МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНЫ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
КАФЕДРА ФІЗИКИ

ЛЕКЦІЇ

ПО КУРСУ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ
для спеціальності
141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Розділ I
Механіка

доц. каф фізики
Національного університету «Запорізька політехніка»

ПРАВДА М.І.

ЗАПОРІЖЖЯ

2021

ВСТУП

Предмет та метод фізики

Фізика (від **physis** (гр.) – природа) – наука, що вивчає найпростіші, і разом з тим, найбільш загальні закономірності явищ природи.

Предметом дослідження фізики є властивості і будова матерії, та закони її руху. Поняття фізики і її закони лежать в основі всього природознавства. Фізика належить до точних наук і вивчає кількісні закономірності явищ, причому фізичні закони формулюються математичною мовою і базуються на фактах, що встановлюються дослідним шляхом.

Фізика підрозділяється:

1) По методах дослідження:
   - експериментальна
   - теоретична.
2) По процесах, що вивчаються:
   - механіка
   - термодинаміка і статистична фізика
   - електродинаміка і оптика
   - теорія тяжіння
   - квантова механіка
   - квантова теорія поля
   - коливання і хвилі (виділяється окремо).
3) По об'єктах, що вивчаються:
   - фізика елементарних частинок
   - фізика ядра
   - фізика атомів і молекул
   - фізика газів і рідин
   - фізика твердого тіла
   - фізика плазми.

Сучасна фізика містить невелике число фундаментальних теорій, що охоплюють всі її розділи. Ці теорії є квінтесенцією знань про характер фізичних процесів і явищ, наближене, але разом з тим, найбільш точне відображення різних форм руху матерії.

В даний час відомо два види матерії: речовина і поле.

Речовина. – це елементарні частинки, атоми, молекули і всі тіла, які з них побудовані. Думка про те, що всі тіла складаються з атомів і доказ цього положення, можливо, є найголовнішим досягненням науки.

Поле - вид матерії, за допомогою якого здійснюється взаємодія між елементарними частинками, атомами, молекулами та тілами. Сучасній науці відомі чотири види поля (чотири види фундаментальної взаємодії), до яких зводяться всі явища природи: *гравітаційне, електромагнітне, сильне та слабке.*

Метод дослідження природи, який використовує фізика полягає у поєднанні теоретичної та експериментальної компонент. Тобто теоретичні положення, що висуваються перевіряються експериментально і власне *науковим знанням* стають тільки ті із них, які узгоджуються із дослідом.

Найважливішими властивостями матерії – її формами існування є: *рух, простір та час.* Говорять, що матерія існує і рухається у просторі та часі. Під рухом матерії розуміють будь-яку її зміну взагалі, що відбувається з часом. Найпростішим видом руху є *механічний рух* – зміна положення тіла в просторі із часом. Дослідженням цього руху займається *механіка*.

Механіка – це наука про рух і рівновагу тіл. Механіка в свою чергу підрозділяється на:

- кінематику
- динаміку
- статику.

Лекція 1

Тема: Кінематика

Питання:

1.1 Основні кінематичні поняття.

1.2 Швидкість та прискорення.

1.3 Тангенціальне та нормальне прискорення.

1.4 Прямолінійний рівномірний та рівноприскорений рух.

1.5 Рух тіла, кинутого під кутом до гори зонта.

1.1 Основні кінематичні поняття.

Кінематика описує рух тіл, відволікаючись від його причин.

Визначення 1. Система відліку – сукупність тіла відліку (щодо якого розглядається рух), системи координат, пов'язаної з цим тілом і годинника, як деякого способу відліку часу.

Визначення 2. Траєкторія – уявна лінія в просторі, яку описує центр мас тіла, що рухається.

Визначення 3. Матеріальна точка – макроскопічне тіло, розмірами якого можна знехтувати в даному завданні (наприклад, Землю в її русі навколо Сонця можна розглядати як матеріальну точку, оскільки відстань від Землі до Сонця $R = 1{,}5 \cdot 10^8\,км$, а радіус Землі $r = 6{,}4 \cdot 10^3\,км$).

Визначення 4. Довжина шляху – сума довжин всіх ділянок траєкторії, пройдених матеріальною точкою за даний проміжок часу.

1.2 Швидкість та прискорення.

Розглянемо окремий випадок, коли матеріальна точка рухається уздовж прямої лінії – уздовж осі X (рис.1.1).

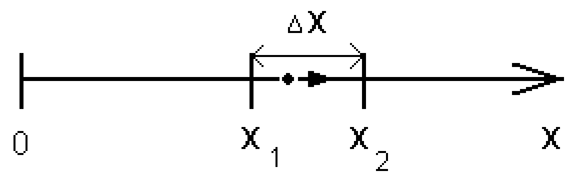

Рисунок 1.1

Положення матеріальної точки в цьому випадку визначається однією координатою: $x = x(t)$. Хай за проміжок часу Δt матеріальна крапка перемістилася на Δx. Тоді відношення:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.1}$$

називається середньою швидкістю. Братимемо проміжок часу Δt все менше і менше, тобто хай $\Delta t \to 0$. При цьому також $\Delta x \to 0$. Але відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, як показує дослід, наближатиметься до цілком певної межі яка відрізняється від нуля. Ця межа називається миттєвою швидкістю на момент часу t:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1.2).$$

Межі типу (1.2) зустрічаються в самих різних областях математики і фізики і називаються похідною функції $x(t)$ по аргументу t. Похідна по часу позначається символом $\frac{dx}{dt}$, тобто за визначенням:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad . \tag{1.3}$$

Використовуючи поняття похідної можна сказати, що миттєва швидкість є похідна від координати по часу або похідна від пройденого шляху s за часом:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad . \tag{1.4}$$

Швидкість матеріальної точки, взагалі кажучи, є функцією часу: $\upsilon = \upsilon(t)$. Похідна від швидкості по часу називається прискоренням матеріальної точки. Тобто прискорення за визначенням є:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \tag{1.5}$$

отже прискорення є перша похідна від швидкості по часу або друга похідна від координати по часу:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad . \tag{1.6}$$

Поняття швидкості і прискорення природним шляхом узагальнюються на випадок руху матеріальної точки по довільній криволінійній траєкторії. Нехай матеріальна точка, рухаючись по деякій криволінійній траєкторії, за проміжок часу Δt перемістилася з положення 1 в положення 2 (рис.1.2).

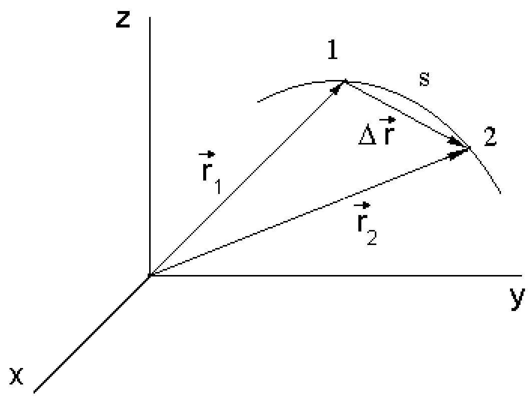

Рисунок 1.2

Довжина шляху s, який пройшло тіло за час Δt, є довжина відповідної ділянки траєкторії. Рух матеріальної точки повністю заданий, якщо вказаний закон зміни в часі її координат: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Ці рівняння еквівалентні одному векторному рівнянню: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ При цьому положення рухомої матеріальної точки на траєкторії задається радіус-вектором, $\vec{r}$ проведеним до цієї точки з початку координат. При переміщенні матеріальної крапки з положення 1 в положення 2 радіус - вектор отримує приріст:. $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ Вектор $\Delta \vec{r}$ називається переміщенням матеріальної точки за час Δt. Величина рівна:

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

називається вектором середньої швидкості. Перейдемо у формулі (1.7) до межі при $\Delta t \to 0$. Величина рівна:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.8}$$

є вектор миттєвої швидкості, направлений по дотичній в кожній точці траєкторії.

Аналогічно прискорення визначається як:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad , \tag{1.9}$$

або

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.10}$$

Тобто, прискорення є вектор, який дорівнює першій похідній від швидкості $\vec{\upsilon}$ по часу або другій похідній від радіус-вектора $\vec{r}$ по часу.

1.3 Тангенціальне та нормальне прискорення.

Швидкість матеріальної точки (тіла) може змінюватися як по абсолютній величині, так і по напрямку. Якщо швидкість тіла змінюється, то говорять, що тіло рухається з прискоренням. Нехай матеріальна точка рухається по деякій криволінійній траєкторії з прискоренням $\vec{a}$. Розкладемо повне прискорення тіла $\vec{a}$ на дві складові, одна з яких $\vec{a}_\tau$ направлена по дотичній до траєкторії, а інша - $\vec{a}_n$ направлена по нормалі до траєкторії. $\vec{a}_\tau$ називається тангенціальним прискоренням, а $\vec{a}_n$ - нормальним прискоренням (рис.1.3).

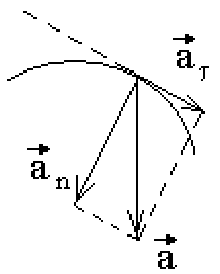

Рисунок 1.3

Повне прискорення тіла є векторна сума нормального і тангенціального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad , \tag{1.11}$$

а для модулів векторів справедлива теорема Піфагора:

$$a^2 = a^2{}_n + a^2{}_\tau \quad . \tag{1.12}$$

Отримаємо формули, по яких обчислюються тангенціальне і нормальне прискорення. Швидкість тіла завжди направлена по дотичній до траєкторії. Представимо швидкість у вигляді добутку її абсолютної величини і деякого одиничного вектора $\vec{e}$, який вказує напрямок швидкості:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{e} \ . \tag{1.13}$$

Підставимо (1.13) в (1.9):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon \cdot \vec{e}) \ . \tag{1.14}$$

За правилом диференціювання твору отримаємо:

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{e} + \upsilon \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \ . \tag{1.15}$$

Перший доданок у формулі (1.15) є тангенціальне прискорення:

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{e} \ , \tag{1.16}$$

або в скалярній формі:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \tag{1.17}$$

Другий доданок у формулі (1.15) є нормальним прискоренням:

$$\vec{a}_n = \upsilon \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \tag{1.18}$$

За визначенням похідної:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{e}}{\Delta t} \ . \tag{1.19}$$

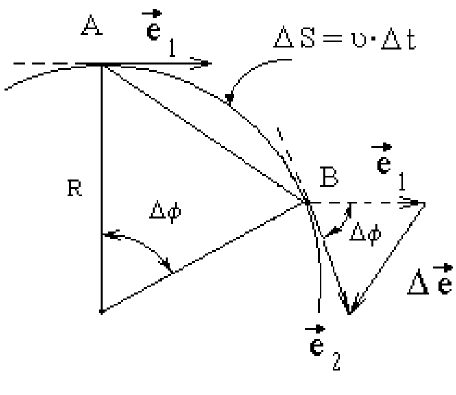

Рисунок 1.4

На рис.1.4 $\Delta\vec{e} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$. Радіус кривизни траєкторії в даній точці визначиться співвідношенням:

$$R = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \ . \tag{1.20}$$

З подібності трикутників представлених на рис.1.4 для малих кутів $\Delta\varphi$ запишемо:

$\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi = \dfrac{\Delta S}{R} = \dfrac{\Delta e}{e}$, або:

$$\Delta e = \frac{\Delta S \cdot e}{R} \quad . \tag{1.21}$$

Після постановки (1.21) в (1.19), враховуючи, що e =1, отримаємо:

$$\frac{de}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S \cdot e}{R \cdot \Delta t} = \frac{1}{R} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R} \quad . \tag{1.22}$$

І остаточно після підстановки (1.22) в (1.19) для модуля нормального прискорення отримаємо:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \quad . \tag{1.23}$$

1.4 Прямолінійний рівномірний та рівноприскорений рух .

Розглянемо найпростіші види руху:

1) Рівномірний прямолінійний рух – це рух, при якому тіло, рухаючись по прямій, за рівні проміжки часу проходить рівні шляхи, тобто виконується умова: $\vec{\upsilon} = const$. Цей рух описується єдиною формулою:

$$\upsilon = \frac{S}{t} \quad . \tag{1.24}$$

2) Рівноприскореним прямолінійним рухом називається такий рух, при якому тіло, рухаючись по прямій, за рівні проміжки часу збільшує свою швидкість на одну і ту ж величину, тобто виконується умова: $\vec{a} = const$. При русі тіла по прямій нормальне прискорення $\vec{a}_n = 0$, тому у визначенні прискорення можна перейти до скалярної форми запису, де після розділення змінних:

$$d\upsilon = a \cdot dt \tag{1.25}$$

і першого інтегрування

$$\upsilon = \int a \cdot dt \tag{1.26}$$

отримаємо:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \quad . \tag{1.27}$$

Константа інтегрування υ_0 у формулі (1.27) має зміст початковій швидкості. Повторне інтегрування:

$$S = \int (\upsilon_0 + at) \cdot dt \tag{1.28}$$

приводить до результату:

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \quad . \tag{1.29}$$

Константа інтегрування S_0 у формулі (1.29) має зміст шляху, пройденого тілом до початку відліку часу.

1.5 Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.

Нехай тіло кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю $\vec{\upsilon}_0$. Рух такого тіла можна розглядати як комбінацію рівномірного руху по осі X і рівноприскореного руху з прискоренням g по осіY, які відбуваються незалежно один від одного. Розкладемо вектор початкової швидкості на складові по осях так, як показано на рис.1.5.

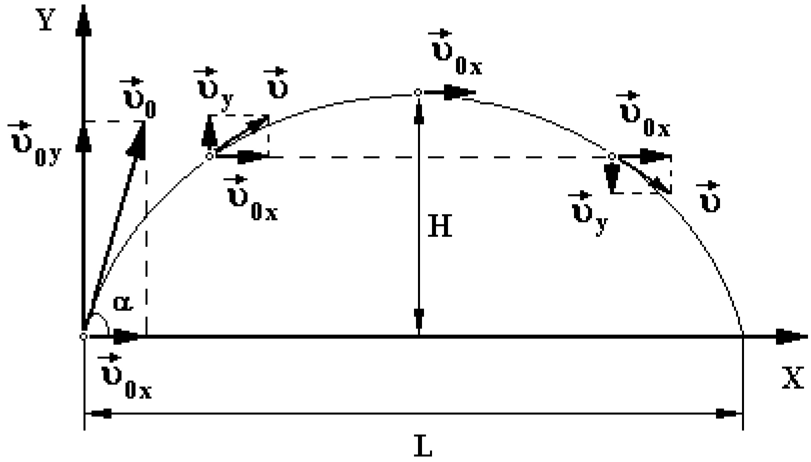

Рисунок.1.5

Між величинами $\vec{\upsilon}_0, \vec{\upsilon}_{0x}, \vec{\upsilon}_{0y}$ виконуються співвідношення:

$$\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_{0x} + \vec{\upsilon}_{0y} \ , \tag{1.30}$$

$$\upsilon_0^2 = \upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2 \ , \tag{1.31}$$

З системи рівнянь, що описують рух тіла по осях X і Y, отримуємо рівняння для максимальної висоти підйому і максимальної дальності польоту:

$$H = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} \ , \tag{1.32}$$

$$L = \frac{2\upsilon_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \ . \tag{1.33}$$

Задача. Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. Знайти максимальну дальність польоту та максимальну висоту підйому тіла.

