$ $y_i \geqslant 0.$
Несиметричні задачі	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \max$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ;$ $x_j \geqslant 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \min$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j.$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Rightarrow \min$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ;$ $x_j \geqslant 0.$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Rightarrow \max$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j.$

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі визначається за співвідношенням

$$Y^* = C' \times D^{-1},$$

де C' — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані;

D^{-1} — матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких взяті з початкового опорного плану задачі.

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Для пакування виробів на складі готової продукції підприємства використовуються однотипні рулони паперу, які необхідно розрізати на заготовки двох видів (I та II) у заданій кількості. Кількість заготовок, що отримують за чотирма (1–4) різними варіантами розкрою рулонів та відходи паперу за цими варіантами подані у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 — Варіанти розкрою рулонів паперу

Вид заготовки	Кількість заготовок, отриманих за варіантами розкрою, *од.*				Потреба у заготовках, *од.*
	1	2	3	4	
I	a_{11}	–	a_{13}	a_{14}	b_1
II	–	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2
Відходи паперу, $см^2$	c_1	c_2	c_3	c_4	

Сформулювати пряму та двоїсту задачі побудови оптимального плану розкрою рулонів паперу. Розв'язати двоїсту задачу графічним методом, та знайти розв'язок прямої задачі, використовуючи другу теорему двоїстості.

Вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи 1

Вар.	a_{11}	a_{13}	a_{14}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_1	b_2	c_1	c_2	c_3	c_4
1	6	5	2	4	1	4	64	92	20	25	20	15
2	5	4	3	6	2	6	80	70	20	15	20	30
3	5	3	2	8	6	7	80	60	20	30	15	30
4	8	6	3	5	2	3	64	85	22	18	27	20
5	9	6	1	5	2	4	60	75	18	8	15	10
6	4	2	3	8	5	2	52	80	15	10	20	15
7	8	7	2	6	2	4	70	60	20	14	25	12
8	6	5	4	5	1	3	50	90	20	30	15	30
9	10	8	3	7	2	5	96	60	25	15	22	12
10	10	8	4	8	2	6	80	60	26	16	18	15
11	8	4	3	12	8	9	84	40	15	25	19	20
12	4	2	1	5	2	3	46	30	25	25	20	15
13	6	5	4	5	1	2	60	82	15	8	12	15
14	7	2	5	3	2	1	56	90	12	16	20	15
15	5	4	3	10	2	4	40	60	18	12	12	15
16	9	6	5	7	2	4	60	76	20	18	12	20
17	15	10	6	10	5	8	90	75	18	15	14	18
18	8	5	2	6	3	4	86	60	20	25	25	15
19	5	3	2	9	5	7	50	75	15	8	10	12
20	12	10	5	6	5	4	60	48	15	18	20	15
21	8	6	3	10	5	8	80	60	25	28	20	20
22	3	2	1	12	10	8	60	30	25	18	24	20
23	8	6	5	5	3	2	30	70	15	20	18	15
24	9	2	5	5	4	2	40	61	24	22	28	15
25	7	5	6	5	2	1	60	40	13	16	15	9
26	5	4	3	3	1	2	60	42	23	18	15	19
27	10	8	5	5	1	3	72	49	15	10	12	14
28	9	2	5	6	4	3	84	45	25	15	12	14
29	11	8	6	8	2	4	88	62	24	18	12	15
30	13	5	3	7	5	6	50	71	14	10	8	12

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за вихідних даних, наведених у таблиці 1.4.

Таблиця 1.4 — Вихідні дані задачі

Вид заготовки	Кількість заготовок, отриманих за варіантами розкрою, *од.*				Потреба у заготовках, *од.*
	1	2	3	4	
I	5	–	4	2	80
II	–	7	1	4	60
Відходи паперу, $см^2$	25	15	25	12	

Розв'язок.

Складемо математичну модель задачі. Нехай x_i ($i = \overline{1,4}$) кількість рулонів, що розкроюються за i-м варіантом. Тоді, за умовою задачі, необхідно мінімізувати відходи від розкрою паперу

$$Z = 25x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 12x_4 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

– на заданий план виходу заготовок кожного виду

$$5x_1 + 4x_3 + 2x_4 \geqslant 80;$$
$$7x_2 + x_3 + 4x_4 \geqslant 60.$$

– на невід'ємність змінних задачі

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Запишемо для цієї прямої задачі двоїсту.

Максимізувати

$$F = 80y_1 + 60y_2 \Rightarrow \max,$$

при обмеженнях

$$5y_1 \leqslant 25;$$
$$7y_2 \leqslant 15;$$
$$4y_1 + y_2 \leqslant 25;$$
$$2y_1 + 4y_2 \leqslant 12;$$
$$y_1 \geqslant 0; \quad y_2 \geqslant 0.$$

Двоїста задача має дві незалежні змінні, тому може бути розв'язана графічним методом. Розв'язок двоїстої задачі графічним методом наведено на рис. 1.1.

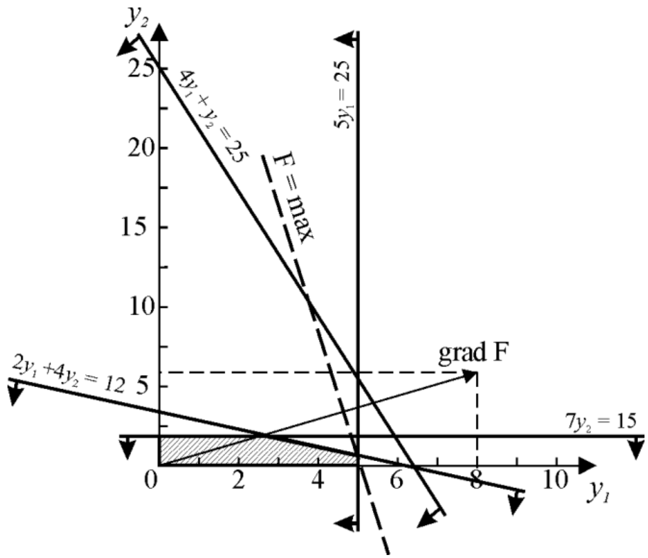

Рисунок 1.1 — Розв'язування двоїстої задачі графічним методом

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі досягається у точці перетину прямих

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 12; \\ 5y_1 = 25. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо оптимальний план двоїстої задачі:

$$y_1 = 5; \quad y_2 = 0{,}5; \quad F_{\max} = 430.$$

Знайдемо оптимальний план прямої задачі, використовуючи другу теорему двоїстості.

Підставимо оптимальні значення змінних двоїстої задачі до її системи обмежень та перевіримо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{array}{ll} (1) & 5 \cdot 5 = 25; \\ (2) & 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5 \neq 15; \\ (3) & 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0{,}5 = 20{,}5 \neq 25; \\ (4) & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0{,}5 = 12; \end{array}$$

Таким чином бачимо, що друге та третє обмеження двоїстої задачі виконуються як нерівності. З цього, на підставі другої теореми двоїстості, робимо висновок, що *друга* та *третя* змінна оптимального плану прямої задачі дорівнюють *нулю*. Далі, оскільки всі компоненти оптимального плану двоїстої задачі є додатними, то обидва обмеження оптимального плану прямої задачі виконуються як строгі рівняння.

Покладаючи $x_2 = 0$ та $x_3 = 0$ у системі обмежень прямої задачі та замінивши знаки нерівностей на знаки рівностей отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_4 = 80; \\ 4x_4 = 60. \end{cases}.$$

Звідки знаходимо оптимальний розв'язок прямої задачі:

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 15; \quad Z_{\min} = 430.$$

Таким чином, необхідно розкроїти 10 рулонів паперу за першим варіантом та 15 рулонів паперу за четвертим варіантом. При цьому мінімальна кількість відходів складе 430 $см^2$.

Контрольні запитання

1. У чому полягає сутність двоїстості у лінійному програмуванні?

2. Які двоїсті задачі називають *симетричними*, а які — *несиметричними*? У чому полягає їх відмінність?

3. Як визначається кількість змінних та обмежень двоїстої задачі у відповідності до прямої задачі?

4 Сформулюйте теореми двоїстості.

5 Сформулюйте правила побудови двоїстих задач лінійного програмування.

6 Запишіть всі види прямих та двоїстих задач.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Мета роботи: вивчення алгоритму розв’язування задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

Стисла теоретична довідка

Алгоритм двоїстого симплекс-методу витікає з теорем двоїстості. При його застосування, у порівнянні зі звичайним симплекс-методом, не висувається вимога щодо додатних значень базисних змінних у початковому опорному плані задачі, але для задачі *мінімізації* необхідно, щоб всі коефіцієнти при змінних цільової функції були *невід’ємними*. Тобто, у стовпчику C вільних членів симплекс-таблиці *допустимі від’ємні значення базисних змінних*, при цьому *всі значення індексного рядка повинні бути невід’ємними*.

Процедура *двоїстого симплекс-методу* полягає виконанні наступних кроків:

1) *перевірка поточного опорного плану задачі на оптимальність*. Якщо всі базисні змінні *невід’ємні*, то даний опорний

план є *оптимальним* розв'язком задачі і процес рішення припиняється. Інакше виконують крок 2;

2) *знаходження змінної для виключення з базису*. Відшукують найменшу від'ємну базисну змінну. Рядок, що відповідає цій змінній, називається *провідним рядком*, а базисна змінна, що відповідає цьому рядку, у наступному опорному плані задачі стане небазисною;

3) *знаходження змінної для включення до базису*. У провідному рядку відшукують від'ємні значення. Якщо не знайдено жодного від'ємного значення, то не існує жодного допустимого плану задачі і розв'язок припиняється. Якщо від'ємних значень декілька, то вибирається стовпчик, у якому досягається найменше за абсолютною величиною відношення числа з індексного рядка до цих значень. Знайдений таким чином стовпчик називається *провідним стовпчиком*, а вільна змінна, що відповідає цьому стовпчику, у наступному опорному плані стане базисною. На перетині провідного рядка та провідного стовпчика знаходиться *провідний елемент*.

4) *побудова нового опорного плану задачі*. Виконується аналогічно симплекс-перетворенням звичайного симплекс-методу.