Лекція 2

Тема: Кінематика обертального руху

Питання:

2.1 Рух матеріальної точки по колу. Кутова швидкість.
2.2 Зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями. Доцентрове прискорення.
2.3 Рівноприскорений рух по колу. Кутове прискорення.
2.4 Зв'язок між тангенціальним та кутовим прискореннями.
2.5 Кінематична аналогія поступального та обертального рухів.
2.6 Ступені свободи матеріальної точки і системи матеріальних точок.

2.1 Рух матеріальної точки по колу. Кутова швидкість.

Нехай траєкторією руху матеріальної точки є коло радіусу R. Розглянемо випадок, коли $\upsilon = const$, тобто точка рухається по колу з постійною по модулю швидкістю. Нехай за проміжок часу Δt точка перемістилася з положення 1 в положення 2 (ріс.2.1).

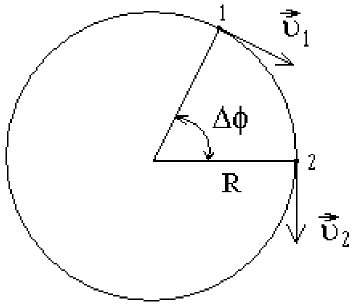

Рисунок 2.1

Тоді величина рівна:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \tag{2.1}$$

називається середньою кутовою швидкістю за проміжок часу Δt . Перейдемо у формулі (2.1) до межі:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \tag{2.2}$$

Величина, визначувана формулою (2.2) називається миттєвою кутовою швидкістю (або просто кутовою швидкістю), тобто швидкістю в даний момент часу.

Визначення 2.1. Час одного повного оберту (коливання) T називається періодом

Визначення 2.2. Число коливань в одиницю часу ν називається частотою.

Період і частота величинами взаємо оберненими:

$$\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{2.3}$$

У системі СІ частота вимірюється в герцах, причому $1Гц = \frac{1}{c} = c^{-1}$.

2.2 Зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями. Доцентрове прискорення.

Нехай точка зробила один повний оберт, при цьому радіус-вектор R описав кут $\Delta\varphi = 2\pi$ радіан. Тоді, у відповідність з формулою (2.1) отримаємо:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ , \qquad \text{або} \qquad \omega = 2\pi\nu \tag{2.4}$$

З іншого боку, за час T точка проходить шлях рівний довжині кола - $S = 2\pi R$. При цьому:

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}\ , \qquad \text{або} \qquad \upsilon = \omega \cdot R \tag{2.5}$$

Не дивлячись на те, що у випадку руху тіла, що розглядається, точка рухається по колу з постійною по модулю швидкістю, напрямок швидкості весь час змінюється (швидкість завжди направлена по дотичній до даної точки траєкторії). Отже, повинне існувати прискорення. Представимо швидкість як добуток модуля швидкості υ на одиничний вектор $\vec{e}$, який вказує напрямок швидкості:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{e} \tag{2.6}$$

Після диференціювання формули (2.6) матимемо:

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{e} + \upsilon \cdot \frac{d\vec{e}}{dt} \tag{2.7}$$

Оскільки модуль швидкості в даному випадку не змінюється, то перший доданок у формулі (2.7) рівний нулю; другий же доданок в цій формулі є нормальним прискоренням $\vec{a}_n$. У разі руху тіла по колу нормальне прискорення називається також доцентровим $\vec{a}_ц$, таким чином:

$$a_n = a_ц = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R \quad . \tag{2.8}$$

2.3 Рівноприскорений рух по колу. Кутове прискорення.

Нехай тепер швидкість матеріальної точки, яка рухається по колу, змінюється не тільки по напрямку, але і по абсолютній величині, тобто $\omega \neq const$. Нехай за проміжок часу Δt кутова швидкість змінилася від ω_1 до ω_2 так, що зміна кутовій швидкості рівна: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Тоді величина рівна:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \tag{2.9}$$

називається кутовим прискоренням. Таким чином, кутове прискорення є перша похідна від кутової швидкості по часу або друга похідна від кута повороту по часу.

2.4 Зв’язок між тангенціальним та кутовим прискореннями

Визначимо зв'язок між тангенціальним і кутовим прискореннями. Для цього про диференціюємо формулу $\upsilon = \omega R$ один раз за часом:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} \tag{2.10}$$

У формулі (2.10) $\frac{d\upsilon}{dt} = a_\tau$, а $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Отже:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \quad . \tag{2.11}$$

Розглянемо рівноприскорений рух по колу. Якщо $\varepsilon = const$, то після інтегрування формули $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ отримаємо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \quad . \tag{2.12}$$

Повторне інтегрування дає:

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} \quad . \tag{2.13}$$

2.5 Кінематична аналогія поступального та обертального рухів.

Кінематичні формули, які описують поступальний та обертальний рухи мають однакову структуру, дійсно:

Поступальний рух	Обертальний рух
$a = const$	$\varepsilon = const$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad\qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad\qquad \phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$

Тому говорять, що існує кінематична аналогія між рівноприскореним поступальним та рівноприскореним обертальним рухами.

2.6 Ступені свободи матеріальної точки і системи матеріальних точок.

Положення точка в просторі можна задати трьома прямокутними координатами x, y, z. Але це ж можна зробити і інакше, скориставшись, наприклад, циліндровими або сферичними (полярними) координатами.

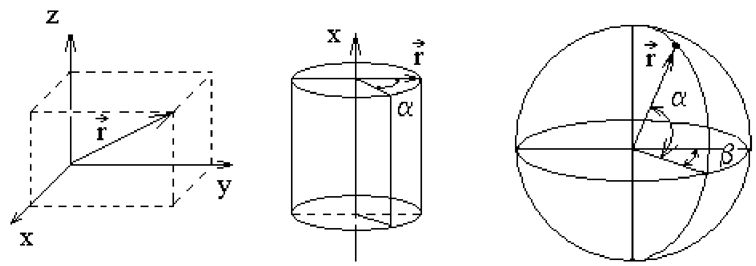

Рисунок .2.2

Однак суттєво, що при будь-якому виборі число незалежних координат, потрібних для однозначного визначення положення точки, яка може переміщатися в просторі як завгодно, рівне трьом. Про таку точка говорять, що вона три ступеня свободи.

Можлива ситуація, при якій переміщення точки у просторі не може бути яким завгодно. Наприклад, математичний маятник, у випадку якщо нитка натягнута, може переміщатися тільки по поверхні сфери з центром в точці закріплення. У таких випадках говорять, що на рух матеріальної крапки накладений зв'язок. Координати x, y, z такої точки повинні задовольняти співвідношенню вигляду:

$$f(x, y, z) = 0. \quad , \tag{2.14}$$

яке називається рівнянням зв’язку. Тому незалежними тут залишаються тільки дві координати, а третя може бути визначена з рівняння зв'язку. В цьому випадку говорять, що матеріальна точка має два ступеня свободи.

Визначення. Числом ступенів свобода матеріальної точки (тіла) називається число незалежних координат, які необхідно задати для однозначного визначення положення точки у просторі.

Сказане вище легко узагальнити на випадок системи, що складається з довільного числа n матеріальних точок. Якщо ці точки можуть переміщатися без обмежень, то для визначення їх миттєвого положення в просторі необхідно задати 3n координат – по 3 координати на кожну точку.

Лекція 3

Тема: Динаміка

Питання:

3.1 Основна задача динаміки. Межі застосування класичної механіки.

3.2 Принципи та визначення класичної механіки. Маса. Сила. Імпульс.

3.3 Закони Ньютона.

3.4 Закон збереження імпульсу.

3.5 Закон всесвітнього тяжіння.

3.6 Напруженість та потенціал гравітаційного поля.

3.1 Основна задача динаміки. Межі застосування класичної механіки.

Кінематика описує рух тіл, не торкаючись питання про те, чому тіло рухається саме в такий спосіб, а не інакше, наприклад, прискорено по колу, а не рівномірно по прямій.

Динаміка вивчає рух тіл саме у зв'язку з тими причинами, які обумовлюють той або інший характер руху. Згідно класичній механіці таким причинами є взаємодія між тілами, тобто сили, що між ними діють.

Основна задача динаміки полягає в тому, щоб по відомим початковими умовами (положенню і початковій швидкості тіла) і відомим силами, що діють на тіло, визначити положення тіла у будь-який момент часу.

Сили, з якими тіла і елементарні частинки діють одне на одне, є результатом і проявом однієї з чотирьох видів фундаментальної взаємодії відомих в природі:

- гравітаційного
- електромагнітного
- сильного
- слабкого.

У механіці зазвичай мають справу з силами тяжіння, пружності, тертя (опору) та інерції.

Класична (ньютонівська) механіка має свої межі застосування, а саме вона не застосовується в двох областях явищ:

1). При дослідженні процесів, що відбуваються в дуже малих об'ємах, порядку атомних з характерним розміром порядку одного ангстрему - 1Å=10^{-10} м. В цьому випадку застосовується квантова механіка.

2). При розгляді руху з дуже великими швидкостями – порядку швидкості світла - близько до $3\cdot10^8\,м/с$. В цьому випадку застосовується теорія відносності.

Більше обмежень застосовності класичної механіки не існує. Всі рухи тіл і частинок на Землі і в космосі підкоряються законам Ньютона. Таким чином, механіка Ньютона має дуже широку і практично важливу область застосування. В межах цієї області вона ніколи не втратить свого наукового і практичного значення.

3.2 Принципи та визначення класичної механіки. Маса. Сила. Імпульс.

При вивченні всякого круга явищ дуже важливо встановити основні закони або принципи, за допомогою яких можна пояснити всі відомі явища з даного круга, а також передбачити нові. Такий підхід до вивчення явищ природи отримав назву методу принципів. Основоположником його у фізиці був великий Ньютон (1643- 1727). Самі ж основні закони або принципи не можуть бути доведені логічно. Їх доказом є дослід. Таким чином, основні принципи є узагальненнями дослідних фактів.

Проте, ніякі досліди ніколи не охоплюють всю різноманітність умов, в яких можуть протікати явища, а вимірювання завжди супроводжуються погрішностями. Тому дослідним шляхом можна встановити справедливість принципів лише в обмежених межах і з обмеженою точністю. При розширенні круга явищ, що вивчаються, і підвищенні точності вимірювань можуть розширитися і ці межі. Може трапитися також, що поза цими межами основні принципи перестануть бути справедливими. Тоді виникне необхідність в їх узагальненні або заміні новими принципами, що мають ширшу область застосування.

Старі принципи при цьому не втратять свого значення, але ними можна буде користуватися тільки в межах встановленої області застосування.

Принципи механіки були сформульовані Ньютоном в його основному творі "Математичні початки натуральної філософії", перше видання якого вийшло з друку в 1687 р. У цьому своєму творі Ньютон постулює існування абсолютних часу, простору, руху:

1. "Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему - либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью".

2. "Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным".

3. "Абсолютное движение есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое".

Формулюванню основних законів Ньютон подає вісім визначень, з яких для нас важливі перші чотири. Після формулювань самого Ньютона приведемо сучасні формулювання тих же визначень.

Определения массы, силы, импульса Ньютона.

Опр.1 "Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая плотности и объему ее".

Опр.2 "Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе".

Опр.3 "Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения".

Сучасні визначення маси, сили, імпульсу.

Визначення 1. Маса є міра інертних і гравітаційних властивостей тіла.

Визначення 2. Імпульс тіла (кількість руху) є фізична величина рівна:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \tag{3.1}$$

Визначення 3. Сила є міра інтенсивності взаємодії між тілами.

3.3 Закони Ньютона.

Свої перші три закони Ньютон називав також аксіомами руху.

Закон 1

"Всяке тіло продовжує утримуватися в своєму стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки і оскільки воно не буде примушене прикладеними силами змінити цей стан".

Закон 2

"Зміна кількості руху пропорційно прикладеній рушійній силі і відбувається по напряму тій прямій, по якій ця сила діє".

Якщо на тіло діє сила, то тіло рухається з прискоренням прямо пропорційним силі, що діє, і обернено пропорційним масі тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{або} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.2}$$

Оскільки за визначенням прискорення є $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, то формула (3.2) може бути представлена у вигляді:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) \quad ,$$

або

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.3).$$

Таким чином, <u>сила є перша похідна від імпульсу по часу</u>.

Нехай сила $\vec{F}$ діяла на тіло масою m протягом проміжку часу Δt, внаслідок чого імпульс тіла змінився від $\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1$ до $\vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_2$. Тоді згідно формули (3.3) запишемо:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (3.4)$$

У формулі (3.4) величина $\vec{F} \cdot \Delta t$ називається <u>імпульсом сили</u>.

<u>Закон 3</u>

"Дії завжди є рівна і протилежна протидія, інакше – взаємодії двох тіл одне на одне між собою рівні і направлені в протилежні сторони".

Аристотель і його послідовники розглядали силу як причину руху. Вони вважали, що з припиненням дії сили припиняється і рух тіла. Сила необхідна для підтримки руху. Встановлення першого закону Ньютона означало, що таке уявлення про силу є неправильним, оскільки для підтримки рівномірного руху ніяких сил не потрібно. Силу почали розглядати як причину зміни кількості руху.

<u>3.4 Закон збереження імпульсу</u>.

Розглянемо систему матеріальних крапок масами m1, m2, m3., які рухаються з швидкостями $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3$. Відповідно (рис.3.1).

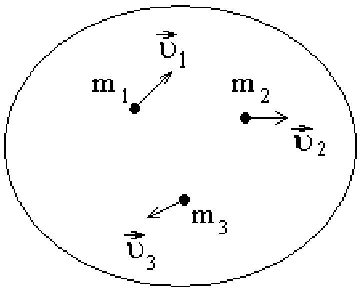

Рисунок .3.1

Сили, що діють на матеріальні точки системи, можна розділити на зовнішні і внутрішніх. Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками самої системи. Згідно третьому закону Ньютона сума всіх внутрішніх сил повинна бути рівна нулю. Хай система матеріальних точок замкнута, тобто на неї ззовні не діють сили. В цьому випадку сума всіх сил, що діють на систему рівна нулю. Тоді згідно другому закону Ньютона отримаємо:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \ , \qquad (3.5)$$

отже

$$\vec{P} = const \, . \qquad (3.6)$$

Таким чином, **повний імпульс замкнутої системи тіл є стала величина**. Це твердження називається законом збереження імпульсу. Цей фундаментальний закон природи не знає виключень, і є наслідком однорідності простору.

<u>3.5 Закон всесвітнього тяжіння.</u>

На підставі трьох законів Кепплера (1571-1630) Ньютоном був відритий закон всесвітнього тяжіння, в якому він стверджував, що тяжіння існує не тільки між Сонцем і планетами, але і між будь-якими іншими тілами.

“Будь-які два тіла притягуються один до одного з силами пропорційними добутку їх мас і обернено пропорційними квадрату відстані між ними”.

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2} \tag{3.7}$$

Кавендіш (18в.) і Жоллі (19в.) експериментально в лабораторних умовах підтвердили цей закон і визначили коефіцієнт пропорційності γ, який виявився рівним:

$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{H \cdot м^2}{кг^2} \right]$. Коефіцієнт г дуже малий, тому гравітаційна сила проявляє себе тільки в тих випадках, коли хоч би одне з тіл має дуже велику масу (планета, зірка).