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Для перевезення вантажів за трьома маршрутами (I–III) автотранспортне підприємство може використати чотири типи автомобілів (ГАЗ–53, ЗІЛ–4315, КАМАЗ–5320, КАМАЗ–53212). Мінімальний змінний обсяг перевезення вантажів на маршрутах, продуктивність транспортних засобів та витрати на експлуатацію автомобілів кожного типу наведені у таблиці 2.1.

Визначити, яку кількість автомобілів кожного типу необхідно використати на перевезеннях з метою досягнення мінімальних сумарних витрат на змінну експлуатацію рухомого складу. Вважати, що парк автомобілів достатній для виконання обсягів перевезень.

Таблиця 2.1 — Вихідні дані

<table>
<tr><th rowspan="2">Маршрут</th><th colspan="4">Змінна продуктивність автомобіля на перевезеннях, т</th><th rowspan="2">Змінний обсяг перевезень, т</th></tr>
<tr><th>ГАЗ–53</th><th>ЗІЛ–4315</th><th>КАМАЗ–5320</th><th>КАМАЗ–53212</th></tr>
<tr><td>I</td><td>p_{11}</td><td>p_{12}</td><td>p_{13}</td><td>p_{14}</td><td>250</td></tr>
<tr><td>II</td><td>p_{21}</td><td>p_{22}</td><td>p_{23}</td><td>p_{24}</td><td>120</td></tr>
<tr><td>III</td><td>p_{31}</td><td>p_{32}</td><td>p_{33}</td><td>p_{34}</td><td>175</td></tr>
<tr><td>Змінні витрати на експлуатацію автомобіля, грн.</td><td>175</td><td>210</td><td>250</td><td>275</td><td></td></tr>
</table>

Вихідні дані для виконання роботи по варіантах наведені у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи 2

Вар.	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
1	16	20	25	35	10	12	14	15	14	15	18	25
2	11	15	16	18	5	8	10	12	6	9	11	14
3	20	24	30	32	10	16	18	20	12	15	18	24
4	24	24	25	27	15	16	17	22	14	15	16	26
5	8	15	27	34	9	12	15	16	10	14	15	18
6	22	25	34	34	11	12	14	15	15	19	20	21
7	25	28	32	32	14	14	15	20	14	15	20	25
8	15	24	30	32	10	11	12	16	14	16	22	26
9	24	28	35	38	14	18	20	20	16	18	24	30
10	20	24	25	27	10	16	17	20	12	15	16	22
11	14	22	24	26	8	10	20	22	20	20	25	26
12	10	20	25	27	11	12	16	21	12	15	16	20
13	12	16	24	25	10	14	15	20	11	12	14	22
14	14	28	32	35	10	15	18	24	14	16	22	26
15	22	25	34	35	11	12	14	16	15	19	20	24
16	10	15	27	34	10	12	15	16	12	14	15	18

Продовження таблиці 2.2

Вар.	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
17	16	20	22	25	8	10	14	18	10	12	15	20
18	11	13	15	20	7	9	13	15	8	11	12	13
19	12	14	17	24	8	12	14	14	9	12	15	16
20	22	24	25	27	9	20	32	34	7	10	15	20
21	15	24	38	42	14	15	15	16	18	20	22	32
22	14	15	20	22	8	15	15	18	9	12	12	15
23	22	24	32	34	11	14	15	16	15	19	20	21
24	22	25	34	35	11	12	15	16	15	19	24	24
25	12	12	14	16	10	14	15	18	8	11	12	15
26	8	12	15	26	15	16	16	22	9	11	14	15
27	26	30	35	45	14	15	17	20	15	20	22	32
28	11	12	15	18	15	16	16	22	5	9	10	11
29	22	25	32	34	11	12	14	15	15	19	20	21
30	14	15	21	25	10	12	15	18	9	12	14	15

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для вихідних даних, заданих у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 — Вихідні дані (приклад)

Маршрут	Змінна продуктивність автомобіля на перевезеннях, *т*				Змінний обсяг перевезень, *т*
	ГАЗ–53	ЗІЛ–4315	КАМАЗ–5320	КАМАЗ–53212	
I	15	19	24	26	250
II	8	10	11	14	120
III	12	14	18	21	175
Змінні витрати на експлуатацію автомобіля, *грн*.	175	210	250	275	

Розв'язок.

Позначимо як x_i — кількість автомобілів i-го типу, що використовуються для виконання перевезень. Тоді економіко-математична модель задачі матиме вигляд:

мінімізувати змінні витрати на експлуатацію автомобілів

$$Z = 175x_1 + 210x_2 + 250x_3 + 275x_4 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях на планові мінімальні обсяги перевезень

$$\begin{cases} 15x_1 + 19x_2 + 24x_3 + 26x_4 \geqslant 250; \\ \;\;8x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 14x_4 \geqslant 120; \\ 12x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 21x_4 \geqslant 175; \end{cases}$$

та умову невід'ємності змінних задачі

$$x_i \geqslant 0, \;\; i = \overline{1,4}.$$

Для застосування симплекс-методу зведемо задачу до канонічного виду:

мінімізувати

$$Z = 175x_1 + 210x_2 + 250x_3 + 275x_4 \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 15x_1 + 19x_2 + 24x_3 + 26x_4 - x_5 = 250; \\ \;\;8x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 14x_4 - x_6 = 120; \\ 12x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 21x_4 - x_7 = 175; \end{cases}$$
$$x_i \geqslant 0, \;\; i = \overline{1,7}.$$

Початкове базисне рішення

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; \quad x_5 = -250; \quad x_6 = -120; \quad x_7 = -175$$

є *недопустимим*, оскільки у ньому присутні змінні з від'ємними значеннями. Але, зважаючи на те, що всі коефіцієнти при змінних у цільовій функції є додатними, для даної задачі можна застосувати алгоритм двоїстого симплекс-методу. Для цього запишемо систему обмежень задачі у наступному вигляді.

$$\begin{cases} -15x_1 - 19x_2 - 24x_3 - 26x_4 + x_5 = -250; \\ \;\; - 8x_1 - 10x_2 - 11x_3 - 14x_4 + x_6 = -120; \\ -12x_1 - 14x_2 - 18x_3 - 21x_4 + x_7 = -175; \end{cases}$$

Складемо початкову симплекс-таблицю (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4 — Початкова симплекс-таблиця

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	–250	–15	–19	–24	–26	1	0	0
x_6	–120	–8	–10	–11	–14	0	1	0
x_7	–175	–12	–14	–18	–21	0	0	1
$-Z$	0	175	210	250	275	0	0	0

Оскільки у базисі наявні від'ємні значення, план не є оптимальним. Вибираємо для виключення з базису змінну x_5 , що має найменше від'ємне значення. Переглядаємо рядок x_5 і для всіх стовпчиків, що містять від'ємні значення знаходимо відношення елементу у індексному рядку до цих значень. Маємо:

стовпчик x_1 : 175/(–15) = –11,67;
стовпчик x_2 : 210/(–19) = –11,05;
стовпчик x_3 : 250/(–24) = –10,42;
стовпчик x_4 : 275/(–26) = –10,58.

Найменше за абсолютною величиною значення досягається у стовпчику x_3 , тому цей стовпчик буде провідним, а змінну x_3 включаємо до базису.

Проводячи звичайні симплекс-перетворення отримуємо наступний опорний план задачі (таблиця 2.5).

Таблиця 2.5 — Новий опорний план задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	10,42	0,625	0,792	1	1,083	0,042	0	0
x_6	–5,42	–1,125	–1,292	0	–2,083	–0,458	1	0
x_7	12,5	–0,75	0,25	0	–1,50	–0,75	0	1
$-Z$	–2604,2	18,75	12,083	0	4,167	10,41	0	0

Цей опорний план задачі не є оптимальним, оскільки в базисі присутня від'ємна змінна x_6. Провідним рядком на цій ітерації буде рядок x_6 , провідним стовпчиком — стовпчик x_4 (для нього досягається найменше за абсолютною величиною відношення значення індексного рядка до значення у провідному рядку x_6 (4,167 / (–2,083) = –2). Новий опорний план задачі показаний у таблиці 2.6.

Таблиця 2.6 – Оптимальний план задачі

Базис	C	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	7,60	0,04	0,12	1	0	–0,20	0,52	0
x_4	2,60	0,54	0,62	0	1	0,22	–0,48	0
x_7	16,40	0,06	1,18	0	0	–0,42	–0,72	1
$-Z$	–2615	16,50	9,50	0	0	9,50	2,00	0

У базисі отриманого опорного плану немає змінних, що є від'ємними. Таким чином, отриманий оптимальний план задачі:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 7{,}6; \quad x_4 = 2{,}6; \quad Z_{\min} = 2615.$$

Тобто, необхідно на виконання перевезень необхідно виділити $x_3 = 7{,}6 \approx 8$ автомобілів КАМАЗ–5320 та $x_4 = 2{,}6 \approx 3$ автомобіля КАМАЗ–53212. При цьому змінні витрати на експлуатацію парку складуть приблизно 2615 *грн*. Зауважимо, що зважаючи на достатньо великі значення змінних задачі, округлення їх до цілого числа є виправданим.

Контрольні запитання

1. Які умови у задачі лінійного програмування повинні бути виконані для застосування при її рішенні двоїстого симплекс-методу?
2. Сформулюйте ознаку оптимальності опорного плану при рішенні задачі двоїстим симплекс-методом.
3. Як у двоїстому симплекс-методі обирається змінна, що включається до базису та змінна, що виключається з базису?
4. Викладіть двоїстий симплекс-алгоритм.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

Мета роботи: вивчення алгоритму розв'язування задачі пошуку найкоротшого кільцевого маршруту методом «відгалужень і меж».

Стисла теоретична довідка

Класична задача комівояжера полягає у наступному. Задана транспортна мережа, що з'єднує n пунктів (міст). Комівояжеру необхідно, виїхавши з деякого пункту, побувати у кожному з інших пунктів по одному разу та повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут руху, якщо задана матриця найкоротших відстаней між пунктами мережі.

Позначивши:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо комівояжер переїжджає з пункту } i \text{ до пункту } j; \\ 0, & \text{у супротивному разі.} \end{cases}$$

Тоді математична постановка задачі має вигляд:

мінімізувати довжину маршруту комівояжера

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min,$$

де c_{ij} — відстань між пунктами i та j;
за обмежень:
одноразового в'їзду до кожного пункту

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ (j = \overline{1,n}; \ \ j \neq j);$$

одноразового виїзду з кожного пункту

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ (i = \overline{1,n}; \ \ j \neq j);$$

заборони розриву маршрутів на декілька замкнених ізольованих підмаршрутів

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n - 1 \ \ (i = \overline{1,n}; \ \ j = \overline{1,n}; \ \ j \neq j; \ \ u_i \geqslant 0; \ \ u_j \geqslant 0).$$

Поставлена задача є задачею цілочислового програмування. Найбільш ефективним з методів її рішення є метод «відгалужень і меж». Загальна ідея методу «відгалужень і меж» полягає у наступному.

Спочатку для всієї множини припустимих розв'язків задачі визначається *нижня* межа довжини будь-якого з маршрутів. Ця межа є числом, менше якого значення довжини маршруту (цільової функції) заздалегідь бути не може. Потім вся множина припустимих розв'язків задачі розбивається на декілька непустих підмножин, для кожної з них знову визначається нижня межа довжини маршрутів. Серед всіх підмножин вибирається підмножина *з найменшим значенням нижньої межі* і знову розбивається на дві непусті підмножини, для яких знову визначається *нижня межа* і так далі.

Оскільки множина припустимих розв'язків задачі є скінченою, такий процес послідовного розбиття приводить до множини з одного єдиного розв'язку, *нижня межа* для якого співпадає зі значенням цільової функції для цього розв'язку. Якщо це значення *не більше нижніх* меж всіх нерозбитих підмножин, то маємо *один з кращих розв'язків*, а якщо значення цільової функції для знайденого розв'язку *строго менше* за *нижню* межу нерозбитих підмножин, то маємо *єдиний оптимальний розв'язок*.

Розв'язання задачі включає ряд послідовних операцій.

1. *Зведення матриці найкоротших відстаней*. Послідовно проглядають *рядки* матриці і в кожному з них відшукують *мінімальний* елемент. Цей елемент називається *константою* зведення. Потім з усіх елементів рядка *віднімається* константа зведення даного рядка. В отриманій після цього матриці аналогічно проглядаються *стовпці*, в яких також відшукується константа зведення. Ці константи віднімаються від всіх елементів відповідних стовпців. Отримана після цієї операції матриця називається *зведеною* і набуває наступної властивості: *у будь-якому рядку і будь-якому стовпці матриці міститься не менше одного нульового елемента*.

2. *Визначення нижньої межі характеристики* (*довжина, час*) *для всіх маршрутів — кореня «дерева»*. Оскільки маршрут повинен пройти через всі пункти, то до кожного пункту входять і з кожного пункту виходять якнайменше один раз (маршрут кільцевий). Це твердження рівнозначне такому: до кожного пункту входять точно один раз і один раз залишають його, тобто з *кожного рядка і кожного стовпця матриці буде вибраний точно один елемент*.

Звідси витікає, що будь-який маршрут не може бути меншим, ніж сума найменших елементів у всіх рядках і стовпцях матриці найкоротших відстаней, тобто значення нижньої межі для всіх маршрутів дорівнює

$$W(u) = \sum_{i=1}^{n} h_i + \sum_{j=1}^{n} h_j,$$

де h_i і h_j — константи зведення відповідно рядків і стовпців.

3. *Визначення оцінок для всіх нульових елементів.* Спочатку проглядають рядок, в якому знаходиться оцінюваний нульовий елемент, і серед його елементів (*за виключенням оцінюваного*) відшукують елемент з мінімальним значенням $a_{\min i}$. Потім аналогічним чином проглядають стовпець, в якому знаходиться оцінюваний елемент. У цьому стовпці серед елементів (*за виключенням оцінюваного*) відшукують мінімальний $b_{\min j}$. Оцінка розглядуваного елементу дорівнює $\alpha_{ij} = a_{\min i} + b_{\min j}$.

4. *Вибір пари пунктів для включення до маршруту.* До маршруту включається пара пунктів (k, l) з *максимальною* оцінкою нульового елемента.

5. *Блокування елементів матриці.* Під блокуванням розуміється заборона вибору деякого елемента (пари), який може призвести до передчасного зациклювання маршруту. Блокування проводиться на кожному етапі розв'язування задачі. При виборі пари (q, p), яку необхідно заблокувати (заборонити включення до маршруту), можливі такі випадки (рис. 3.1).

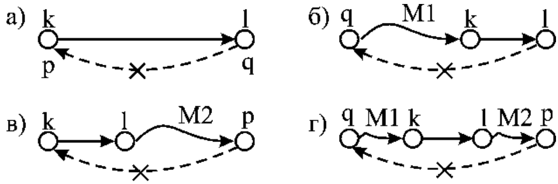

Рисунок 3.1 — Варіанти блокування пар пунктів

На рис. 3.1 заблоковані пари пунктів, які не включаються до маршруту на наступному етапі розрахунків, позначені пунктиром і перекреслені.

У випадку рис. 3.1, *а* пара (q, p) має зворотну схему нумерації по відношенню до пари (k, l). Наприклад, пари (1, 2) і (2, 1) утворюють циклічний маршрут (1–2–1). Пара (q, p) блокується.

У випадку рис. 3.1, *б* обрана на даному кроці розв'язування пара (k, l) є продовженням фрагменту маршруту M1 з початковим пунктом q і кінцевим k. Тут пара (k, l) продовжує цей фрагмент маршруту до пункту l. Для виключення передчасного зациклювання маршруту у подальшому необхідно заблокувати пару (l, q). Наприклад, до поточного кроку у розв'язок вже була введена пара (2, 3) і на даному кроці в розв'язок вводиться пара (3, 5). Тоді в проміжній зведеній матриці при переході до наступного кроку необхідно заблокувати пару (5, 2), так як у подальшому це призведе до замкненого маршруту (2–3–5–2), що є неприпустимим.

У випадку рис. 3.1, *в* пара (k, l) додається до початку деякого вже вибраного раніше фрагмента маршруту М2, що починається в пункті l і закінчується в пункті p. На цьому кроці блокується пара (k, l), а номер пункту k буде відповідати номеру q блокованої пари. Наприклад, нехай до даного кроку в розв'язок вже введено пару (2, 4). На цьому етапі до розв'язку вводиться пара (1, 2). Для попередження передчасного зациклювання маршруту у подальшому слід заблокувати пару (4, 1), введення якої призводить до утворення замкненого маршруту (1–2–4–1).

У випадку рис. 3.1, *г* пара (k, l) з'єднує два фрагменти М1 і М2 деякого маршруту. Наприклад, нехай до даного кроку до розв'язку вже включені пари (3, 4) і (5, 6). До розв'язку на даному кроці вводиться пара (4, 5). Для виключення утворення замкненого маршруту за схемою (3–4–5–6–3) слід заблокувати пару (6, 3).

Результати розрахунків на кожному кроці фіксуються на графічній моделі дерева пошуку рішення. На гілках дерева вказують обрану для відгалуження пару пунктів та нижню межу множини маршрутів, що відповідають цій парі.

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Розв'язати задачу комівояжера для заданої матриці найкоротших відстаней між $n = 8$ пунктами транспортної мережі методом «відгалужень і меж».

Вихідні дані до виконання роботи по варіантах наведені у таблицях 3.1–3.2.

Таблиця 3.1 — Вихідні дані до виконання самостійної роботи 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	10	4	7	9	4	10	5	5	4
2	5	5	6	6	6	9	6	5	2	7
3	9	8	7	3	4	5	7	7	9	4
4	4	3	10	5	4	6	4	2	9	9
5	9	2	9	5	10	9	4	7	8	1
6	5	3	2	6	4	9	4	7	7	2
7	3	4	5	8	3	10	2	3	8	9
8	10	10	8	10	6	7	8	10	5	7
9	4	2	9	4	10	8	9	7	9	7
10	10	2	4	4	3	5	10	9	4	4

Таблиця 3.2 — Варіанти матриці найкоротших відстаней

Вар.	Номери рядків	Номери стовпчиків	Вар.	Номери рядків	Номери стовпчиків
1	1–8	1–8	16	2–5, 7–10	2–5, 7–10
2	2–9	2–9	17	1–5, 8–10	1–5, 8–10
3	3–10	3–10	18	1–7, 10	1–7, 10
4	1–8	2–9	19	1–4,6,7,9,10	1–4,6,7,9,10
5	1–8	3–10	20	1–3,5–8,10	1–3,5–8,10
6	2–9	3–10	21	2–4, 6–10	2–4, 6–10
7	2–9	1–8	22	1–6, 8, 10	1–6, 8, 10
8	3–10	1–8	23	1, 3–5, 7–10	1, 3–5, 7–10
9	3–10	2–9	24	1,2, 4–8, 10	1,2, 4–8, 10
10	1, 3–9	1, 3–9	25	1, 3–9	2–7, 9–10
11	1, 3–8, 10	1, 3–8, 10	26	1–3, 6–10	1–7, 10
12	1, 3, 5–10	1, 3, 5–10	27	1–3, 5, 7–10	2–4, 6–10
13	2–7, 9–10	2–7, 9–10	28	3–10	1–4,6,7,9,10
14	1–3, 6–10	1–3, 6–10	29	1–8	1–6, 8, 10
15	1–3, 5, 7–10	1–3, 5, 7–10	30	1–5, 8–10	3–10

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для вихідних даних, заданих у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	■	3	5	6	7	8	11	10	5
2	3	■	2	3	4	5	8	7	5
3	4	1	■	4	2	4	6	5	3
4	6	3	5	■	4	2	8	7	8
5	10	7	9	4	■	2	4	3	8
6	8	5	7	2	2	■	6	5	10
7	9	6	8	3	4	1	■	4	9
8	10	9	8	7	3	5	4	■	5
9	5	4	3	7	5	7	9	6	■

Оскільки вихід комівояжера з деякого пункту і негайне повернення до нього не має сенсу, то всі діагональні елементи матриці заштриховані (заблоковані).