Додатки

(Видержки из кн..И.Ньютона”Математические начала натуральной философии”)

О причине тяготения.

1. (Стр.662)

“До сих пор я изъяснял небесные явления и приливы морей на основании силы тяготения, но не указал причины самого тяготения. Эта сила происходит от некоторой причины, которая проникает до центра Солнца и планет без уменьшения своей способности, и которая действует не пропорционально величине поверхности частиц, на которые она действует (как это обыкновенно имеет место для механических причин), но пропорционально количеству твердого вещества, причем ее действие распространяется повсюду на огромные расстояния, убывая пропорционально квадратам расстояний. Тяготение к Солнцу составляется из тяготения к отдельным частицам его и при удалении от Солнца убывает в точности пропорционально квадратам расстояний даже до орбиты Сатурна, что следует из покоя афелиев планет, и даже до крайних афелиев комет, если только эти афелии находятся в покое. Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, *гипотез же я не измышляю*”.

2. (Стр.659)

“Шесть главных планет обращаются вокруг Солнца приблизительно по кругам, концентрическим с Солнцем, по тому же направлению и приблизительно в той же самой плоскости. Десять лун обращаются вокруг Земли, Юпитера и Сатурна по концентрическим кругам, по одному направлению и приблизительно в плоскости орбит своих планет. Все эти правильные движения не имеют своим началом механических причин…

Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа. Если и неподвижные звезды представляют собой центры подобных же систем, то все они, будучи построены по одинаковому намерению, подчинены и власти единого: в особенности приняв в соображение, что свет неподвижных звезд - той же природы, как и свет Солнца, и все системы испускают свет друг на друга, а чтобы системы неподвижных звезд от своего тяготения не падали друг на друга, он их расположил в таких огромных одна от другой расстояниях.

Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель Παντοχρατωρ (Что означает повелитель Вселенной (Прим. автора)).

3.6 Напруженість та потенціал гравітаційного поля.

За визначенням напруженість даної точки гравітаційного поля є сила, що діє на одиничну масу, поміщену в дану точку поля. Хай тіло масою m створює в навколишньому просторі гравітаційне поле. Помістимо на відстані R від нього пробне тіло масою m_0, тоді:

$$\frac{F}{m} = \frac{1}{m_0} \cdot \gamma \cdot \frac{m \cdot m_0}{R^2} = \frac{\gamma \cdot m}{R^2} = g \tag{3.8}$$

де g – прискорення, з яким рухатиметься тіло, поміщене в дану точку простору.

Нехай тіло масою m_0 переміщується зовнішньою силою проти сил гравітаційного поля з положення 1 у положення 2 (рис.3.2).

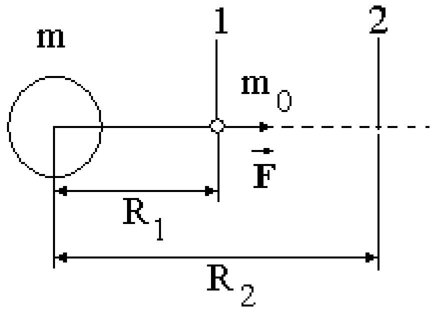

Рисунок 3.2

При цьому проти сил поля буде виконана робота:

$$A = \int_{R_1}^{R_2} F \cdot dR = \int_{R_1}^{R_2} \gamma \cdot \frac{m \cdot m_0}{R^2} \cdot dR \tag{3.9}$$

Після інтегрування маємо:

$$A = \int_{R_1}^{R_2} \gamma \cdot m \cdot m_0 \cdot \frac{dR}{R^2} = \gamma \frac{m \cdot m_0}{R_1} - \gamma \frac{m \cdot m_0}{R_2} = E_1 - E_2 \tag{3.10}$$

де величини $E_1 = \gamma \cdot \dfrac{m \cdot m_0}{R_1}$ і $E_2 = \gamma \cdot \dfrac{m \cdot m_0}{R_2}$ це є енергія маси m_0 у відповідних точках простору. Тоді величина рівна відношенню:

$$\frac{A}{m_0} = \phi_1 - \phi_2 = \gamma \cdot \frac{m}{R_1} - \gamma \cdot \frac{m}{R_2} \tag{3.11}$$

називається різницею потенціалів точок 1 і 2, а величина рівна:

$$\phi = -\gamma \cdot \frac{m}{R} \tag{3.12}$$

називається гравітаційним потенціалом.

Між напруженістю і потенціалом існує зв'язок. З рівнянь

$$g = \frac{\gamma \cdot m}{R^2}, \qquad \phi = -\gamma \cdot \frac{m}{R}$$

слідує:

$$g = -\frac{d\phi}{dR} \tag{3.13}$$

або для довільного напрямку у просторі:

$$g = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) \tag{3.14}$$

або

$$g = -grad\phi\,, \tag{3.15}$$

де символ $grad$ називається оператором градієнта і визначається як:

$$grad = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ . \tag{3.16}$$

Говорять, що напруженість гравітаційного поля дорівнює градієнту потенціалу і направлена у бік його зменшення. Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори, направлені по координатних осях x, y, z відповідно.

Знак «-» у формулі (3.15) означає, що напруженість направлена у бік якнайшвидшого зменшення потенціалу.

Лекція 4

Тема: Сили в механіці

Питання:
4.1 Сили пружності. Закон Гука. Енергія пружної деформації.
4.2 Сили тертя.
4.3 Сили опору.
4.4 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції.
4.5 Відцентрова сила інерції.
4.6 Сила Коріоліса.

4.1 Сили пружності. Закон Гука. Енергія пружної деформації.

Під дією прикладених зовнішніх сил всі реальні тіла змінюють свою форму і об'єм. Такі зміни називаються деформаціями. Розрізняють два граничні випадки деформацій:

- пружні (зникаючі після зняття зовнішніх сил)
- пластичні (що зберігаються після зняття зовнішніх сил).

Прикладемо розтягуюче навантаження до твердого циліндричного стержня довжиною l і площею поперечного перетину S. Нехай під дією зовнішньої сили F довжина стержня збільшилася на Δl.

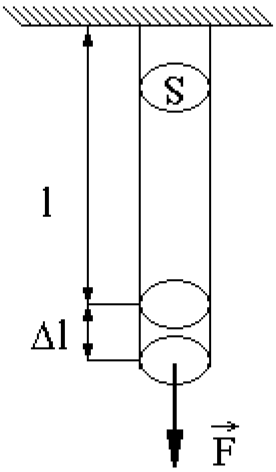

Рисунок 4.1

Тоді величина рівна відношенню:

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{4.1}$$

називається механічною напругою (напруженням), а величина рівна відношенню:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{4.2}$$

називається відносною деформацією. Дослід показує, що залежність напруги від відносної деформації має вигляд:

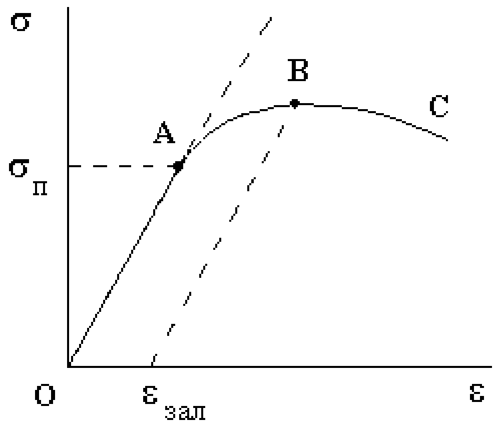

Рисунок 4.2

На ділянці АВ з'являються пластичні (залишкові) деформації $\varepsilon_{зал}$. На ділянці ВС починається руйнування зразка. На ділянці ОА напруга σ лінійно залежить від відносної деформації ε, говорять, що тут виконується закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \; . \tag{4.3}$$

Коефіцієнт пропорційності *E* залежить від роду матеріалу – це таблична величина, яка називається <u>модулем пружності або модулем Юнга</u>. В області пружної деформації сила пружності, що виникає в матеріалі пропорційна абсолютній деформації Δl:

$$F_{упр} = -k \cdot \Delta l \tag{4.4}$$

де k – коефіцієнт жорсткості; опустивши у формулі (4) мінус, який вказує напрямок сили пружності, визначимо до з умови:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{k \cdot \Delta l}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}, \tag{4.5}$$

$$k = \frac{E \cdot S}{l} \tag{4.6}$$

При пружній деформації тіла здійснюється робота:

$$A = \int_0^{\Delta l} k \cdot x \cdot dx = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}, \tag{4.7}$$

яка витрачається на збільшення пружної деформації тіла. Таким чином, енергія пружної деформації рівна:

$$W = \frac{k \cdot x^2}{2} \; . \tag{4.8}$$

<u>4.2 Сили тертя</u>

Сили тертя діють між тілами, які дотикаються одне до одного або їх частинами як при їх відносному спокої, так і при їх відносному русі і залежать від відносної швидкості цих тіл. Прикладемо до тіла, що покоїться на горизонтальній поверхні горизонтальну силу, що зростає від 0 до деякого максимального значення.

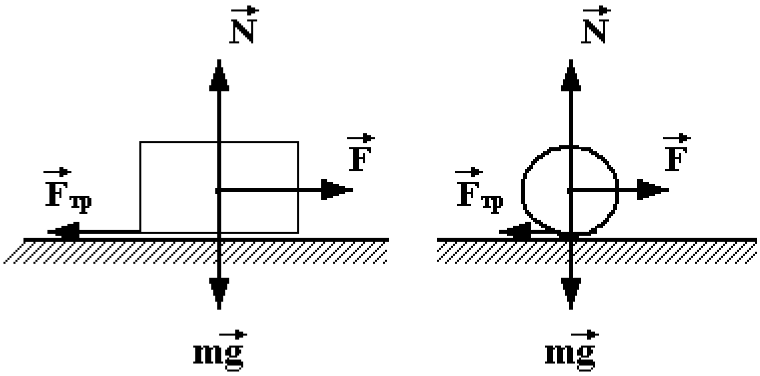

Рисунок.4.3

До тих пір, поки зовнішня сила F не перевищить деякого значення сили тертя рівної:

$$F_{тр} = \mu \cdot F_{н.д.} \tag{4.9}$$

тіло знаходитиметься у спокої. Цей закон був експериментально встановлений Кулоном в 19 ст. У формулі (4.9) величина $F_{н.д.}$ називається силою нормального тиску, а μ - коефіцієнт тертя, який залежить від природи і стану дотичних поверхонь. У разі тертя кочення закон Кулона - формула (4.9) також виконується, але коефіцієнт тертя μ в цьому випадку значно менший.

Сили тертя можуть бути як корисними, так і шкідливими. Для зменшення сил тертя застосовуються:

- мастило;
- заміна тертя ковзання на тертя кочення (шарикові підшипники);
- створення повітряної подушки в просторі між поверхнями, що труться.

4.3 Сили опору.

На тіло, яке рухається в пружному середовищі, діє сила опору, залежна від форми тіла, а також від швидкості його руху. Причому, при малих швидкостях руху сила опору $F_{опр} \sim \upsilon$, а при великих швидкостях - $F_{опр} \sim \upsilon^2$. Як критерій для розрізнення малих і великих швидкостей служить безрозмірне число Рейнольдса – Re. Число Рейнольдса визначає характер руху рідини (газу) і дорівнює:

$$\mathrm{Re} = \frac{D \cdot \upsilon \cdot \rho}{\eta} = \frac{D \cdot \upsilon}{\nu} \tag{4.10}$$

де D – величина, що характеризує лінійні розміри тіла, обтічного рідиною (газом), υ - швидкість течії, ρ - густина , η - динамічна в'язкість. Відношення:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{4.11}$$

називається кінематичною в'язкістю. Критичне значення числа Рейнольдса, що визначає перехід від ламінарної течії до турбулентної, різне для тіл різної форми. У простому випадку при русі в пружному середовищі з малою швидкістю кулі формула для сили опору може бути виведена аналітично:

$$F_c = 6\pi\eta r\upsilon \tag{4.12}$$

де r – радіус кулі. Сила, що визначається формулою (4.12) називається силою Стокса.

Розглянемо, наприклад, металеву кульку, яка падає в рідині (рис.4.4). Під час руху на кульку діють сили: $m\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{F}_A$ - сила Архімеда та $\vec{F}_C$. Дослід показує, що рух кульки в рідині рівномірний.

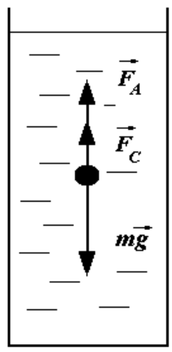

Рисунок 4.4

Це відбувається тому, що сила Стокса залежить від швидкості руху. При потраплянні кульки в рідину $\vec{F}_C$ швидко зростає до значення, при якому виконується умова: $\sum_i \vec{F}_i = 0$. В результаті, згідно першого закону Ньютона, подальше зростання швидкості припиняється.

Штучно збільшуючи поверхню і надаючи їй певну форму можна сильно збільшити силу опору. Так наприклад рух парашутиста в повітрі із закритим парашутом відбувається із швидкістю $\upsilon \approx 60$ м/с, а з розкритим парашутом – із швидкістю 6 м/с.

4.4 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції

Системи відліку, які рухаються з прискоренням відносно деякої інерціальної системи відліку, називаються неінерціальними. В таких системах, так само як і в інерціальних системах, справедливі закони Ньютона, але до всіх інших сил, що діють на тіла, в таких системах необхідно додати сили інерції.

Нехай система відліку S' неінерціальна, тобто рухається з деяким прискоренням $\vec{a}$ відносно інерціальної системи S (рис.4.5).

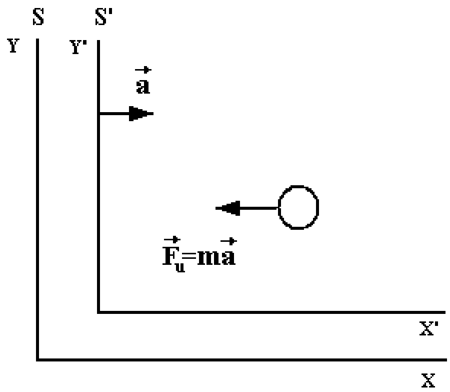

Рисунок 4.5

Розглянемо тіло нерухоме в системі S. Відносно системи S' це тіло рухатиметься з прискоренням $\vec{a}$, тобто можна вважати, що на тіло діє сила:

$$F_i = m \cdot a, \tag{4.13}$$

яка називається силою інерції. Напрямок сили $\vec{F}_u$ протилежний напрямку, в якому рухається система S′. (Приклад – кабіна ліфта).

4.5 Відцентрова сила інерції.

Розглянемо горизонтальний диск, що обертається з кутовою швидкістю ω відносно перпендикулярної до нього осі Z, що проходить через його центр. Нехай на диску знаходиться невелике тіло масою m (рис. 4.6).