Хід розв'язку будемо ілюструвати деревом, на гілках якого розташовуються множини допустимих розв'язків. Кожну множину будемо називати вершиною (дерева) і позначати кружечком, в середині якого записують ознаку, яка об'єднує всі розв'язки даної множини. Поряд з кружечком будемо ставити значення нижньої межі для розв'язків даної множини.

Розв'язок.

Визначення оцінки «кореня дерева» розв'язків. Виконуємо зведення матриці найкоротших відстаней, для чого у кожному рядку матриці відшукуємо мінімальні елементи (*константи зведення*) і віднімаємо їх з всіх елементів цього рядка. Результат цієї операції, застосований до вихідної матриці (таблиця 3.3), показано в таблиці 3.4. Величину *константи зведення* проставляємо праворуч біля кожного рядка. Після зведення *по рядках* зробимо аналогічне зведення отриманої матриці *по стовпцях* (табл. 3.5). Константи зведення проставляємо у нижній частині таблиці.

Таблиця 3.4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		0	2	3	4	5	8	7	2	*3*
2	1		0	1	2	3	6	5	3	*2*
3	3	0		3	1	3	5	4	2	*1*
4	4	1	3		2	0	6	5	6	*2*
5	8	5	7	2		0	2	1	6	*2*
6	6	3	5	0	0		4	3	8	*2*
7	8	5	7	2	3	0		3	8	*1*
8	7	6	5	4	0	2	1		2	*3*
9	2	1	0	4	2	4	6	3		*3*

Таблиця 3.5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		0^{0}	2	3	4	5	7	6	0^{0}	*3*
2	0^{1}		0^{0}	1	2	3	5	4	1	*2*
3	2	0^{0}		3	1	3	4	3	0^{0}	*1*
4	3	1	3		2	0^{1}	5	4	4	*2*
5	7	5	7	2		0^{0}	1	$\boxed{0^{2}}$	4	*2*
6	5	3	5	0^{1}	0^{0}		3	2	6	*2*
7	7	5	7	2	3	0^{2}		2	6	*1*
8	6	6	5	4	0^{0}	2	0^{1}		0^{0}	*3*
9	1	1	0^{1}	4	2	4	5	2		*3*
	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*2*	

На основі обчисленої суми констант зведення (19+5)=24, можемо стверджувати, що жоден циклічний маршрут не може бути меншим за довжиною ніж 24 одиниці.

Сума констант зведення (24) і є нижньою межею довжини всіх маршрутів, що і зафіксуємо, поставивши цифру 24 біля позначення кореня дерева розв’язків (рис. 3.2) «всі маршрути».

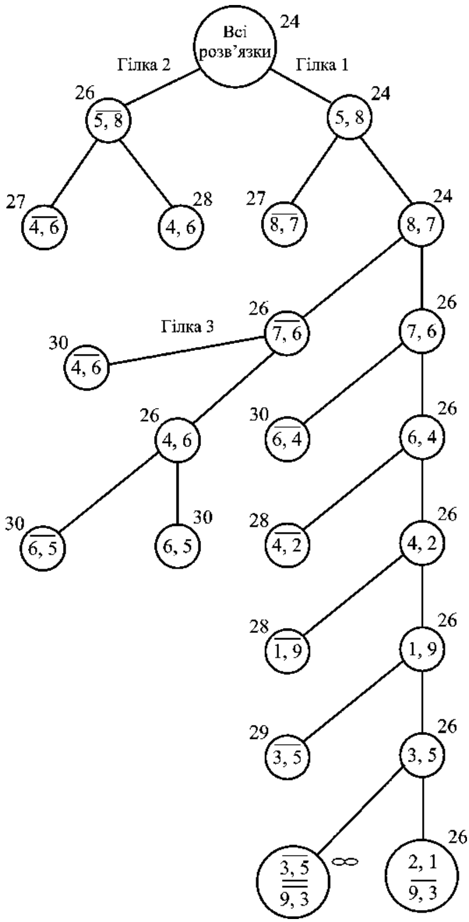

Рисунок 3.2 — Дерево пошуку розв’язків задачі

Після зведення матриця має *хоча б один нуль* в кожному рядку і в кожному стовпці. Надалі будемо будувати циклічний маршрут згідно з матрицею, наведеною в таблиці 3.5.

Визначення оцінки для нульових елементів зведеної матриці (таблиця 3.5). Визначимо, наприклад, оцінку нульового елемента (1, 2). У першому рядку мінімальне значення елемента (за виключенням оцінюваного) дорівнює $a_{\min} = 0$ в клітинці (1, 9). У стовпці 2 мінімальне значення елемента $b_{\min} = 0$ знаходимо в клітинці (3, 2). Тоді оцінка нульового елемента в розглядуваній клітинці (1, 2) складає $\alpha_{12}^{0} = 0 + 0 = 0$. Таку операцію виконують для всіх нульових елементів зведеної матриці.

Значення оцінок проставляємо у правому верхньому куті кожної клітинки, де є нульовий елемент. Серед множини оцінок нульових елементів відшукуємо *максимальну*, згідно з якою визначаємо пару пунктів, що включаються до маршруту.

В таблиці 3.5 максимальну оцінку в 2 одиниці мають пари (5, 8) і (7, 6). Першою до шуканого маршруту включаємо пару (5, 8). Цей елемент в матриці виділяємо рамкою.

Далі поділимо множину всіх маршрутів на дві: маршрути *першої* множини будуть обов'язково включати пару (5, 8), а маршрути *другої* множини обов'язково не включатимуть цю пару. Очевидно, цей розподіл є розбиттям, так як сума першої і другої множини утворює множину всіх маршрутів, а перехрещення цих маршрутів є порожнім.

Позначимо *першу* множину кружечком з записом прийнятої пари (5, 8) всередині, а *другу* множину позначимо кружечком з записом ($\overline{5,8}$), що буде означати відсутність пари (5, 8) в маршрутах цієї множини.

Нижня межа для маршрутів другої множини визначиться сумою нижньої межі для множини «всі маршрути» та величини оцінки пари (5, 8): 24+2=26. Так як після вибору пари (5, 8) ми використали виїзд з пункту 5 і в'їзд до пункту 8, то рядок 5 і стовпець 8 можна виключити з подальшого розгляду. Вилучаємо з матриці рядок 5 і стовпець 8.

Виконуємо операцію *блокування*. Оскільки необхідно побудувати циклічний маршрут обходу всіх дев'яти пунктів із заходом до кожного пункту тільки один раз, вибір пари (8, 5) після вибору пари (5, 8) призведе до порушення умови задачі. Тому вибір пари (8, 5) блокуємо заміною значення відповідного елемента на заштриховану клітинку.

Після блокування матриця знову зводиться і сума нових констант зведення, додана до нижньої межі для вершини «всі маршрути», дає величину нижньої межі (рис. 3.2) величиною в 24 одиниці для множини, позначеної (5, 8). Матриця після цієї операції показана в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6.

	1	2	3	4	5	6	7	9	
1	■	0^{0}	2	3	4	5	7	0^{0}	*0*
2	0^{1}	■	0^{0}	1	2	3	5	1	*0*
3	2	0^{0}	■	3	1	3	4	0^{0}	*0*
4	3	1	3	■	2	0^{1}	5	4	*0*
6	5	3	5	0^{1}	0^{1}	■	3	6	*0*
7	7	5	7	2	3	0^{2}	■	6	*0*
8	6	6	5	4	■	2	$\boxed{0^{3}}$	0^{0}	*0*
9	1	1	0^{1}	4	2	4	5	■	*0*
	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	

На цьому етапі найменшу нижню межу 24 має вершина (5, 8). Відповідну множину розв'язків знову розділимо аналогічним прийомом. Визначимо оцінки нульових елементів в зведеній матриці (таблиця 3.6). Максимальну оцінку 3 тепер має елемент в рядку 8 і стовпці 7. Організуємо дві підмножини (рис. 3.2) маршрутів: *першу*, що включає пару (5, 8) і не включає пару (8, 7); *другу*, що включає і пару (5, 8), і пару (8, 7). Перша підмножина буде мати нижню межу 24+3=27.

Для визначення нижньої межі другої множини викреслимо рядок 8 і стовпець 7. Після вибору пари (5, 8) і (8, 7) небезпека передчасного зациклення маршруту реалізується при виборі пари (7, 5). Блокуванням забороняємо вибір цієї пари і проводимо зведення отриманої матриці (таблиця 3.7). Сума констант зведення дорівнює нулю і тому нижня межа для підмножини (8, 7) залишається рівною 24.

Таблиця 3.7.

	1	2	3	4	5	6	9	
1		0^{0}	2	3	4	5	0^{0}	*0*
2	0^{1}		0^{0}	1	2	3	1	*0*
3	2	0^{0}		3	1	3	0^{0}	*0*
4	3	1	3		2	0^{1}	4	*0*
6	5	3	5	0^{1}	0^{1}		6	*0*
7	7	5	7	2		0^{2}	6	*0*
9	1	1	0^{1}	4	2	4		*0*
	0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	

За описаними вище прийомами вибираємо пару (7,6). Виділяємо знову дві підмножини: ($\overline{7,6}$) і (7, 6). Перша підмножина ($\overline{7,6}$) має нижню межу 24+2=26.

Викреслюємо рядок 7 і стовпчик 6, після чого зводимо матрицю (таблиця 3.8). У подальшому зациклення можливе при виборі пари (6, 5), тому цю пару в новій таблиці блокуємо. Сума констант зведення дорівнює 2, а нижня межа множини (7, 6) дорівнює 24+2=26.

До розв’язання включаємо пару (6, 4) з блокуванням пари (4, 5) і розділяємо підмножину (6, 4). Відповідна цьому етапу розрахунків матриця наведена в таблиці 3.9.

Вибираємо пару (4, 2). На цьому етапі блокується пара

(2, 5). Результативна матриця наведена в табл. 3.10.

Таблиця 3.8.