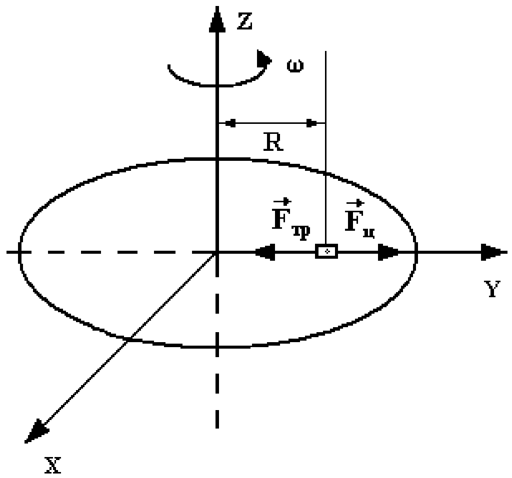

Рисунок 4.6

Будемо поступово збільшувати кутову швидкість обертання диску від 0 до певного значення ω, при якому тіло починає рухатись Зрозуміло, що при цьому на тіло діє деяка радіальна сила $F_ц$, направлена від центру обертання, що перевищує силу тертя між тілом та поверхнею диска: $F_ц > F_{тр}$. Ця сила називається <u>відцентровою силою інерції</u> і дорівнює:

$$F_ц = -m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = -m \cdot \omega^2 \cdot R \tag{4.14}$$

У формулі (4.14) величина:

$$a_ц = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 \cdot R \tag{4.15}$$

є доцентрове прискорення.

<u>4.5 Сила Коріоліса</u>.

Під час руху тіла, яке знаходиться в системі відліку, що обертається, окрім відцентрової сили з'являється ще одна сила інерції – <u>сила Коріоліса</u>. Нехай горизонтальний диск обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно осі, що проходить перпендикулярно диску через його центр. Нехай по поверхні диска радіально від центру з швидкістю $\vec{u}$ рухається тіло (рис. 4.7).

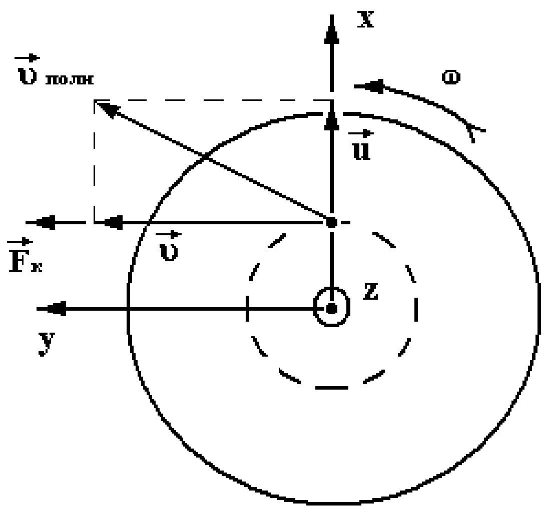

Рисунок 4.7

Повна швидкість тіла у будь-який момент часу визначається сумою радіальною і тангенціальною складових:

$$\vec{\upsilon}_{пов} = \vec{u} + \vec{\upsilon} \ , \tag{4.16}$$

Тоді на тіло діятиме сила, $\vec{F}_k$ одночасно перпендикулярна векторам $\vec{\omega}$ і $\vec{u}$. За напрямок вектора $\vec{\omega}$ береться напрямок поступального руху правого гвинта при його обертанні. Якщо тіло рухатиметься радіально до центру, то напрямок сили $\vec{F}_k$ зміниться на протилежний.

З'ясуємо походження сили Коріоліса. Нехай за проміжок часу тіло Δt перемістилося з положення 1 в положення 2 (рис.4.8). Повне прискорення за визначенням є:

$$\vec{a}_{пов} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_{пов}}{\mathrm{dt}} \quad . \tag{4.17}$$

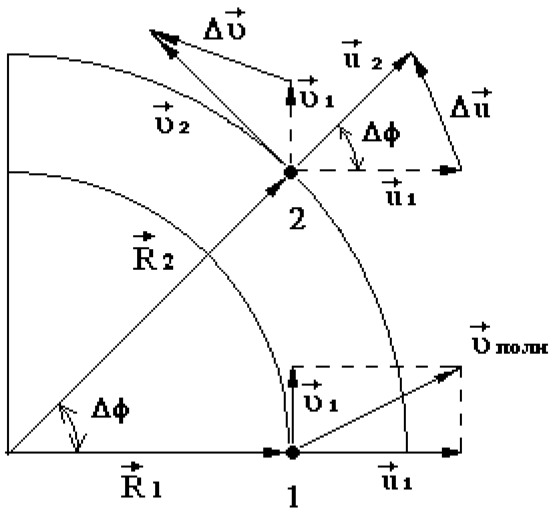

Рисунок 4.8

Тангенціальна складова $\vec{\upsilon}$ змінюється як по модулю, так і по напряму. Радіальна складова $\vec{u}$ змінюється тільки по модулю. Диференціювання по формулі (4.17) дає:

$$\vec{a}_{пов} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{dt}} + \frac{d\vec{u}}{dt} \quad . \tag{4.18}$$

Розглянемо перший доданок у формулі (4.18):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{dt}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \tag{4.19}$$

де a_τ - тангенціальне прискорення, яке дорівнює:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{dt}} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \omega \cdot \frac{dR}{dt} = \omega \cdot u \tag{4.20}$$

оскільки $u = \dfrac{dR}{dt}$, а $\vec{a}_n$ є в даному випадку доцентрове прискорення $\vec{a}_ц$.

Розглянемо другий доданок у формулі (4.18).

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \tag{4.21}$$

З геометрії завдання запишемо: $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi = \frac{\Delta u}{u}$, тобто $\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u\Delta\varphi}{\Delta t}$ або

$$\frac{du}{dt} = u \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega\upsilon \qquad (4.22)$$

Таким чином, повне прискорення містить два однакових доданки -$\omega \cdot \upsilon$, і може бути представлено у вигляді:

$$\vec{a}_{пов} = 2\left[\vec{\omega} \cdot \vec{u}\right] + \vec{a}_{ц} \qquad (4.23)$$

У формулі (4.23) прискорення:

$$\vec{a}_k = 2\left[\vec{\omega} \cdot \vec{u}\right] \qquad (4.24)$$

Називається прискоренням Коріоліса і відповідна йому сила називаються силою Коріоліса:

$$\vec{F}_k = m\vec{a}_k = 2m\left[\vec{\omega} \cdot \vec{u}\right]. \qquad (4.25)$$

Напрямок сили Коріоліса визначається за правилом векторного добутку.

Лекція 5

Тема: Робота та енергія

Питання:
5.1 Робота змінної сили. Потужність.
5.2 Кінетична енергія тіла та її зв'язок з роботою.
5.3 Потенціальна енергія матеріальної точки в зовнішньому силовому полі.
5.4 Закон збереження енергії.

5.1 Робота змінної сили. Потужність.

Нехай тіло рухається по деякій криволінійній траєкторії. Розіб'ємо траєкторію на малі ділянки ds, які можна вважати відрізками прямої.

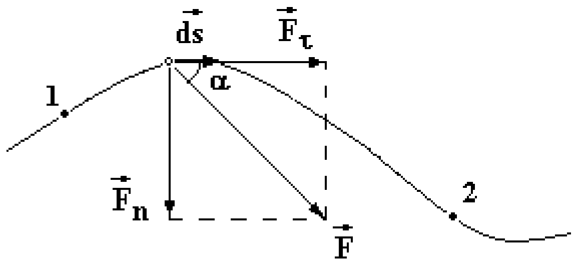

Рисунок 5.1

Елементарна робота сили $\vec{F}$ на ділянці $d\vec{s}$ рівна:

$$A = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = F \cdot ds \cdot \cos\alpha \qquad (5.1)$$

Робота на ділянці траєкторії 1-2 визначиться інтеграцією:

$$A = \int_{1-2} (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_{1-2} F \cdot \cos\alpha \cdot ds \qquad (5.2)$$

При $\vec{F} = const$ і $\alpha = const$ рівняння (5.2) спрощується до вигляду:

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad (5.3)$$

Перша похідна від роботи за часом називається потужністю:

$$P = \frac{dA}{dt} \qquad (5.4).$$

В системі одиниць *СІ* робота вимірюється в джоулях, причому *1Дж = 1Н х 1м·*, а потужність у ватах, причому *1Вт=1Дж/1с.*

5.2 Кінетична енергія тіла та її зв'язок з роботою.

Нехай під дією сили F тіло масою m змінило свою швидкість від υ_1 до υ_2 (рис. 5.2).

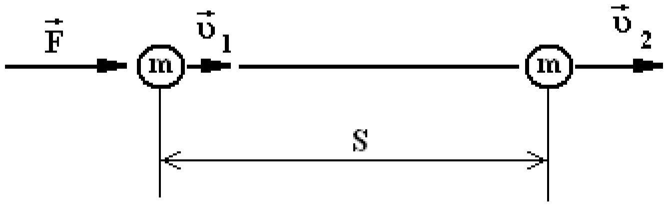

Рисунок 5.2

при цьому силою F була здійснена робота. А, рівна:

$$A=\int F\cdot ds=\int m\cdot\frac{d\upsilon}{dt}\cdot ds=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\cdot\upsilon\cdot d\upsilon=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2} \quad (5.5).$$

Величина:

$$E_k=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{p^2}{2m} \quad (5.6)$$

називається кінетична енергія. Т.ч., робота сили при переміщенні матеріальної крапки (тіла) рівна приросту її кінетичної енергії. Це твердження справедливе як для зовнішніх, так і для внутрішніх сил. Отже, кінетична енергія в замкнутій системі може, як зростати, так і зменшуватися за рахунок інших видів енергії, наприклад потенційній енергії, на відміну від імпульсу, який в замкнутій системі є завжди величина постійна.

5.3 Потенціальна енергія матеріальної точки в зовнішньому силовому полі.

Сили, робота яких по замкнутому контуру рівна нулю, називаються консервативними. Консервативною є сила тяжіння і всі центральні сили. Робота таких сил не залежить від форми траєкторії і визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла. Решта всіх сил називається неконсервативними. Для системи тіл, де діють консервативні сили можна ввести поняття потенційної енергії.

1) Потенційна енергія в однорідному полі тяжкості.

Якщо тіло під дією сили тяжіння переміститься на деяку відстань, наприклад, впаде з висоти h, то при цьому сила тяжіння зробить роботу, рівну початковій потенційній енергії тіла *En*:

$$A=E_n=\int F\cdot ds=\int mg\cdot ds=mgh+C \quad (5.7).$$

При цьому нульовий рівень енергії визначається довільно: це може бути поверхня Землі, рівень моря, рівень підлоги в аудиторії і тому подібне. Говорять, що потенційна енергія визначається в точністю до довільної адитивною постійною, яка в рівнянні (5.7) є стала інтегрування.

2) Потенційна енергія гравітаційного тяжіння двох матеріальних точок.

Нехай в гравітаційному полі нерухомої маси *M* з нескінченності до деякої відстані *R* переміщається маса *m*.

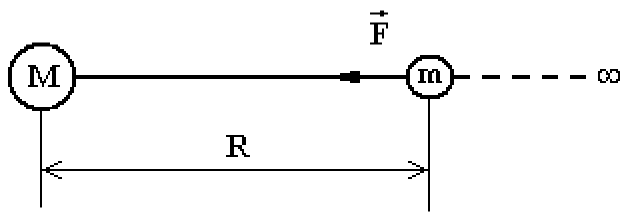

Рисунок 5.3

При цьому гравітаційною силою буде здійснена робота:

$$A=\int_R^\infty F\cdot dr=\int_R^\infty \gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}dr=\gamma\cdot\frac{M\cdot m}{R} \quad (5.7).$$

Ця робота рівна зменшенню потенційної енергії системи:

$$A=E_\infty-E_n \quad (5.8).$$

Зазвичай величина E_∞ - потенційна енергія на нескінченності, приймається рівною нулю. Таким чином маємо:

$$E_n=-\gamma\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{R}} \quad (5.9).$$

5.4 Закон збереження енергії.

Нехай матеріальна точка переміщується в потенційному полі з положення 1 в положення 2 (рис. 5.4).

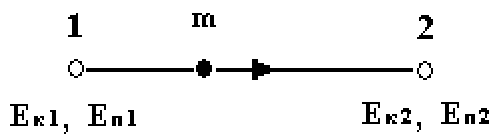

Рисунок .5.4

При такому переміщенні сили поля зроблять роботу. А, рівну:

$$A = E_{к2} - E_{к1}; \qquad A = E_{п1} - E_{п2} \quad , \tag{5.10}$$

тобто:

$$E_{к2} - E_{к1} = E_{п1} - E_{п2} \qquad \text{або} \qquad E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2} \tag{5.11}$$

Отже, повна механічна енергія матеріальної точки при переміщенні в полі консервативних сил є величина стала:

$$E_{полн} = E_{к} + E_{п} = const \tag{5.12}$$

Цей результат може бути узагальнений на систему матеріальних крапок або тіл: у системі тіл, де діють консервативні сили, повна механічна енергія є величина стала.

Макроскопічна механіка враховує тільки рух макроскопічних тіл і їх макроскопічних частин, а також їх потенційну енергію, але вона повністю відволікається від атомістичної будови речовини.

При не пружному ударі, терті і тому подібне кінетична енергія видимого руху тіл не пропадає – вона переходить в кінетичну енергію хаотичного руху атомів і в потенційну енергію їх взаємодії. Ця частина енергії отримала назву внутрішньої або теплової енергії.

Приблизно з другої половини 19 ст. уявлення про теплоту, як про хаотичний рух атомів, затверджуються остаточно. Тоді ж затверджується погляд на закон збереження енергії як на загально фізичний закон, що не знає виключень:

енергія не створюється і не знищується, вона тільки переходить з однієї форми в іншу.

Лекція 6

Тема: Динаміка обертального руху

Питання:

6.1 Момент сили відносно нерухомої вісі.
6.2 Момент імпульсу.
6.3 Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла.
6.4 Моменти інерції тіл правильної геометричної форми.
6.5 Центр мас. Теорема про рух центра мас.
6.6 Теорема Штейнера.

6.1 Момент сили відносно нерухомої вісі.

Нехай тіло довільної форми має закріплену вісь обертання в т.О і на тіло діють сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

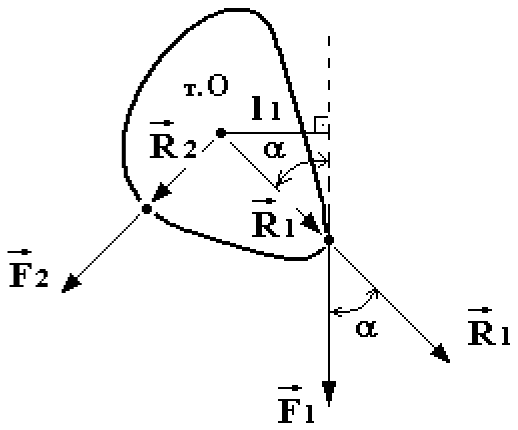

Рисунок.6.1

Тоді говорять, що сила $\vec{F}_1$ створює відносно осі, що проходить через т. О обертаючий момент, рівний:

$$\vec{M}_1 = \left[\vec{R}_1 \cdot \vec{F}_1\right] \quad . \tag{6.1}$$

Модуль вектора $\vec{F}_1$ рівний:

$$M_1 = F_1 \cdot R_1 \cdot \sin\alpha , \tag{6.2}$$

де α - кут між векторами $\vec{R}_1$ і $\vec{F}_1$. Напрямок вектора $\vec{M}_1$ визначається за правилом векторного добутку: Поворот від першого у векторному добутку - вектора $\vec{R}$ до другого вектора $\vec{F}$ з вершини третього вектора $\vec{M}$ повинен бути видний проти годинникової стрілки.

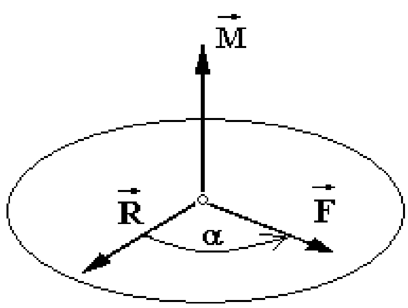

Рисунок 6.2

Говорять, що вектори, $\vec{R}$ $\vec{F}$ і складають $\vec{M}$ праву трійку векторів. Величина, рівна твору: $l = R \cdot \sin\alpha$ називається <u>плечем сили</u> F, таким чином формула (6.2) може бути записана у вигляді:

$$M_1 = F_1 \cdot l_1, \tag{6.3}$$

тобто <u>момент сили є добуток цієї сили на її плече</u>. Сила $\vec{F}_2$, показана на рис.6.1, не створює обертаючого моменту, оскільки лінія її дії проходить через вісь обертання – т.О; вектори $\vec{R}_2$ і $\vec{F}_2$ колінеарні, отже $\vec{M}_2 = 0$.

<u>6.2 Момент імпульсу</u>.

Нехай матеріальна точка масою m обертається на постійній відстані R від осі обертання ОО $'$з постійною кутовою швидкістю ω, отже, її лінійна швидкість по модулю не змінюється: $\upsilon = const$. Тоді говорять, що матеріальна точка відносно осі ОО $'$ має момент імпульсу $\vec{L}$.

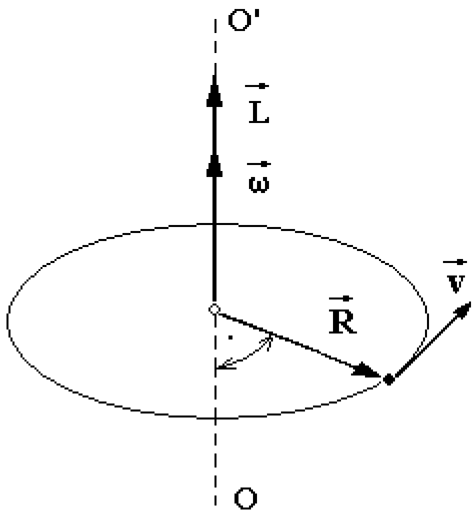

Рисунок 6.3

Момент імпульсу визначається як:

$$\vec{L} = \left[\vec{R} \cdot \vec{p}\right] , \tag{6.4}$$

де $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$ - імпульс матеріальної крапки. По модулю момент імпульсу рівний:

$$L = p \cdot R \cdot \sin\alpha . \tag{6.5}$$

де α - кут між векторами $\vec{R}$ і $\vec{p}$. Враховуючи, що $\upsilon = \omega \cdot R$, а $\alpha = \frac{\pi}{2}$, формула (6.4) перетвориться на вигляд:

$$L = m \cdot \upsilon \cdot R = m \cdot R^2 \cdot \omega \tag{6.6}$$

Якщо, як це має місце в нашому випадку, точка обертається по колу постійного радіусу, то величина $m \cdot R^2 = const$. Ця величина називається моментом інерції матеріальної точки і визначається:

$$I = m \cdot R^2 . \tag{6.7}$$

За допомогою моменту інерції момент імпульсу матеріальної крапки представиться у вигляді:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \ . \qquad (6.8)$$

За напрям вектора $\vec{\omega}$ береться напрямок поступального руху правого гвинта.

6.3 Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла.

Нехай тепер тіло довільної форми має можливість обертатися навколо нерухомої осі OO′. Розіб'ємо тіло на елементарні маси dm_i. Нехай відстань від кожної такої маси до осі - r_i.

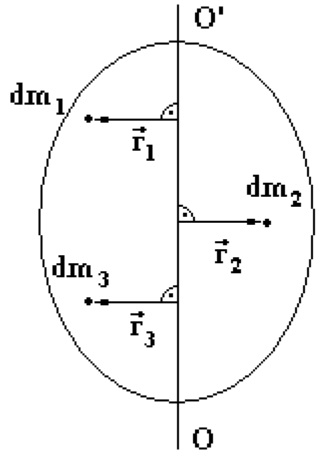

Рисунок.6.4

Тоді момент інерції такого тіла відносно осі OO ′може бути представлений у вигляді:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i , \qquad (6.9)$$

або

$$I = \int r^2 \cdot dm . \qquad (6.10)$$

Для тіл правильної геометричної форми інтеграл (6.10) може бути взятий аналітично.

6.4 Моменти інерції тіл правильної геометричної форми.

Визначимо моменти інерції для наступних тіл правильної геометричної форми: 1) обруча, 2) однорідного диска (циліндра), 3) стрижня.

1) Обруч

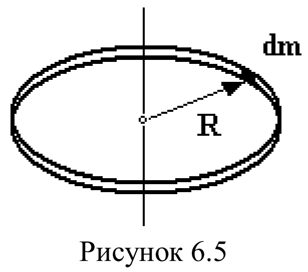

Рисунок 6.5

Розіб'ємо обруч на нескінченно малі елементи dm. Тоді, відповідно до формули (6.10), враховуючи, що $R = const$, після інтегрування отримаємо:

$$I = \int r^2 \cdot dm = m \cdot R^2 .$$

Таким чином момент інерції обруча відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині обруча, рівний:

$$I_1 = m \cdot R^2 \qquad (6.11).$$

2) Однорідний диск (циліндр).

Виріжемо через всю товщу диску радіусу R і завтовшки h порожній циліндр радіусом r, товщиною dr і масою dm.

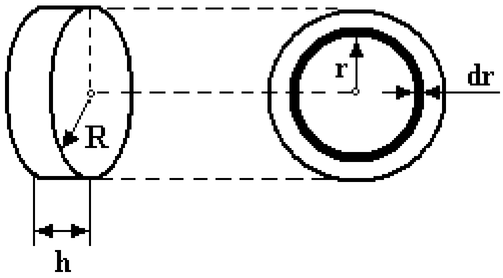

Рисунок 6.6

За визначенням моменту інерції: $I = \int r^2 \cdot dm$, де dm - маса вирізаного циліндра рівна:

$$dm = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot h \cdot \rho \qquad (6.12)$$

Таким чином, момент інерції диску (циліндру) дорівнює:

$$I_2 = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot h \cdot \rho \cdot dr = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{1}{2}\pi h\rho R^4 \ , \qquad (6.13)$$

але $\pi R^2 h\rho = m$ - маса циліндра, тобто остаточно маємо:

$$I_2 = \frac{mR^2}{2} \qquad (6.14).$$

3) Стрижень.

Визначимо момент інерції однорідного стрижня відносно осі, що проходить перпендикулярно стрижню через його центр. Розіб'ємо стрижень на нескінченно малі елементи масами dm.

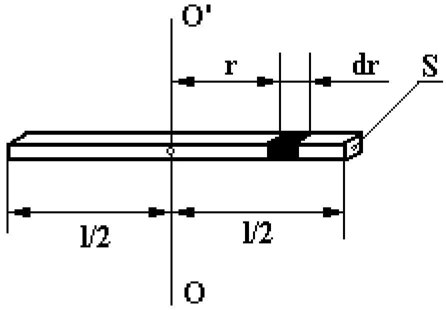

Рисунок 6.7

За визначенням моменту інерції: $I = \int r^2 \cdot dm$, де dm - маса вирізаного нескінченно малого елементу рівна: $dm = dr \cdot S \cdot \rho$. Таким чином маємо.:

$$I_3 = 2\int_0^{l/2} r^2 \cdot S \cdot \rho \cdot dr = \frac{1}{12} l^3 \cdot S \cdot \rho \ , \qquad (6.15)$$

але $l \cdot S \cdot \rho = m$, тобто маємо:

$$I_3 = \frac{ml^2}{12} \qquad (6.15).$$

6.5 Центр мас. Теорема про рух центра мас.

Розглянемо систему матеріальних точок масами $m_1,\ m_2,\ m_3, \ldots$з відповідними радіус-векторами $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3,$. Центром мас (центром інерції), системи (тіла) називається така уявна точка, радіус-вектор якої виражається формулою:

$$\vec{R}_C = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{m}_{2.} \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + \ldots}{m} \tag{6.16}$$

або в інтегральній формі:

$$R_C = \frac{1}{m} \cdot \int r \cdot dm \tag{6.17}$$

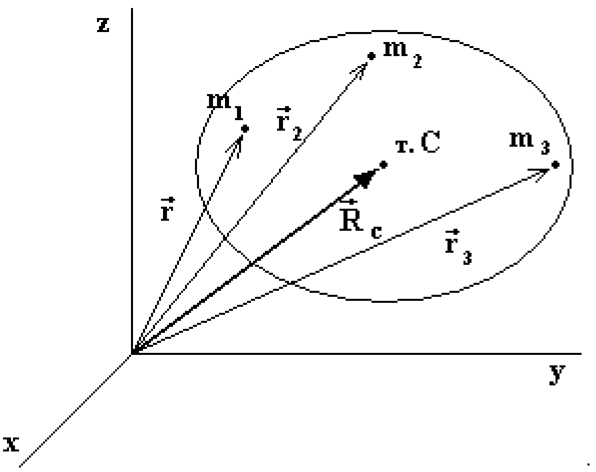

Рисунок 6.8

де $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ - маса всієї системи. Диференціювання формули (6.16) приводить до результату:

$$m\frac{d\vec{R}_C}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3\frac{d\vec{r}_3}{dt} + \ldots,$$

або

$$m\vec{V}_C = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + m_3\vec{\upsilon}_3 + \ldots \tag{6.18}$$

Таким чином, відповідно до формули (6.18), повний імпульс системи рівний векторній сумі імпульсів її складових частин. Друге диференціювання приводить до другого закону Ньютона:

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots \tag{6.19}$$

<u>Теорема про рух центру мас.</u>

<u>Центр мас системи (тіла) рухається як матеріальна точка, маса якої рівна масі всієї системи, а сила, що діє, рівна векторній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему</u>.

<u>6.6 Теорема Штейнера.</u>

Нехай для тіла правильної геометричної форми відносно осі, що проходить через його центр мас, був визначений момент інерції I_0. Визначимо момент інерції I цього тіла відносно осі, що проходить паралельною даній і віддаленою від неї на відстані a.

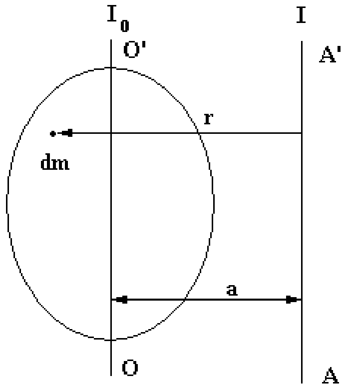

Рисунок 6.9

За визначенням моменту інерції в даному випадку маємо:

$$I = \int (r+a)^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot dm + \int a^2 \cdot dm + \int 2ar \cdot dm \qquad (6.16).$$

У формулі (6.16):

$$\int r^2 \cdot dm = I_0\,; \qquad \int a^2 \cdot dm = ma^2\,; \qquad \int 2ar \cdot dm = 2a\int r \cdot dm = 2amR_C = 0\,,$$

$R_C = 0$, оскільки вісь OO $'$проходить через центр мас. Отже, маємо:

$$I = I_0 + ma^2 \qquad (6.17)$$

Вираз (6.17) називається <u>теоремою Штейнера</u>: <u>Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює моменту інерції цього тіла відносно осі паралельною даній , що проходить через центр мас складеному з величиною ma^2, де a - відстань між осями.</u>

Лекція 7

Тема: Основне рівняння динаміки обертального руху

Питання:
7.1 Основне рівняння динаміки обертального руху.
7.2 Закон збереження моменту імпульсу.
7.3 Кінетична енергія тіла, що обертається.
7.4 Поняття про гіроскоп.

7.1 Основне рівняння динаміки обертального руху.

Момент імпульсу матеріальної точки (тіла) можна записати двома еквівалентними формулами:

$$\vec{L} = \left[\vec{R} \cdot \vec{p}\right], \qquad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}. \tag{7.1}$$

Тобто:

$$\left[\vec{R} \cdot \vec{p}\right] = I \cdot \vec{\omega}. \tag{7.2}$$

Диференціювання цього виразу по часу у випадку коли $R = const$ дає:

$$\left[\vec{R} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{7.3}$$

У формулі (7.3) похідна:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{7.4}$$

є сила, що діє на тіло, а похідна:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \tag{7.5}$$

є кутове прискорення, з яким обертається тіло. З використанням формул (7.4) та (7.5) рівняння (7.3) перетворюється на вигляд:

$$\left[\vec{R} \cdot \vec{F}\right] = I \cdot \vec{\varepsilon} \tag{7.6}$$

і остаточно:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}. \tag{7.7}$$

Рівняння (7.7) називається основним рівнянням динаміки обертального руху. Це рівняння цілком еквівалентне другому закону Ньютона для поступального руху, що видно з порівняльної таблиці, представленої на рис. 7.1.

Поступальний рух		Обертальний рух
F=ma	⟷	M=Iε
F	⟷	M
m	⟷	I
a	⟷	ε

Рисунок 7.1

Якщо на тіло діє декілька моментів зовнішніх сил, то основне рівняння динаміки обертального руху формулюється в такий спосіб:

Якщо сума моментів зовнішніх сил, що діють на тверде тіло відрізняється від нуля, то тверде тіло обертається з кутовим прискоренням прямо пропорційним сумі моментів зовнішніх сил і обернено пропорційним моменту інерції тіла:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\sum_i \vec{M}_i}{I} \; . \qquad (7.8)$$

Порівняймо формулу (7.8) з другим законом Ньютона для поступального руху:

$$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} \, .$$

7.2 Закон збереження моменту імпульсу.

Між моментом імпульсу і результуючим моментом зовнішніх сил існує зв'язок:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (7.9).$$

Нехай сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіло (систему) рівна нулю:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0 \qquad (7.10)$$

отже: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, але це можливо тільки у тому випадку, коли:

$$\vec{L} = const \qquad (7.11)$$

Якщо момент зовнішніх сил, які діють на тіло (систему тіл) дорівнює нулю, то момент імпульсу такої системи є величина постійна.

Це твердження називається закономом збереження моменту імпульсу. Говорять, що закон збереження моменту імпульсу є наслідком **ізотропності** простору. Це твердження слід розуміти так: Якщо замкнуту систему повернути в просторі на будь-який кут, поставивши при цьому всі тіла в ній в ті ж умови, в яких вони знаходилися в колишньому положенні, то це ніяк не відіб'ється на перебігу всіх подальших явищ.

7.3 Кінетична енергія тіла, що обертається.

Нехай під дією постійної по модулю дотичної сили $\vec{F}$ матеріальна точка із стану спокою починає рухатися по колу радіусу R. Нехай за проміжок часу dt точка пройшла шлях ds (рис.7.2).