	1	2	3	4	5	9	
1		0 $\boxed{0}$	2	3	3	0 $\boxed{0}$	*0*
2	0 $\boxed{1}$		0 $\boxed{0}$	1	1	1	*0*
3	2	0 $\boxed{0}$		3	0 $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	*0*
4	3	0 $\boxed{1}$	2		0 $\boxed{0}$	3	*1*
6	5	3	5	0 $\boxed{4}$		6	*0*
9	1	1	0 $\boxed{1}$	4	1		*0*
	0	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	

Таблиця 3.9.

	1	2	3	5	9	
1		0 $\boxed{0}$	2	3	0 $\boxed{0}$	*0*
2	0 $\boxed{1}$		0 $\boxed{0}$	1	1	*0*
3	2	0 $\boxed{0}$		0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	*0*
4	2	0 $\boxed{2}$	2		3	*0*
9	1	1	0 $\boxed{1}$	1		*0*
	0	*0*	*0*	*0*	*0*	

Розглядаємо пару (1, 9). Тут блокуємо пару (9, 1). У результаті розв'язання отримуємо таку матрицю (табл. 3.11).

До розв'язку включаємо пару (3, 5) з блокуванням пари (2, 3). Після чергового зведення приходимо до матриці розміром 2×2 (табл. 3.12).

За отриманою матрицею вибираємо дві останні пари у розв'язку задачі (2, 1) і (9, 3). У результаті отримуємо циклічний маршрут $R = \{1–2–3–9–5–4–6–7–8–1\}$ довжиною 26 одиниць.

Таблиця 3.10.

	1	3	5	9	
1		2	3	0 $\boxed{2}$	*0*
2	0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$		1	*0*
3	2		0 $\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	*0*
9	1	0 $\boxed{1}$	1		*0*
	0	*0*	*0*	*0*	

Таблиця 3.11

	1	3	5	
2	0 $\boxed{2}$	0 $\boxed{0}$		*0*
3	2		0 $\boxed{3}$	*0*
9		0 $\boxed{1}$	1	*0*
	0	*0*	*0*	

Таблиця 3.12

	1	3	
2	0		*0*
9		0	*0*
	0	*0*	

Так як довжина цього маршруту не перевищує нижньої межі будь-якого із розташованих ліворуч нерозділених вершин дерева розв’язків, то маємо маршрут мінімальної довжини і, таким чином, маємо розв’язок задачі.

У випадку, коли ставиться задача знайти всі оптимальні розв’язки, ці розв’язки слід відшукувати серед підмножин $(\overline{7,6})$ і $(\overline{5,8})$, так як тільки ці підмножини мають нижню межу, що не перевищує довжини оптимального розв’язку.

Почнемо з підмножини $(\overline{5,8})$. В цій підмножині містяться всі маршрути, які не включають пару (5, 8). Матриця найкоротших відстаней, яка відповідає цій підмножині може бути отримана із початкової матриці (таблиця 3.5) блокуванням елемента в рядку 5 і стовпці 8 (таблиця 3.13).

У подальшому, застосовуючи вже знайомі принципи зведеня матриці, визначення оцінок, вибору пари для розгалуження, викреслювання рядків і стовпців, блокування і знову зведення, отримуємо, що розбиття підмножини (5, 8) дає дві підмножини (4, 6) і $(\overline{4,6})$, нижні межі яких (27 і 28) перевищують довжину оптимального маршруту. Звідси робимо висновок, що серед розв’язків підмножини $(\overline{5,8})$ оптимальних немає.

Таблиця 3.13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		0^{0}	2	3	4	5	7	4	0^{0}	*3*
2	0^{1}		0^{0}	1	2	3	5	2	1	*2*
3	2	0^{0}		3	1	3	4	1	0^{0}	*1*
4	3	1	3		2	$\boxed{0^{1}}$	5	2	4	*2*
5	7	5	7	2		0^{0}	1		4	*2*
6	5	3	5	0^{1}	0^{0}		3	0^{0}	6	*2*
7	7	5	7	2	3	0^{2}		0^{0}	6	*1*
8	6	6	5	4	0^{0}	2	0^{1}		0^{0}	*3*
9	1	1	0^{0}	4	2	4	5	0^{0}		*3*
	1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*3*	*2*	

Тепер перевіримо підмножину $(\overline{7,6})$. Ця підмножина була отримана послідовним виділенням із множин розв’язків спочатку підмножини (5, 8), потім з останньої – підмножини (8, 7) і, нарешті, з підмножини (8, 7) була виділена підмножина $(\overline{7,6})$. Таким чином, матрицю найкоротших відстаней для підмножини $(\overline{7,6})$ можна отримати з початкової матриці для всіх розв’язків викреслюванням рядків 5 і 8, стовпців 8 і 7 та блокуванням елементів (7, 5) і (7, 6). Отримана після цього матриця наведена в таблиці 3.14.

Зведення отриманої матриці дає суму констант зведення 19. Для перевірки нижньої межі підмножини $(\overline{7,6})$ додаємо до цієї суми значення елементів (5,8) і (8,7) у початковій матриці (таблиця 3.5) для всієї задачі (19+3+4)=26. Отримане значення суми констант зведення підтверджує нижню межу підмножини (7, 6).

Таблиця 3.14

	1	2	3	4	5	6	9
1		3	5	6	7	8	5
2	3		2	3	4	5	5
3	4	1		4	2	4	3
4	6	3	5		4	2	8
6	8	5	7	2	2		10
7	9	6	8	3			9
9	5	4	3	7	5	7	

Далі застосуємо таку саму серію процедур, що і раніше, і отримуємо дві підмножини ($\overline{4,6}$) та (4,6) з нижніми межами 30 і 26. Тепер відшукуємо оптимальний розв'язок серед маршрутів підмножини (4,6). Розбиття цієї підмножини дає дві підмножини ($\overline{6,5}$) і (6,5) з однаковими нижніми межами по 30 одиниць. Після цього етапу не залишається жодної висячої вершини з нижньою межею, меншою або рівною довжині відомого оптимального розв'язку. Звідси доходимо висновку, що знайдений оптимальний розв'язок є єдиним.

Контрольні запитання

1. Дайте математичну постановку задачі комівояжера.
2. Поясніть операцію зведення матриці. Яку властивість має зведена матриця?
3. Що таке оцінка нульового елемента зведеної матриці і як вона визначається?
3. Як обирається пара пунктів для відгалуження?
4. Як визначається нижня межа для кожного відгалуження?
5. Для чого виконується операція блокування елементів матриці та у чому вона полягає?
6. Назвіть всі можливі види блокування елементів матриці.

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЗА КРИТЕРІЄМ ЧАСУ НА ПЕРЕВЕЗЕННЯ

Мета заняття: вивчення методу потенціалів для розв'язування транспортної задачі за критерієм часу на перевезення.

Стисла теоретична довідка

При перевезеннях вантажів, що швидко псуються, та деяких будівельних матеріалів виникає необхідність доставити вантаж у найбільш стислий термін. Математична постановка транспортної задачі за критерієм часу полягає у наступному.

Нехай є m пунктів зосередження вантажу (або пунктів виробництва) $A_1, A_2, \dots, A_m$, в яких розміщено однорідний вантаж у кількості $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць. Цей вантаж повинен бути доставлений у n пунктів споживання $B_1, B_2, \dots, B_n$ з обсягом попиту відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$. Передбачається, що можливе транспортування з кожного пункту постачання до кожного пункту споживання. Задані тривалості транспортування T_{ij} на доставку одиниці вантажу з пунктів A_i до пунктів B_j $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у складанні такого плану перевезень, який забезпечує виконання наступних умов:

1) запаси кожного постачальника повинні бути повністю вивезені;

2) попит всіх пунктів споживання повинен бути задоволений за рахунок розподілу всього запасу вантажів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

3) максимальна тривалість транспортування вантажу повинна бути як можна меншою.

Умови транспортної задачі подають у вигляді таблиці, що аналогічна таблиці вихідних даних транспортної задачі лінійного програмування за критерієм вартості. У правих верхніх кутах клітинок вказується тривалість транспортування вантажу між відповідними пунктами.

Поставлена задача не є задачею лінійного програмування, а є задачею на пошук мінімаксу. При її розв'язанні допустимим є складання планів, що є опорними і не опорними, виродженими і не виродженими.

Алгоритм рішення задачі полягає у виконанні наступних дій:

1) скласти початковий план перевезень (методом північно-західного кута, мінімальної вартості чи подвійної переваги);

2) найти завантажену клітинку з максимальним значенням тривалості перевезень. Обвести це значення кружечком. Виключити з подальшого аналізу порожні клітинки матриці, де значення тривалості перевезень перевищує це значення, проставляючи у цих клітинках хрестики;

3) побудувати *розвантажувальний контур*. Розвантажувальний контур є замкненим контуром, для якого виконуються наступні умови:

а) до його вершин входять клітинки, не позначені хрестиком;

б) у вершинах циклу по черзі проставляються знаки «+» та «–», починаючи з клітинки з кружечком, в якій проставляється знак «–»;

в) всі клітинки, позначені знаком «–», є завантаженими;

4) визначити, чи є завантаження клітинки з кружечком найменшим у порівнянні з завантаженням клітинок, позначених у розвантажувальному контурі знаком «–». Якщо воно є найменшим, то значення цього завантаження відняти від завантажень клітинок, позначених знаком «–» та додати до завантажень клітинок, позначених знаком «+».

Дії алгоритму повторюють, доки не буде отримане оптимальний розв'язок задачі (не буде можливості побудувати розвантажувальний контур).

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Скласти оптимальний план перевезень бетону з пунктів виробництва (A_1–A_5) до будівництв (B_1–B_5), що забезпечує мінімальну тривалість виконання перевезень. Обсяги виробництва бетону та потреба у ньому будівництв по варіантах задані в таблицях

4.1–4.2. Варіанти матриці тривалостей транспортування між пунктами виробництва бетону та будівництвами наведені у таблицях 4.4–4.7.

Таблиця 4.1 — Обсяги виробництва бетону, *т*

Вар.	Варіант матриці тривалостей	Обсяги виробництва бетону, *т*				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	20	15	15	–	–
2	2	12	10	18	15	10
3	3	30	28	22	–	–
4	4	18	25	10	15	9
5	1	25	20	15	–	–
6	2	14	18	12	13	20
7	3	18	12	13	13	13
8	4	40	25	35	–	–
9	1	45	13	28	35	–
10	2	14	16	13	20	17
11	3	15	20	15	–	–
12	4	6	12	18	27	–
13	1	14	11	6	12	18
14	2	28	30	22	–	–
15	3	19	24	17	15	–
16	4	8	7	12	6	17
17	1	15	25	20	–	–
18	2	12	18	17	11	–
19	3	18	7	29	14	12
20	4	25	40	35	–	–
21	1	9	14	12	22	–
22	2	55	17	14	15	12
23	3	28	22	30	–	–
24	4	10	28	18	12	–
25	1	12	11	13	16	29

Продовження таблиці 4.1.

Вар.	Варіант матриці тривалостей	Обсяги виробництва бетону, *т*				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
26	2	14	30	45	–	–
27	3	36	25	23	33	–
28	4	9	13	14	14	19
29	1	42	8	60	–	–
30	2	6	10	33	35	–

Таблиця 4.2 — Потреба у бетоні будівництв

Варіант	Потреба у бетоні будівництв, *т*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	9	10	7	13	11
2	17	20	10	18	–
3	18	14	19	12	17
4	20	10	14	18	15
5	19	12	9	10	10
6	18	21	16	22	–
7	10	13	16	19	11
8	20	17	23	22	18
9	26	39	23	33	–
10	13	7	18	16	26
11	16	7	9	8	10
12	18	9	25	6	5
13	15	10	18	9	9
14	17	12	19	14	18
15	10	13	25	27	–
16	10	10	9	13	8
17	19	12	9	10	10
18	14	10	8	26	–
19	12	15	11	9	33
20	30	16	20	18	16

Таблиця 4.2 — Потреба у бетоні будівництв

Варіант	Потреба у бетоні будівництв, *т*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
21	11	9	16	21	–
22	18	23	25	26	21
23	19	14	18	12	17
24	11	9	15	33	–
25	14	13	17	9	28
26	20	20	20	20	9
27	25	22	29	41	–
28	12	10	7	30	10
29	28	30	24	8	20
30	31	13	8	10	22

Таблиця 4.3 — Матриця тривалостей транспортування, *хв*. (варіант 1)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	15	21	14	17
A_2	14	8	15	11	21
A_3	19	16	26	12	20
A_4	15	11	16	19	18
A_5	13	10	12	20	16

Таблиця 4.4 — Матриця тривалостей транспортування, *хв*. (варіант 2)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	13	9	5	11	17
A_2	14	5	12	14	22
A_3	20	17	13	18	21
A_4	13	15	11	13	21
A_5	12	21	9	10	16

Таблиця 4.5 — Матриця тривалостей транспортування, *хв*. (варіант 3)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	18	12	7	18	7
A_2	35	14	12	15	13
A_3	30	16	11	25	15
A_4	19	15	35	20	7
A_5	15	35	12	11	6

Таблиця 4.6 – Матриця тривалостей транспортування, *хв*. (варіант 4)

Кар'єри	Підприємства				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	16	21	19	32
A_2	4	4	9	5	24
A_3	3	8	14	10	26
A_4	24	33	36	34	49
A_5	9	25	30	20	31

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за вихідних даних, заданих у таблиці:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наявність
A_1	9	3	9	10	9
A_2	8	4	8	12	5
A_3	5	5	10	14	2
A_4	7	8	11	12	9
Потреба	7	8	7	3	

Розв'язок.

Побудуємо початковий опорний план перевезень *методом мінімальної вартості* (таблиця 4.7).

Таблиця 4.7 — Початковий опорний план задачі

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наявність
A_1	^{9}	– 8 ^{3}	1 ^{9}	+ ^{10}	9
A_2	^{8}	^{4}	5 ^{8}	× ^{12}	5
A_3	2 ^{5}	^{5}	^{10}	× ^{14}	2
A_4	5 ^{7}	+ ^{8}	1 ^{11}	– 3 ^{12}	9
Потреба	7	8	7	3	

Максимальна тривалість перевезень за цим планом складає 12 хвилин (клітинка A_4B_4). Позначаємо цю клітинку кружечком.

Виключаємо з розгляду всі клітинки, що мають тривалість транспортування більше 12 хвилин (позначаємо хрестиками).

Відшукуємо розвантажувальний контур, починаючи з клітинки з кружечком таким чином (у нашому випадку це контур A_4B_4 — A_1B_4 — A_4B_2 — A_4B_2). Позначаємо вершини контуру знаками «–» та «+», починаючи з клітинки з кружечком. У правильно побудованому контурі повинні виконуватись умова: завантаження у клітинці з кружечком повинно бути найменшим з усіх завантажень у клітинках, позначених знаком «–». Зауважимо, що не висувається вимоги щодо знаходження вершин контуру тільки у завантажених клітинках (у нашому випадку дві клітинки контуру є порожніми).

Додаємо значення завантаження клітинки з кружечком до завантажень у клітинках, позначених знаком «+» та віднімаємо з завантажень у клітинках, позначених знаком «–». Отримаємо поліпшений план (таблиця 4.8).

Максимальна тривалість транспортування у отриманому плані складає 11 хвилин (клітинка A_4B_3). Зауважимо, що після такого перетворення план задачі став виродженим (кількість завантажених клітинок дорівнює 8).

Таблиця 4.8 — Поліпшений план задачі (2 ітерація)

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наяв-ність
A_1	9	5 3	1 9	3 10	9
A_2	8	4	5 8	× 12	5
A_3	− 2 5	5	+ 10	× 14	2
A_4	+ 5 7	3 8	− 1 11	× 12	9
Потреба	7	8	7	3	

Позначаємо знаком «×» всі клітинки, що мають тривалість транспортування більше ніж 11.

Позначаємо клітинку A_4B_3 кружечком. Будуємо розвантажувальний контур A_4B_3 — A_3B_3 — A_4B_1 — A_4B_1. У вершинах контуру додаємо одиницю до завантажень клітинок, позначених знаком «+» та віднімаємо одиницю від завантажень клітинок, позначених знаком «−». Отримуємо наступний план задачі (таблиця 4.9).

Таблиця 4.9 — Поліпшений план задачі (3 ітерація)

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наяв-ність
A_1	9	5 3	1 9	3 10	9
A_2	8	4	5 8	× 12	5
A_3	1 5	5	1 10	× 14	2
A_4	6 7	3 8	× 11	× 12	9
Потреба	7	8	7	3	

Максимальний час транспортування за цим планом складає 10 хвилин (клітинки A_1B_4 та A_3B_3). Виключаємо з розгляду всі клітинки, що мають тривалість транспортування більше ніж 10.

На цьому рішення припиняється, оскільки немає можливості побудувати розвантажувальний контур перерахунку (всі клітинки стовпчика A_1B_4 , що містить максимальну тривалість транспортування, позначені хрестиком).

Остаточно, оптимальний план забезпечує мінімальну тривалість транспортування бетону у 10 хвилин.

Контрольні запитання

1. Дайте формулювання транспортної задачі за критерієм часу.
2. Викладіть алгоритм покращення плану транспортної задачі за критерієм часу.
3. Яким умовам повинен відповідати правильно побудований розвантажувальний контур?
4. Яка ознака оптимальності плану транспортної задачі за критерієм часу?

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

ДЕТЕРМІНОВАНА ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Мета роботи: вивчення способу розв'язування детермінованої задачі управління запасами методом динамічного програмування.

Стисла теоретична довідка

Детермінована задача управління запасами полягає в наступному: необхідно скласти план випуску деякого виду виробів на період часу, що складається з N відрізків. Передбачається, що для кожного з цих відрізків є точний прогноз попиту на продукцію, що випускається. Для різних відрізків попит неоднаковий. Причому, продукція, виготовлена протягом відрізку часу t, може бути використана для повного чи часткового покриття попиту протягом цього відрізка. Крім того, розміри виготовлених партій продукції впливають на економічні показники виробництва. У зв'язку з цим буває доцільно виготовляти на протязі деякого періоду обсяг продукції, що перевищує його попит у межах цього періоду і зберігати ці надлишки до задоволення наступного попиту. Однак, збереження запасів пов'язане з витратами (плата за складські приміщення, страхові внески і витрати на утримання запасів).

Мета підприємства — розробити таку програму, при якій загальна сума витрат на виробництво і утримання запасів мінімізується за умови повного і своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Введемо наступні позначення:

x_t — обсяг випуску продукції на протязі відрізку часу t;

y_t — рівень запасів продукції на кінець відрізку часу t;

D_t — попит на продукцію для відрізку часу t. Всі значення D_t є цілими. Передбачається, що на початок планового періоду всі D_t відомі;

$C_t(x_t, y_t)$ — витрати на відрізку часу t, що залежать від обсягу випуску продукції на цьому відрізку x_t, рівня запасів продукції на кінець цього відрізка y_t та, крім того, можливо від поточного значення t.

Тоді задача полягає у мінімізації функції

$$W = \sum_{t=1}^{N} C_t(x_t, y_t) \Rightarrow \min,$$

при обмеженнях:

– обсяги випуску продукції повинні бути цілими числами

$$x_t = 0, 1, 2, 3, \ldots; \;\; t = \overline{1, N};$$

– запаси на кінець планового періоду повинні бути відсутні

$$y_N = 0;$$

– в межах кожного відрізку часу попит на продукцію повинен бути задоволений

$$y_t = y_{t-1} + x_t - D_t;$$

$$y_t \geqslant 0;\; y_t = 0, 1, 2, 3, \ldots\,;\; (t = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Відзначимо, що рівень запасів на початок планового періоду заданий та дорівнює $y_0 = 0$.

Для розв'язування задачі методом динамічного програмування розіб'ємо процес управління на кроки. Номер кроку буде позначати номер відрізку часу, для якого визначається обсяг випуску продукції. Параметр стану системи — рівень запасів на початку кроку, змінна управління на кожному кроці — обсяг випуску продукції на ньому.