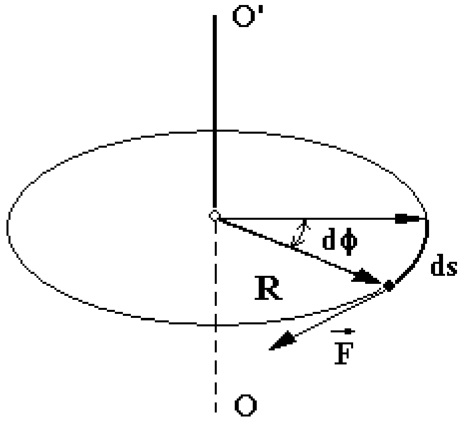

Рисунок 7.2

Елементарна робота, яку сила $\vec{F}$ виконує на шляху dS, буде рівна:

$$dA = F \cdot dS \tag{7.12}$$

З геометрії завдання для малих кутів:

$$\sin d\phi \approx d\phi = \frac{dS}{R}. \tag{7.13}$$

Таким чином маємо:

$$dA = F \cdot R \cdot d\phi \tag{7.14}$$

Або, враховуючи що: $F \cdot R = M$,

$$dA = M \cdot d\phi \tag{7.15}$$

Використовуючи основне рівняння обертального руху $M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$, отримаємо:

$$dA = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\phi = I \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot d\omega = I \cdot \omega \cdot d\omega. \tag{7.16}$$

Нехай за деякий час під впливом зовнішнього обертального моменту кутова швидкість змінилася від ω_1 до ω_2, тоді, для відповідної роботи, після інтеграції отримаємо:

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \cdot d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} \qquad (7.17).$$

У формулі (7.17) величина:

$$E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \tag{7.18}$$

є <u>кінетична енергія тіла, що обертається.</u> Таким чином, робота сили $\vec{F}$ або її моменту $\vec{M}$ витрачається на приріст кінетичної енергії тіла, що обертається, тобто величина:

Якщо тіло водночас рухається поступально та обертається (наприклад колесо – рис.7.3),

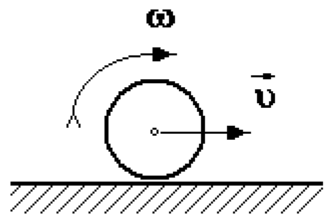

Рисунок 7.3

то його повна кінетична енергія складається з кінетичної енергії його поступального руху та кінетичної енергії його обертального руху:

$$E_{к.полн} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{7.19}$$

7.4 <u>Поняття про гіроскоп.</u>

<u>Гіроскоп</u> (gyreou – кружляюся, обертаюся; skopeo – дивлюся, спостерігаю) – симетричне тверде тіло, яке швидко обертається і вісь обертання якого може змінювати свою орієнтацію у просторі. (Простий приклад гіроскопа – дитяча іграшка дзиґа).

Властивості гіроскопа мають небесні тіла, що обертаються, артилерійські снаряди, ротори турбін, гвинти літаків і так далі Гіроскопічні ефекти виявляються також у атомів, атомних ядер, електронів завдяки наявності у них власних моментів кількості руху.

У сучасній техніці гіроскоп – основний елемент ряду пристроїв і приладів. Маса гіроскопів коливається в межах від декількох грам до десятків кілограм; частота обертання може досягати 60’000 об/хв. Гіроскопи застосовуються для:

- автоматичного управління рухом літаків, судів, ракет, торпед;
- цілей навігації як покажчики курсу, горизонталі, кута повороту;
- вимірювання кутових і поступальних швидкостей об'єктів і тому подібне.

Щоб вісь гіроскопа могла вільно повертатися в просторі, гіроскоп зазвичай поміщають в кільцях так званого карданова підвісу (рис. 7.4).

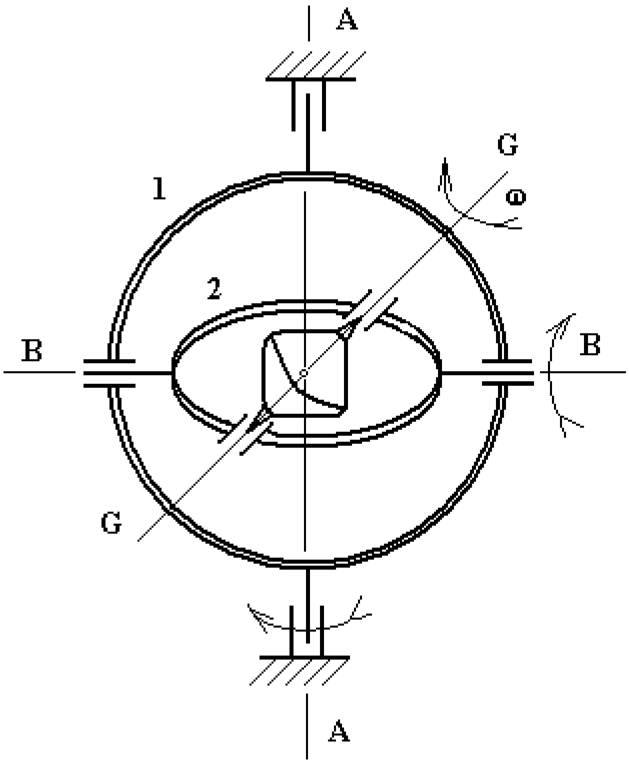

Рисунок 7.4

Кільце 1 може вільно повертатися навколо осі АА; кільце 2 може вільно повертатися в кільці 1 щодо осі ВВ. Таким чином вісь обертання гіроскопа GG може бути довільно орієнтована в просторі. Теорія гіроскопа побудована на основному рівнянні динаміки обертального руху, яке записують у вигляді:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \ . \tag{7.20}$$

Основні властивості гіроскопа.

1). З основного рівняння механіки обертального руху виходить, що при $\vec{M} = 0$, $\vec{L} = const$, тобто якщо сума моментів зовнішніх сил що діють на гіроскоп рівна нулю, то момент імпульсу гіроскопа постійний як по модулю, так і по напрямку. Це означає, що вісь обертання гіроскопа зберігатиме незмінною орієнтацію у просторі по відношенню до нерухомих зірок.

2). Якщо гіроскоп з достатньо великим моментом інерції I привести в обертання з великою кутовою швидкістю ω, то момент імпульсу L також буде великим, оскільки $L = I \cdot \omega$. Нехай на такий гіроскоп подіяв протягом деякого часу Δt момент зовнішніх сил M . Зміна моменту імпульсу гіроскопа визначиться як:

$$\Delta L = \int M \cdot dt \tag{7.21}$$

Якщо дія моменту сили була короткочасною, то виконуватиметься умова: $\Delta L << L$. Отже, при короткочасних діях навіть дуже великих сил (наприклад, при ударі) рух вільного гіроскопа практично не змінюється.

3). Розглянемо гіроскоп, власна ось обертання якого створює з вертикаллю певний кут

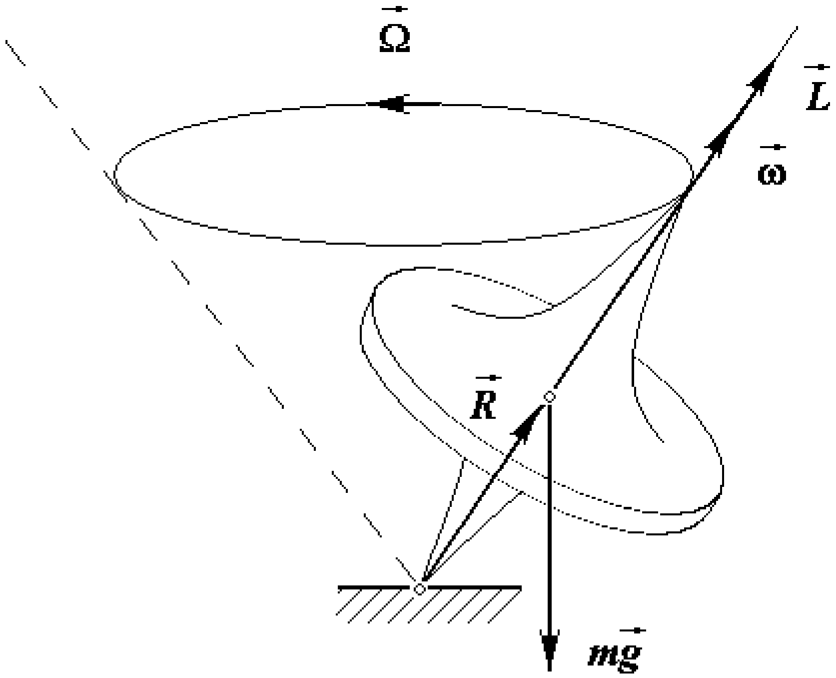

Рисунок 7.5

$\vec{R}$ - радіус-вектор, що сполучає точку підвісу з центром гіроскопа. Вектор $m\vec{g}$ створює обертаючий момент $\vec{M}$, який дорівнює:

$$\vec{M} = \left[\vec{R} \cdot m\vec{g}\right] \tag{7.22}$$

і змушує власну ось обертання гіроскопа обертатись з певною кутовою швидкістю Ω, рівною:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{7.23}$$

Таке обертання гіроскопа називається <u>прецесія.</u>.

Лекція 8

Тема: Механічні коливання.

Питання:

8.1 Механічні коливання. Гармонічні коливання.
8.2 Коливання пружинного маятника.
8.3 Коливання фізичного маятника.
8.4 Коливання математичного маятника.
8.5 Коливання стержня.
8.6 Затухаючі коливання.
Диференціальне рівняння затухаючих коливань, його розв'язок.
8.7 Характеристики затухаючих коливань:
коефіцієнт затухання, логарифмічний декремент, час релаксації, добротність.
8.8 Вимушені коливання. Резонанс.

8.1 Механічні коливання. Гармонічні коливання.

Коливаннями називають процеси, які мають певний ступінь повторюваності. Таку повторюваність демонструють наприклад рухи маятників (зокрема маятники механічних годинників), рухи струн музичних інструментів і т.н. Найпростішим видом гармонічних коливань є коливання гармонічні. Гармонічними називають коливання, які здійснюються по закону sin або cos.

Нехай матеріальна точка рівномірно обертається по колу радіуса А з постійною кутовою швидкістю ω, так що кут α змінюється з часом по закону:

$$\alpha = \omega \cdot t + \varphi_0 \tag{8.1}$$

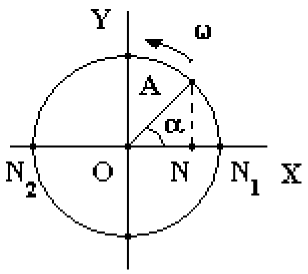

Рисунок 8.1

Проекція радіус-вектора на ось X – ON. Точка N буде здійснювати коливання від точки N_1 до точки N_2 і навпаки. Такий рух точки N називають гармонічним. Координата точки N як функція часу має вигляд:

$$ON = A \cdot \cos\alpha \text{ , або}$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{8.2}$$

В рівнянні (8.2) :

x - зміщення точки з положення рівноваги;

A - амплітуда, або максимальне зміщення точки з положення рівноваги;

$(\omega t + \varphi_0)$ - фаза коливань;

φ_0 - початкова фаза коливань.

В залежності від величини початкової фази формула (8.2) може приймати вигляд:

$$\text{при } \varphi_0 = 0 \text{ - } x = A \cdot \cos\omega t \tag{8.3}$$

$$\text{при } \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ - } x = A \cdot \sin\omega t \tag{8.4}$$

Таким чином при гармонічних коливаннях зміщення x змінюється по закону sin або cos.

Диференціювання формули (8.4) по часу приводить до результату:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos \omega t \tag{8.5}$$

Друге диференціювання дає:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin \omega t \tag{8.6}$$

Таким чином швидкість і прискорення при гармонічних коливаннях також змінюються по закону sin або cos.

Враховуючи що $x = A \cdot \sin \omega t$, формула (8.6) перетворюється на вигляд:

$$a = -\omega^2 \cdot x,$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{8.7}$$

Формула (8.7) називається диференціальним рівнянням гармонічних коливань, а рівняння (8.2) називається його розв’язком.

Сила, яка при гармонічних коливаннях діє на матеріальну точку, пропорційна зміщенню і направлена в протилежний зміщенню бік. Згідно другого закону Ньютона вона знаходиться як:

$$F = ma = -m\omega^2 x \tag{8.8}$$

8.2 Коливання пружинного маятника.

Нехай вантаж масою m підвісили до пружини жорсткістю k. При цьому пружина подовжилась на деяку величину Δx, так що сила пружності - $F_{пр} = -k \cdot \Delta x$, яка виникла в пружині, компенсувала силу тяжіння mg. Розтягнемо пружину (перемістимо вантаж) уздовж осі X на певну відстань x.

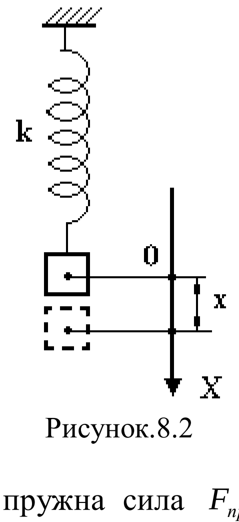

Рисунок.8.2

При цьому в пружині виникне пружна сила $F_{пр} = -k \cdot x$. Згідно другого закону Ньютона маємо:

$$ma = -kx,$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{8.9}$$

Порівняння (8.9) та (8.7) приводить до висновку, що коливання вантажу на пружині є гармонічними, крім того :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{8.10}$$

Звідки для періоду коливань вантажу на пружині, враховуючи що:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

одержуємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8.11}$$

<u>8.3 Коливання фізичного маятника.</u>

<u>Фізичний маятник</u> – це тверде тіло довільної форми, яке має можливість коливатись відносно нерухомої горизонтальної осі.

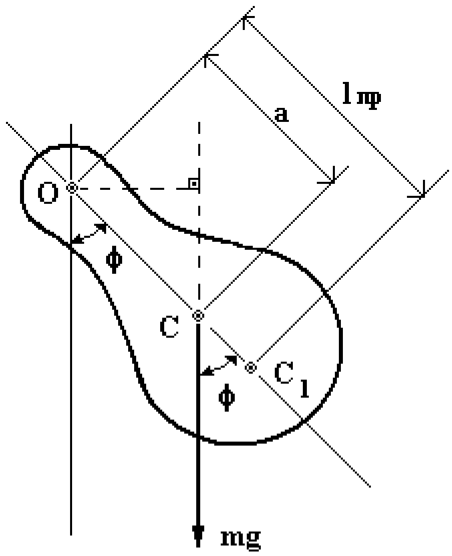

Рисунок.8.3

На малюнку 8.3 т.O – вісь обертання; т. C – центр мас маятника; т.C_1 – центр хитань. Виведемо маятник з положення рівноваги на певний кут φ. При цьому сила mg створює обертаючий момент:

$$M = -mga\sin\varphi \tag{8.12}$$

При малих кутах $\sin\varphi \approx \varphi$ і рівняння (8.12) приймає вигляд:

$$M = -mga\varphi \tag{8.13}$$

З іншого боку той самий момент згідно основного рівняння динаміки обертального руху можна записати у вигляді:

$$M = I\cdot\varepsilon,$$

або

$$M = I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{8.14}$$

З рівнянь (8.13) та (8.14) маємо:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I}\cdot\varphi = 0 \tag{8.15}$$

Рівняння (8.15) є диференціальне рівняння коливань фізичного маятника. Порівняння (8.15) та (8.7) дозволяє зробити висновок, що ці коливання гармонічні. Період цих коливань дорівнює:

$$\frac{mga}{I} = \omega^2; \qquad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mga}{I}};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \tag{8.16}$$

У формулі (8.16) величина $\frac{I}{ma}$ має розмірність довжини і називається приведеною довжиною:

$$l_{пр} = \frac{I}{ma} \tag{8.17}$$

З використанням $l_{пр}$ формула (8.16) приймає вигляд:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} \tag{8.18}$$

На відстані $l_{пр}$ від осі обертання на прямій, що поєднує т. О та т. С знаходиться т.C_1 , яка називається центром хитання. Точки О та C_1 мають властивість взаємо оберненості: якщо маятник підвісити в точці C_1, то центр хитань перейде в т. О.

8.4 Коливання математичного маятника.

Математичним маятником називають матеріальну точку, яку підвісили на невагомій нитці, що не розтягується. Математичний маятник є частковий випадок фізичного маятника. В цьому випадку момент інерції в формулі (8.16) дорівнює: $I = ma^2$, де $a = l$ - довжині маятника. Таким чином маємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Остаточно період математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8.19}$$

8.5 Коливання стержня.

Розглянемо коливання стержня, положення осі якого можна змінювати уздовж стержня.

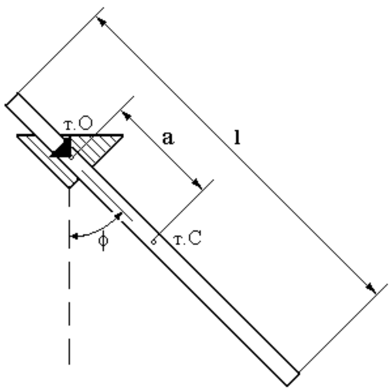

Рисунок.8.4

Такий стержень являє собою фізичний маятник. Період коливань фізичного маятника визначається за формулою (8.16)

Момент інерції I у даному випадку визначається по теоремі Штейнера:

$$I = I_0 + ma^2 \tag{8.20}$$

де I_0 – момент інерції стержня відносно осі, що проходить перпендикулярно до стержня через його центр:

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} \tag{8.21}$$

Після підстановки (8.20) і (8.21) в формулу (8.16) одержуємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12ga} + \frac{a}{g}} \tag{8.22}$$

Дослідимо формулу (8.22). Величина a може змінюватись в інтервалі: $\left[0, \frac{l}{2}\right]$.

1). При $a \to 0$, період $T \to \infty$, тобто при закріпленні стержня в центрі мас він взагалі не буде коливатись, оскільки в цьому випадку сумарний момент сил тяжіння, що діють на стержень у будь-якому його положенні дорівнюватиме нулю.

2). При $a = \frac{l}{2}$ для T одержуємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \tag{8.23}$$

3). Дослідимо формулу (8.22) на наявність екстремуму. Дослідження показує, що формула має мінімум, координата якого знаходиться з умови: $\frac{dT}{da} = 0$. Після диференціювання (8.22) знаходимо, що функція має мінімум при $a = \frac{l}{2\sqrt{3}}$, або приблизно $a \approx 0.29l$.

Таким чином теоретичний графік залежності $T = f(\frac{a}{l})$ має такий вигляд, як показано на мал.8.5.

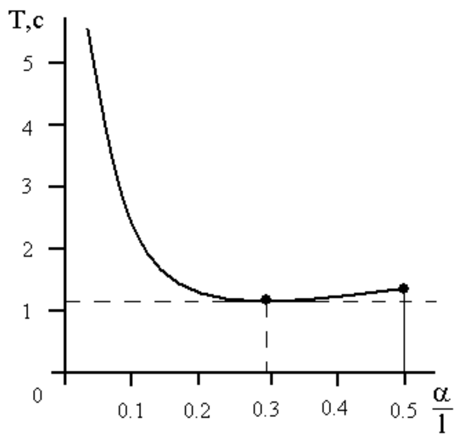

Рисунок.8.5

<u>8.6 Затухаючі коливання.</u>

<u>Диференціальне рівняння затухаючих коливань, його розв'язок.</u>

У будь-якій реальній коливальній системі існують сили тертя та опору, дія яких приводить до зменшення енергії системи (дисипація енергії). Якщо втрати енергії не поповнюються за рахунок роботи зовнішніх сил, то амплітуда коливань буде зменшуватись і коливання будуть затухати.

У першому наближенні сили опору, що діють на тіло, яке коливається у певному пружному середовищі, можна вважати пропорційними першому ступеню швидкості руху тіла і представити у вигляді:

$$F_{оп} = -r \cdot \frac{dx}{dt} \quad , \tag{8.24}$$

де $r = const$ - коефіцієнт опору, який залежить від властивостей середовища, форми тіла і т д. Запишемо рівняння затухаючих коливань вантажу на пружині. Згідно другого закону Ньютона в цьому випадку маємо:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \cdot \frac{dx}{dt} \quad , \tag{8.25}$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad . \tag{8.26}$$

У формулі (3) позначимо через:

$$2\beta = \frac{r}{m} \quad , \qquad \beta = \frac{r}{2m} \quad , \tag{8.27}$$

та через:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad . \tag{8.28}$$

Величина β називається коефіцієнт затухання, а величина ω_0 - циклічна частота власних коливань. З використанням формул (8.27) та (8.28) рівнянні (8.26) перетворюється на вигляд:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \tag{8.29}$$

Рівняння (8.29) називається диференціальне рівняння затухаючих коливань.
Розв'язок рівняння (8.29) має вигляд:

$$x = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad . \tag{8.30}$$

У формулі (8.30) ω - циклічна частота затухаючих коливань, яка дорівнює:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad . \tag{8.31}$$

Виходячи з виду формули (8.30), рух системи можна розглядати як гармонічний, амплітуда якого змінюється з часом по закону:

$$A = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \quad . \tag{8.32}$$

Графічне представлення формули (8.30) має вигляд:

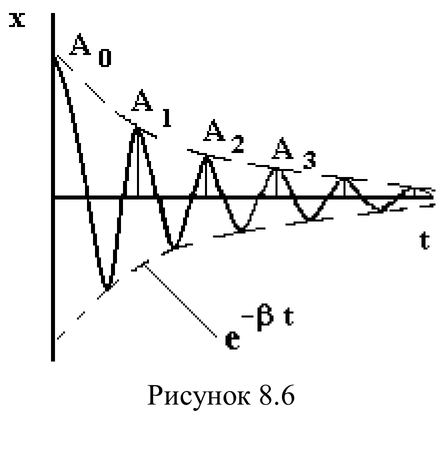

Рисунок 8.6

Швидкість затухання коливань визначається величиною коефіцієнтом затухання β: чим більше β - тим швидше затухають коливання.

9.2 Характеристики затухаючих коливань:
коефіцієнт затухання, логарифмічний декремент, час релаксації, добротність.

Крім коефіцієнта затухання β затухаючі коливання характеризуються часом релаксації τ, логарифмічним декрементом λ та добротністю Q.

Визначення 1. Час, на протязі якого амплітуда коливань зменшується в e – разів називається час релаксації.

З використанням визначення часу релаксації та рівняння (8.32) маємо:

$$\frac{A_0}{A} = e = e^{\beta\cdot\tau} \quad , \tag{8.33}$$

звідки одержуємо:

$$\beta\cdot\tau = 1 \quad , \tag{8.34}$$

таким чином, коефіцієнт затухання та час релаксації є взаємо оберненими величинами.

Визначення 2. Відношення двох амплітуд, що йдуть одна за одною через період:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)}$$

називається декремент затухання. А величина:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} \tag{8.35}$$

називається логарифмічний декремент затухання. З формули (8.33) для цього випадку маємо:

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta\cdot T} \quad , \tag{8.36}$$

$$\lambda = \ln\frac{A_0}{A} = \ln e^{\beta\cdot T} = \beta\cdot T \quad . \tag{8.37}$$

Розглянемо відношення часу релаксації до періоду коливань:

$$\frac{\tau}{T} = N_e \ , \tag{8.38}$$

де N_e - кількість коливань яку встигає здійснити система, що коливається за час релаксації. Так як $\tau = 1/\beta$, то з (18.37) маємо:

$$\frac{1}{\beta\cdot T} = N_e = \frac{1}{\lambda} \quad , \tag{8.39}$$

тобто величини N_e та λ також є взаємо оберненими.

Величина, яка визначається формулою:

$$Q = \pi\cdot N_e = \frac{\pi}{\lambda} \quad , \tag{8.40}$$

називається добротність. Тобто добротність коливальної системи тим вища, чим більшу кількість коливань вона встигає здійснити за час релаксації.

9.3 Вимушені коливання. Резонанс.

Нехай тепер на систему діє періодична сила, яка з часом змінюється по гармонічному закону:

$$F = F_0\cdot\cos\omega\cdot t \quad . \tag{8.41}$$

Тоді по другому закону Ньютона маємо:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-r\cdot\frac{dx}{dt}+F_0\cdot\cos\omega\cdot t \quad , \tag{8.42}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\cdot\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega\cdot t \, . \tag{8.43}$$

Рівняння (8.43) називається диференціальним рівнянням вимушених коливань. Розв'язок цього рівняння є періодична функція:

$$x=A\cdot\cos(\omega\cdot t-\varphi) \quad , \tag{8.44}$$

тобто у випадку вимушених коливань зміщення системи з положення рівноваги - x змінюється з часом по гармонічному закону з частотою дії зовнішньої сили ω, а амплітуда та початкова фаза є певними функціями змінних:

$$A=f(F_0,m,\omega_0,\beta,\omega) \quad , \tag{8.45}$$

$$\varphi=f(\omega_0,\beta,\omega) \quad . \tag{8.46}$$

Притому виявляється, що функція (22) при певному значенні ω_p має максимум.:

$$\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \tag{8.47}$$

і система виявляється найбільш чутливою до дії зовнішньої сили саме при цій частоті.

Визначення 3. Відносно великий селективний відгук коливальної системи (осцилятора) на періодичний вплив з частотою, близькою до частоти її власних коливань називається резонансом, а частота ω_p називається резонансною частотою.

Графік залежності амплітуди A від частоти зовнішньої сили ω представлено на рис. 2. Ця сукупність кривих називається резонансними кривими, притому максимум амплітуди виявляється тим більш різким, чим менше коефіцієнт затухання: $\beta_1<\beta_2<\beta_3$.

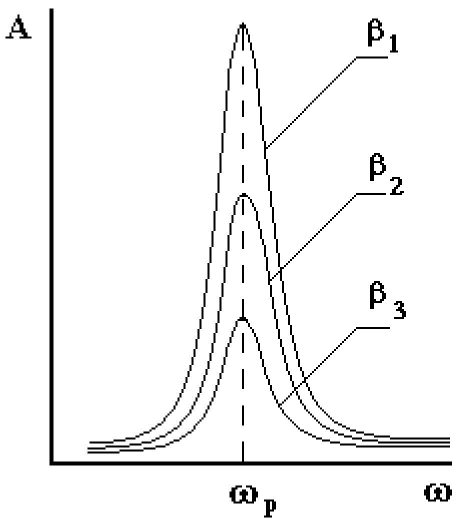

Рисунок 8.7

Механічний резонанс вперше описав Г.Галілей. На цьому явищі засновано принцип дії низки приладів, наприклад робота вібростендів, призначених для дослідження зразків та деталей машин на втому і т.д..

Лекція 9

Тема: хвилі

Питання:

9.1 Хвилі. Утворення хвиль. Повздовжні та поперечні хвилі.

9.2 Рівняння плоскої хвилі. Фазова швидкість. Хвильове число.

9.3 Хвильове рівняння. Швидкості розповсюдження хвиль.

9.1 Хвилі. Утворення хвиль. Повздовжні та поперечні хвилі.

Розглянемо певне пружне середовище, тверде, рідке або газоподібне. Частинки середовища взаємодіють одна з одною силами протягування та відштовхування. Якщо в певній точці такого середовища створити коливання його частинок, то в наслідок взаємодії між частинками коливання будуть послідовно передаватись від однієї частинки до іншої і так далі і розповсюджуватись в середовищі з певною швидкістю υ.

Процес розповсюдження коливань у просторі називається хвилею. Під час руху хвилі не відбувається переносу речовини середовища. Частинки середовища тільки здійснюють коливання відносно певних положень рівноваги.

Хвилі підрозділяють на повздовжні та поперечні в залежності від напрямку коливань частинок відносно напрямку розповсюдження хвилі. Якщо ці напрямки співпадають, то хвиля називається повздовжною; якщо ці напрямки взаємо перпендикулярні, то хвиля називається поперечною, (рис.9.1)

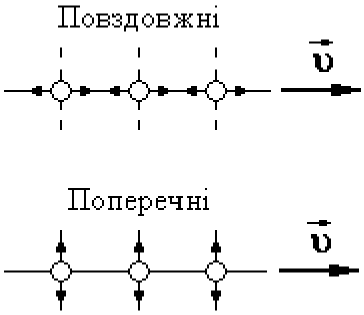

Рисунок 9.1

В рідких та газоподібних середовищах існують тільки повздовжні хвилі, тому що ці середовища не створюють опору деформації зсуву. В твердому середовищі існують як повздовжні так і поперечні хвилі.

Визначення 4. Геометричне місце точок, до яких дісталися коливання на певний момент часу t, називається хвильовий фронт.

Визначення 5. Геометричне місце точок, які коливаються в одній фазі, називається хвильова поверхня.

Хвильова поверхня може мати довільну форму. У найпростішому випадку, коли вона має форму площини, відповідна їй хвиля називається плоскою.

Визначення 6. Відстань λ, на яку розповсюджується хвиля за час одного періоду, називається довжина хвилі.

Представимо графічно поперечну хвилю, яка розповсюджується уздовж осі x з швидкістю υ, при цьому частинки середовища, в якому рухається хвиля коливаються уздовж осі y, (рис. 9.2).

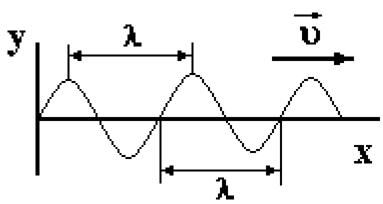

Рисунок 9.2

З графіка видно, що довжина хвилі це є також найкоротша відстань між двома будь-якими точками середовища, які коливаються в одній фазі.

Між величинами: λ - довжина хвилі, υ - швидкість розповсюдження хвилі, T - період коливань та ν частота виконуються очевидні співвідношення:

$$\lambda = \upsilon \cdot T \quad , \tag{9.1}$$

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu \quad . \tag{9.2}$$

9.2 Рівняння плоскої хвилі. Фазова швидкість. Хвильове число.

Для плоскої хвилі зміщення y залежить від двох змінних: x і t, тобто $y = f(x,t)$. Розглянемо коливання точок середовища, які лежать в площині $x = 0$ і коливаються по гармонічному закону:

$$y(0,t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) \quad . \tag{9.3}$$

Нехай хвильовий фронт плоскої хвилі рухається уздовж осі X і за певний час τ проходить відстань x, (рис.9.3).