Введемо позначення:

d_i — попит на продукцію на кроці i, що відстоїть від кінця планового періоду на i кроків;

$c_i(x, y)$ — витрати на кроці i, пов'язані з випуском x одиниць продукції та з утриманням запасів, рівень яких на кінець i-го кроку дорівнює y;

$W_i(y)$ — витрати, що відповідають оптимальному управлінню, при якому витрати на i відрізків часу, що залишилися, при початковому рівні запасів y є мінімальними;

$x_i(y)$ — обсяг випуску продукції, що забезпечує виконання цільової функції $W_i(y)$.

Функціональні рівняння Беллмана мають вигляд:

перший крок (i=1)

$$W_1(y) = C_1(d_1 - y, 0), \quad y = 0, 1, \ldots, d_1;$$

наступні кроки

$$W_i(y) = \min_x \left[C_i(x, y + x - d_i) + W_{i-1}(y + x - d_i) \right]$$

$$i = 2, 3, \ldots, N.$$

де $y = 1, 2, \ldots, d_1 + d_2 + \ldots + d_i$, причому для відшукання мінімуму перебираються всі невід'ємні цілі значення x, що лежать у межах

$$d_i - y \leqslant X \leqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_i - y.$$

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Підприємство планує обсяг випуску продукції на $n = 4$ місяці. Попит на продукцію у кожному місяці відомий та дорівнює D_t ($t = \overline{1,4}$). Виробничі потужності підприємства обмежені максимальним обсягом випуску у $x_{\max}$ одиниць. Складські площі підприємства дозволяють зберігати не більше ніж $y_{\max}$ одиниць продукції. Місячні витрати (*тис. грн.*) в залежності від обсягу випуску продукції x та рівня запасів на кінець місяця y задані функцією

$$C(x,y) = \begin{cases} hy, & \text{при } x = 0; \\ a + bx + hy, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Знайти оптимальні обсяги випуску продукції у кожному місяці, що забезпечують мінімальні витрати на виробництво і утримання запасів, якщо початковий запас на початок планового періоду дорівнює y_0 одиниць.

Задачу розв'язати методом динамічного програмування.

Вихідні дані до виконання роботи наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 — Вихідні дані до виконання роботи

Вар.	D_1	D_2	D_3	D_4	$x_{\max}$	$y_{\max}$	a	b	h	y_0
1	3	5	4	4	5	3	13	2	1	3
2	4	2	6	3	7	4	12	1	2	1
3	3	5	3	5	6	7	11	2	1	2
4	4	4	3	5	5	4	14	1	2	1
5	5	3	6	2	6	5	12	2	1	2
6	1	4	3	6	5	4	10	3	2	3
7	2	6	4	3	7	3	13	2	2	2
8	6	5	4	3	8	5	11	2	2	1
9	5	4	5	4	6	3	9	3	1	2
10	6	5	2	5	7	5	13	3	2	1
11	3	6	5	2	6	4	12	2	2	3
12	7	3	5	4	7	4	14	1	1	4

Продовження таблиці 5.1.

Вар.	D_1	D_2	D_3	D_4	$x_{\max}$	$y_{\max}$	a	b	h	y_0
13	6	5	3	3	5	4	12	2	3	2
14	3	5	4	6	5	5	11	2	2	2
15	5	4	6	3	7	3	10	2	2	1
16	3	6	2	5	5	4	8	3	2	3
17	4	4	4	4	6	5	10	3	2	3
18	4	3	5	2	5	3	11	2	1	2
19	5	2	4	3	5	3	12	2	1	1
20	6	1	4	4	5	3	10	3	2	3
21	4	2	5	2	6	4	12	2	2	1
22	5	3	5	4	7	4	11	2	3	2
23	3	4	3	4	5	4	10	3	2	2
24	2	5	3	3	5	3	14	1	2	2
25	4	2	2	4	5	2	12	2	1	1
26	3	4	2	5	6	3	11	2	2	3
27	5	2	4	2	5	4	10	2	2	1
28	2	5	5	4	6	3	14	1	2	2
29	5	3	3	5	7	2	12	2	2	1
30	4	5	3	4	6	3	14	1	2	1

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за таких вихідних даних

D_1	D_2	D_3	D_4	$x_{\max}$	$y_{\max}$	a	b	h	y_0
3	3	3	3	5	4	13	2	1	2

Розв'язок.

Складемо рівняння Беллмана.

Для кроку $i = 1$ (починаючи з кінця) за умови, що рівень запасів на кінець планового періоду дорівнює нулю

$$\begin{cases} W_1(y) = C(3-y,0), \\ x_1(y) = 3-y; \end{cases} \qquad y = 0,1,2,3.$$

Для наступних кроків (i = 2, 3, 4)

$$W_i(y) = \min_x [C(x, y+x-3) + W_{i-1}(y+x-3]$$
$$i = 2,3,4; \qquad y = 0,1,2,3,4.$$

Для відшукання мінімуму перебираються всі невід'ємні цілі значення обсягів випуску продукції x, що знаходяться у межах

$$3 - y \leqslant x \leqslant \min(5; 7-y).$$

Результати розрахунків за кожним кроком зводимо до таблиць.

Крок $i = 1$. Будуємо таблицю для різних початкових рівнів запасів $y = 0,1,2,3$ (таблиця 5.2).

Таблиця 5.2. — Умовна оптимізація (крок 1)

y	$W_1(y)$	$x_1(y)$
0	19	3
1	17	2
2	15	1
3	0	0

Крок $i = 2$. Умовна оптимізація ведеться за формулою $C(x, y+x-3) + W_1(y+x-3)$ (таблиця 5.3). Для $y = 0,1,2,3,4$ і $3 - y \leqslant x \leqslant \min(5; 7-y)$.

У кожній клітинці сума є: перший доданок — $C(x, y)$, розрахований за функцією витрат, другий доданок — значення $W_1(y+x-3)$, взяте з попередньої таблиці для кроку $i = 1$. Наприклад при $y = 2$; $x = 3$; $W_1(2+3-3) = W_1(2) = 15$. $W_2(y)$ приймається мінімальним для даного рядка, а $x_2(y)$ відповідає обсягу випуску продукції x для цього мінімального елемента $W_2(y)$.

Крок $i=3$. Умовна оптимізація ведеться за формулою $C(x,y+x-3)+W_2(y+x-3)$ (таблиця 5.4). Для $y=0,1,2,3,4$ і $3-y\leqslant x\leqslant\min(5;7-y)$.

У кожній клітинці перший доданок дорівнює $C(x,y+x-3)$, а другий доданок є значення $W_2(y+x-3)$, взятий з попередньої таблиці для кроку $i=2$.

Крок $i=4$. Умовна оптимізація ведеться за формулою $C(x,y+x-3)+W_2(y+x-3)$ (таблиця 5.5). Для $y=0,1,2,3,4$ і $3-y\leqslant x\leqslant\min(5;7-y)$.

Після умовної оптимізації на кожному кроці виконуємо безумовну оптимізацію, проходячи процес у зворотному порядку (з початку до кінця).

Для цього, при початковому запасі на початку першого місяця $y_0=2$ з таблиці 5.5 для $i=4$ визначаємо з рядка, що відповідає $y_0=2$: $W_4(y)=W_4(2)=54$ та $x_4(y)=x_4(2)=5$.

За величинами $y=2$, $x=5$ визначається рівень запасів на початок наступного місяця. Він дорівнює $y+x-3=2+5-3=4$.

Для $y=4$ за таблицею 5.4. для кроку $i=3$, визначаємо $W_3(y)=W_3(4)=27$; $x_3(y)=x_3(4)=0$.

За величинами $y=4$, $x=0$ визначається рівень запасів на початок наступного місяця. Він дорівнює $y+x-3=4+0-3=1$

За таблицею 5.3 для кроку $i=2$ для рядка $y=1$, визначаємо $x_2(y)=x_2(1)=5$, $W_2(y)=W_2(1)=26$.

За величинами $y=1$, $x=5$ визначається рівень запасів на початок квітня місяця: $y+x-3=1+5-3=3$.

За таблицею 5.2 для кроку $i=1$ для рядка $y=3$, визначаємо $x_1(y)=x_1(0)=0$, $W_1(y)=W_1(3)=0$.

Остаточний оптимальний розв'язок наведено у таблиці 5.6.

Таблиця 5.3 — Умовна оптимізація (крок 2)

y/x	0	1	2	3	4	5	$W_2(y)$	$x_2(y)$
0				19+19=38	22+17=39	25+15=40	38	3
1			17+19=36	20+17=37	23+15=38	26+0=26	26	5
2		15+19=34	18+17=35	21+15=36	24+0=24		24	4
3	0+19=19	16+17=33	19+15=34	22+0=21			19	0
4	1+17=18	17+15=32	20+0=20				18	0

Таблиця 5.4 — Умовна оптимізація (крок 3)

y/x	0	1	2	3	4	5	$W_3(y)$	$x_3(y)$
0				19+38=57	22+26=48	25+24=49	48	4
1			17+38=55	20+26=46	23+24=47	26+19=45	45	5
2		15+38=53	18+26=44	21+24=45	24+19=43	27+18=45	43	4
3	0+38=38	16+26=42	19+24=43	22+19=41	25+18=43		38	0
4	1+26=27	17+24=41	20+19=39	23+18=41			27	0

Таблиця 5.5 — Умовна оптимізація (крок 4)

y/x	0	1	2	3	4	5	$W_4(y)$	$x_4(y)$
0				19+48=67	22+45=67	25+43=68	67	3, 4
1			17+48=65	20+45=65	23+43=66	26+38=64	64	5
2		15+48=63	18+45=63	21+43=64	24+38=62	27+27=54	54	5
3	0+48=48	16+45=61	19+43=62	22+38=60	25+27=52		48	0
4	1+45=46	17+43=60	20+38=58	23+27=50			46	0

Таблиця 5.6 — Оптимальний розв'язок задачі

	i=4	i=3	i=2	i=1
x	5	0	5	0
y	4	1	3	0

Тобто, необхідно випустити по п'ять одиниць продукції у другому та четвертому місяці, при цьому мінімальні витрати на виробництво і утримання запасів складуть

$$W_{\min} = 27 + 1 + 26 + 0 = 54 \text{ } \textit{тис. грн.}$$

Контрольні запитання

1. Дайте математичну постановку детермінованої задачі управління запасами.
2. Запишіть рівняння Беллмана для кожного кроку оптимізації задачі управління запасами.
3. Як виконується умовна та безумовна оптимізація задачі?

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

ЗАДАЧА ЗАМІНИ ОБЛАДНАННЯ

Мета роботи: вивчення способу розв'язування задачі визначення оптимального терміну заміни обладнання методом динамічного програмування.

Стисла теоретична довідка

Задача про заміну обладнання є однією з важливих економічних задач, з якими мають справу на практиці при вирішенні питань про пошук оптимальної стратегії заміни старого устаткування, виробничих приміщень, рухомого складу тощо. Старіння обладнання включає в себе його фізичне та моральне зношення, в результаті чого зростають витрати на його експлуатацію і утримання, знижується його продуктивність та залишкова вартість.

У деякий момент настає час, коли старе обладнання доцільніше замінити на нове, ніж продовжувати експлуатувати старе. Оптимальна стратегія заміни обладнання полягає в визначенні оптимальних термінів заміни. Критерієм оптимальності може бути прибуток від експлуатації обладнання (задача максимізації), або витрати на його утримання та експлуатацію (задача мінімізації). При цьому виходять з припущення, що рішення про заміну обладнання можуть прийматися періодично на початку кожного проміжку часу (тиждень, місяць, рік), на які розбитий плановий період. Також припускають, що обладнання може використовуватись нескінченно довго, якщо витрачати достатні суми коштів на його ремонт.

При представленні задачі про заміну обладнання у вигляді моделі динамічного програмування весь процес експлуатації обладнання розглядається як n-кроковий, тобто весь плановий період розбивається на n проміжків. На початку кожного з цих проміжків існує дві альтернативи, які відповідають змінним управління задачі: *замінити* обладнання чи *продовжити* його експлуатацію.

Зміст роботи та вихідні дані до її виконання

Навантажувач експлуатується на протязі $n = 6$ років. На початку кожного року може бути прийняте рішення про заміну навантажувача на новий. Вартість нового навантажувача на k-му році експлуатації складає $p_k = \alpha + \beta(k-1)$ *у.г.о.* Після t років експлуатації навантажувач на k-му році можна продати за $\varphi(t) = p_k \cdot 2^{-t}$ *у.г.о*. Вартість утримання навантажувача на протязі k-го року складає $r_k(t) = \gamma p_k(t+1)$ *у.г.о*. Визначити оптимальний термін заміни навантажувача на новий, щоб сумарні витрати (з врахуванням витрат на придбання нового навантажувача на початку терміну експлуатації та грошової компенсації за рахунок заключного продажу) були мінімальними.

Вихідні дані до виконання роботи по варіантам наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 — Вихідні дані до виконання роботи

Вар.	α	β	γ	Вар.	α	β	γ
1	5000	350	0,10	16	6000	700	0,05
2	6000	200	0,10	17	7000	700	0,15
3	7000	600	0,05	18	8000	1200	0,15
4	4000	250	0,10	19	5000	250	0,10
5	8000	1000	0,05	20	4000	600	0,20
6	8000	600	0,10	21	5000	300	0,15
7	5000	600	0,15	22	6000	800	0,10
8	8000	750	0,20	23	7000	900	0,05
9	6000	500	0,15	24	7000	800	0,15
10	4000	400	0,15	25	4000	700	0,10
11	8000	900	0,15	26	8000	1500	0,10
12	7000	1000	0,20	27	5000	400	0,05
13	5000	800	0,05	28	7000	350	0,20
14	4000	500	0,05	29	6000	400	0,05
15	6000	600	0,15	30	4000	300	0,15

Приклад виконання завдання

Навантажувач експлуатується на протязі $n = 6$ років. На початку кожного року може бути прийняте рішення про заміну навантажувача на новий. Вартість нового навантажувача на k-му році експлуатації складає $p_k = 5000 + 500(k-1)$ *у.г.о.* Після t років експлуатації навантажувач на k-му році можна продати за $\varphi(t) = p_k \cdot 2^{-t}$ *у.г.о.* Вартість утримання навантажувача на протязі k-го року складає $r_k(t) = 0{,}1 p_k(t+1)$ *у.г.о.* Визначити оптимальний термін заміни навантажувача на новий, щоб сумарні витрати (з врахуванням витрат на придбання нового навантажувача на початку терміну експлуатації та грошової компенсації за рахунок заключного продажу) були мінімальними.

Розв'язок.

Процес експлуатації навантажувача складається з шести кроків. Стан S_{k-1} на початку k-го кроку характеризується одним параметром t – віком навантажувача. Рівняння стану для даного процесу має вигляд:

$$S_k = \begin{cases} S_{k-1} + 1, & \text{якщо навантажувач продовжують експлуатувати;} \\ 1, & \text{якщо навантажувач замінюють;} \end{cases}$$

Управління на кожному кроці полягає у виборі одного з двох рішень: *замінити* навантажувач на новий чи *зберегти* його у експлуатації надалі.

Функціональні рівняння Беллмана мають вигляд:

для *останнього* кроку ($k = n$)

$$Z_n^*(t) = \min \begin{cases} 0,1p_n(t+1) - p_{n+1}2^{-(t+1)} & \text{– зберегти;} \\ p_n(1,1-2^{-t}) - 0,5p_{n+1} & \text{– замінити;} \end{cases}$$
$$(k = 1,2,3,4,5);$$

для наступних кроків ($k < n$)

$$Z_k^*(t) = \min \begin{cases} 0,1p_k(t+1) + Z_{k+1}^*(t+1) & \text{– зберегти;} \\ p_k(1,1-2^{-t}) + Z_{k+1}^*(1) & \text{– замінити.} \end{cases}$$

Умовна оптимізація процесу на кроках $k = \overline{5,1}$ наведена у табл. 6.2 згідно рівнянь:

$$Z_k^t = \min \begin{cases} 50(t+1)(k+9) + Z_{k+1}^*(t+1) & \text{– зберегти;} \\ 500(k+9)(1,1-2^{-t}) + Z_{k+1}^*(1) & \text{– замінити.} \end{cases}$$

У 5-му та 8-му стовпцях таблиці 6.2 наведені, відповідно, значення першого та другого з цих рівнянь, а у 9-му стовпці — мінімальне з цих двох значень.

Таблиця 6.2 — Умовна оптимізація процесу ($k = 5, 4, 3, 2, 1$)

k	t $(t < k)$	$50(t+1) \times (k+9)$	$Z^*_{k+1}(t+1)$	$Z^*_k(t, u_1)$	$500(k+9)(1,1-2^{-t})$	$Z^*_{k+1}(1)$	$Z^*_k(t, u_2)$	$Z^*_k(t)$	Дія
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	0	700	–500	200	7700 – 700 = 7000	–500	200	200	зам./зб.
	1	1400	1250	2650	7700 – 3500 = 4200	–500	3700	2650	зберегти
	2	2100	2500	4600	7700 – 1750 = 5950	–500	5450	4600	зберегти
	3	2800	3500	6300	7700 – 875 = 6825	–500	6325	6300	зберегти
	4	3500	4015,6	7515,6	7700–437,5 = 7262,5	–500	6762,5	6762,5	замінити
4	0	650	2650	3300	7150 – 6500 = 650	2650	3300	3300	зам./зб.
	1	1300	4600	5900	7150 – 3250 = 3900	2650	6550	5900	зберегти
	2	1950	6300	8250	7150 – 1625 = 5525	2650	8175	8175	замінити
	3	2600	6762,5	9362,5	7150–812,5 = 6337,5	2650	8987,5	8987,5	замінити
3	0	600	5900	6500	6600 – 6000 = 600	5900	6500	6500	зам./зб.
	1	1200	8175	9375	6600 – 3000 = 3600	5900	9500	9375	зберегти
	2	1800	8987,5	10787,5	6600 – 1500 = 5100	5900	11000	10787,5	зберегти
2	0	550	9375	9925	6050 – 5500 = 550	9375	9925	9925	зам./зб.
	1	1100	10787,5	11887,5	6050 – 2750 = 3300	9375	12675	11887,5	зберегти
1	0	5500	11887,5	17387,5				17387,5	зберегти

Умовна оптимізація процесу на 6-му кроці наведена у таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 — Умовна оптимізація процесу ($k = 6$)

t	$750(t+1) - 8000 \cdot 2^{-(t+1)}$	$4250 - 7500 \cdot 2^{-t}$	$Z_6^*(t)$	Дія
0	750 – 4000 = –3250	4250 – 7500 = –3250	–3250	*зберегти/ замінити*
1	1500 – 2000 = – 500	4250 – 3750 = 500	–500	*зберегти*
2	2250 – 1000 = 1250	4250 – 1875 = 2375	1250	*зберегти*
3	3000 – 500 = 2500	4250 – 937,5 = 3312,5	2500	*зберегти*
4	3250 – 250 = 3000	4250 – 468,8 = 3781,2	3000	*зберегти*
5	4500 – 125 = 4375	4250 – 234,4 = 4015,6	4015,6	*замінити*

Подальша безумовна оптимізація дає мінімальні витрати $Z_{\min} = 17387,5$ *у.г.о.* Оптимальне управління наведене у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4 — Оптимальна стратегія заміни навантажувача

Роки періоду експлуатації та оптимальні рішення					
1	2	3	4	5	6
зберегти	*зберегти*	*зберегти*	*замінити*	*зберегти*	*зберегти*

Отже, придбаний навантажувач необхідно експлуатувати три роки, на 4-му році замінити на новий та продовжувати експлуатувати час, що залишився.

Контрольні запитання

1. Викладіть варіанти постановки задачі визначення оптимальних термінів заміни обладнання.
2. Запишіть рівняння Беллмана для кожного кроку оптимізації задачі заміни обладнання.
3. Як виконується умовна та безумовна оптимізація задачі?