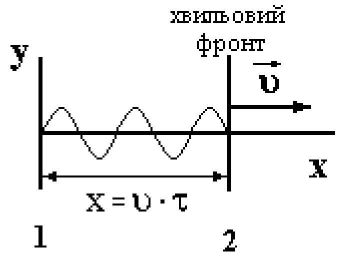

Рисунок 9.3

Для того щоб хвильова поверхня перемістилась з положення 1 в положення 2 необхідний час τ, тобто коливання частинок, які знаходяться в площині 2 запізнюються в часі на τ від коливань частинок, які знаходяться в площині 1. Таким чином для частинок, які мають довільну координату x, для їх зміщення з положень рівноваги маємо записати:

$$y(x,t) = a \cdot \cos[\omega(t - \tau) + \alpha] \quad , \tag{9.4}$$

або:

$$y(x,t) = a \cdot \cos[\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) + \alpha] \quad . \tag{9.5}$$

Рівняння (9.5) називається рівнянням плоскої хвилі.

Зафіксуємо будь-яке значення фази у рівнянні (9.5) як сталу величину:

$$\omega(t - \frac{x}{\upsilon}) + \alpha = const \quad . \tag{9.6}$$

Диференціювання рівняння (9.6) по часу дає:

$$1 - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\upsilon} = 0 \quad , \qquad \text{або} \qquad \upsilon = \frac{dx}{dt} \quad . \tag{9.7}$$

Тобто швидкість розповсюдження хвилі у рівнянні (9.5) є швидкість переміщення фази коливань. Тому ця швидкість називається фазовою швидкістю.

З рівняння (9.5) маємо:

$$y(x,t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{\upsilon} + \alpha) \quad . \tag{9.8}$$

В рівнянні (9.8) позначимо через:

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} \quad , \tag{9.9}$$

тоді формула (9.8) перетворюється на вигляд:

$$y(x,t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \alpha) \qquad (9.10)$$

Оскільки $\omega = 2\pi\nu$ та $\upsilon = \lambda\nu$ то:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad . \qquad (9.11)$$

Величина k називається <u>хвильове число</u>.

За для того щоб описати розповсюдження хвилі у довільному напрямку у просторі, зміщення коливань частинок середовища необхідно представити як певну функцію трьох її координат та часу:

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \ , \qquad (9.12)$$

або у векторному вигляді:

$$\xi = \xi(\vec{r}, t) \quad , \qquad (9.13)$$

де $\vec{r}$ це радіус-вектор довільної точки середовища з координатами: x, y, z .

Введемо поняття хвильового вектора. Нехай вектор $\vec{n}$ це є перпендикуляр (нормаль) до хвильової поверхні. Тоді добуток:

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} \ , \qquad (9.14)$$

де k - хвильове число називається <u>хвильовий вектор</u>.

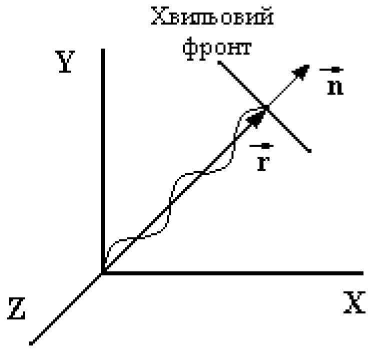

Рисунок 9.4

З використанням поняття хвильового вектора рівняння плоскої хвилі, яка розповсюджується у довільному напрямку у просторі перетворюється на вигляд:

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) \quad , \qquad (9.15)$$

де величина $\vec{k} \cdot \vec{r}$ це є скалярний добуток хвильового вектора та радіус-вектора.

<u>9.3 Хвильове рівняння. Швидкості розповсюдження хвиль</u>.

Скалярний добуток векторів $\vec{k} \cdot \vec{r}$ дорівнює:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z \ , \qquad (9.16)$$

а по теоремі Піфагора маємо:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad . \qquad (9.17)$$

Підставимо (9.15) в (9.16):

$$\xi(\vec{r}, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z + \alpha) \ . \qquad (9.18)$$

Візьмемо другі часткові похідні від функції (9.17) по змінних x, y, z, t .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -ak_x^2 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_x^2 \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -ak_y^2 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_y^2 \xi \quad , \qquad (9.19)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -ak_z^2 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -k_z^2 \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) = -\omega^2 \xi \quad . \tag{9.20}$$

Візьмемо суму часткових похідних по координатах – рівняння (9.19):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot \xi = -k^2 \cdot \xi = -\frac{\omega^2}{\upsilon^2} \cdot \xi \quad . \tag{9.21}$$

Підставимо (9.20) в (9.21):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad , \tag{9.22}$$

або

$$\Delta \xi = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad . \tag{9.23}$$

У формулі (9.23) символ Δ називається оператор Лапласа і визначається як:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad . \tag{9.24}$$

Рівняння (9.23) називається <u>хвильове рівняння</u>.

Рівняння плоскої хвилі використовувалось нами у самому загальному вигляді, а хвильове рівняння було одержано його диференціюванням. Тому хвильове рівняння задовольняє рівнянню будь-якої хвилі. Крім того хвильове рівняння не залежить від початкових умов. Тому хвильове рівняння в цьому сенсі аналогічно другому закону Ньютона.

З хвильового рівняння (9.23) одержують формули для швидкостей розповсюдження як повздовжних так і поперечних хвиль.

Так для повздовжних та поперечних хвиль у твердому тілі відповідно маємо:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \; ; \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad . \tag{9.25}$$

У формулах (9.25) E - модуль Юнга, G - модуль зсуву, ρ - густина. Так наприклад для швидкостей розповсюдження пружних хвиль у сталі де $E \approx 2 \cdot 10^{11}\,\textit{Па}$, $G \approx 8 \cdot 10^{10}\,\textit{Па}$, $\rho \approx 7{,}8 \cdot 10^3 \,\frac{\textit{кг}}{\textit{м}^3}$ відповідно одержуємо:

$$\upsilon_{\textit{повз}} \approx 5000 \frac{\textit{м}}{\textit{с}}; \qquad \upsilon_{\textit{попер}} \approx 3200 \frac{\textit{м}}{\textit{с}} \; .$$

Для швидкості розповсюдження звуку у газах з хвильового рівняння одержуємо формулу:

$$\upsilon = \sqrt{\gamma \cdot \frac{R}{\mu} \cdot T} \quad , \tag{9.26}$$

де γ - показник адіабати; R - універсальна газова стала; μ - молярна маса; T - абсолютна температура.

Так для повітря ($\gamma = 1{,}4; \mu \approx 30 \frac{\textit{г}}{\textit{моль}}$) при температурі $T = 300K$ згідно формули (9.26) одержуємо $\upsilon_{\textit{зв}} \approx 340 \frac{\textit{м}}{\textit{с}}$.

Лекція 10

Тема: Елементи спеціальної теорії відносності

Питання:
10.1 Постулати спеціальної теорії відносності (СТВ).
10.2 Незалежність швидкості світла від швидкості руху джерела.
10.3 Перетворення Лоренца.
10.4 Скорочення довжини та уповільнення часу.
10.5 Ефект Допплера.

10.1 Постулати спеціальної теорії відносності (СТВ).

Теорія відносності – фундаментальна фізична теорія, яка охоплює всю фізику в цілому. Ця теорія пов’язана з переглядом фундаментальних уявлень, що стосуються простору і часу – основ класичної фізики.

Теорія відносності підрозділяється на:
- спеціальну теорію відносності (СТВ);
- загальну теорію відносності (ЗТВ).

Головні ідеї теорії відносності було розвинуто на початку 20 ст. в роботах таких фізиків як Г. Лоренц, А. Пуанкаре і особливо в роботах А.Ейнштейна, дослідження якого містило в собі не тільки результати Лоренца та Пуанкаре, але й викладення принципово нового й глибокого розуміння всієї проблеми.

Розглянемо дві системи відліку S та S', які рухаються одна відносно одної з швидкістю $\vec{V}$ так, як показано на малюнку 10.1.

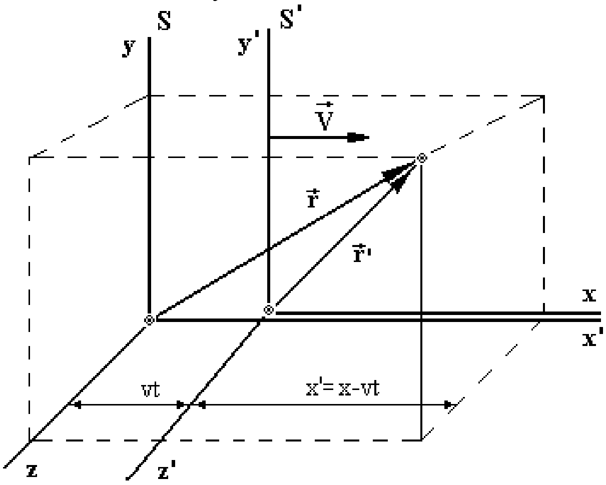

Рисунок 10.1

Радіус-вектори $\vec{r}$ та $\vec{r}\,'$ визначають положення матеріальної точки в просторі відносно цих систем відліку відповідно. Зв'язок між $\vec{r}$ та $\vec{r}\,'$ визначається формулою:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t \tag{10.1}$$

Формула (10.1) називається перетворенням Галілея. Перше і друге диференціювання (10.1) по часу приводить до результату:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{V} \tag{10.2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' \tag{10.3}$$

Формула (10.2) є класичний закон додавання швидкостей. А вираз (10.3) говорить про те, що прискорення матеріальної точки при переході з однієї системи відліку в іншу не змінюється. Говорять, що прискорення інваріантне відносно перетворень Галілея. Так як прискорення при перетвореннях Галілея не змінюється, то незмінною лишається і сила, яка визначається другим законом Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$. Таким чином одержуємо результат, що називається принципом відносності Галілея:

"Рівняння механіки Ньютона, які визначають зміни стану руху механічних систем, інваріантні відносно перетворень Галілея ".

Явища природи неможливо розділити на чисто механічні та немеханічні, тому що будь-яке механічне явище пов'язане з низкою фізичних явищ (наприклад пружний удар куль). Тому принцип відносності необхідно розповсюдити на всі явища природи. Цей принцип називається спеціальним принципом відносності Ейнштейна:

"Закони природи, які визначають зміни фізичних систем, не залежать від того, в якій з двох інерціальних систем відліку, що рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно, вони належать". Таким чином принцип відносності Ейнштейна встановлює рівноправність всіх інерціальних систем відліку.

Класична механіка постулює існування абсолютних часу, простору і руху:

1. "Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью".

2. "Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным".

3. "Абсолютное движение есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое".

(И.Ньютон "Математические начала натуральной философии").

В протилежність класичному погляду СТВ базується на двох постулатах:

I. Всі тотожні фізичні явища в інерціальних системах відліку при однакових начальних умовах відбуваються однаково (тобто не існує привілейованої системи відліку, не існує абсолютного простору, не існує абсолютного руху – руху відносно абсолютного простору).

II. Швидкість світла в вакуумі однакова по всіх напрямках і в будь-яких областях даної інерціальної системи відліку і однакова у всіх інерціальних системах відліку (тобто не залежить від швидкості руху джерела).

10.2 Незалежність швидкості світла від швидкості руху джерела.

Згідно уявлень, які домінували на межі 19-20 ст., вважалось, що існує так званий світовий ефір – універсальне середовище, в яке нібито занурені всі тіла і в якому розповсюджуються електромагнітні хвилі – світло. Система відліку, яка пов'язана з ефіром по своєму змісту є привілейованою серед решти інерціальних систем. В решті систем повинен спостерігатись рух ефіру – так званий. ефірний вітер. Однак низка експериментів по знаходженню ефірного вітру довела, що його не існує. А значить не існує ефіру і не існує привілейованої системи відліку.

Швидкість світла в вакуумі займає особливе місце в природі, тому що згідно сучасним уявленням, вона є максимально можливою швидкістю, з якою відбувається взаємодія між тілами, або, як говорять, максимально можливою швидкістю передачі сигналу.

Згідно даних останніх вимірювань швидкість світла в вакуумі дорівнює:

$$c = 299'792'458 \pm 1.2 м/с ,$$

або приблизно: $c \approx 3 \cdot 10^8 м/с$.

А якщо джерело світла рухається до спостерігача, або спостерігач рухається до джерела? Такий рух не може змінити максимальної швидкості передачі сигналу. Тобто швидкість світла в вакуумі не залежить ані від руху джерела, ані від руху спостерігача. Таким чином при швидкостях руху близьких до $c \approx 3 \cdot 10^8 м/с$ перетворення Галілея –

формула (10.1) та закон додавання швидкостей – формула (10.2) невірні і їх необхідно замінити іншими. Такими перетвореннями є перетворення Лоренца.

10.3 Перетворення Лоренца.

Формули, що виражають перехід від інерціальної системи S до інерціальної системи S', що рухається відносно S зі швидкістю $\vec{V}$ уздовж осі X називаються перетвореннями Лоренца. Вони мають вигляд:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; ; \qquad y' = y \; ; \qquad z' = z \; ; \qquad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{10.4}$$

Перетворення симетричні і зберігають свій вигляд при зворотному переході від системи S' до системи S з зміною знаку :

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; ; \qquad y = y'; \qquad z = z' \; ; \qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{10.5}$$

Формули (10.4), (10.5) одержав Лоренц у 1904 р. Слід зауважити, що сам Лоренц дивився на ці формули як на формальний засіб і утримувався точки зору існування ефіру.

При повільних рухах, коли виконується умова: $V <<$ c, перетворення Лоренца переходять в перетворення Галілея:

$$x' = x - Vt \; ; \qquad y' = y \; ; \qquad z' = z \; ; \qquad t' = t \, .$$

10.4 Скорочення довжини та уповільнення часу.

Якщо твердий стержень знаходиться у стані спокою у будь-якій системі відліку, то його довжина l_0 визначається порівнянням з еталоном довжини, який знаходиться у стані спокою в тій самій системі. Нехай тепер стержень рухається з певною швидкістю V - рис.10.2.

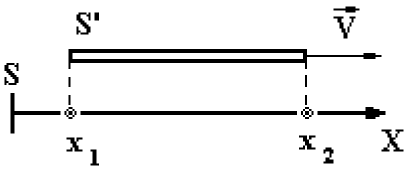

Рисунок 10.2

Тоді довжина стержня l, який рухається в системі відліку, що знаходиться у спокої є відстань між двома точками в цій системі, мимо яких кінці стержня проходять водночас. Для знаходження зв'язку між l та l_0 скористаймось перетвореннями Лоренца. З (10.5) для координати x маємо:

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \qquad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10.6}$$

де x_1 та x_2 - координати кінців стержня в нерухомій системі; x_1' та x_2' - координати кінців стержня в системі, що рухається; $\beta = V/c$. З системи (10.6) маємо:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2} \tag{10.7}$$

де $x_2' - x_1' = l_0$ - довжина нерухомого стержня; $x_2 - x_1 = l$ - довжина стержня, що рухається. Таким чином стержень, що рухається коротший за той самий стержень, що знаходиться в спокої.

Розглянемо дві будь-які події, проміжок часу між якими Δt та Δt_0 відповідно в нерухомій інерціальній системі S та системі S', що рухається відносно S зі швидкістю $\vec{V}$. В загальному випадку ці проміжки часу будуть різними. Нехай ці обидві події відбуваються в одному місці простору. Тоді з рівнянь (10.4) маємо:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (10.8)$$

Таким чином $\Delta t_0 < \Delta t$. Тобто проміжок часу між двома подіями мінімальний в тій системі відліку, в якій ці події відбуваються в одному місці простору. Це явище називається <u>уповільненням часу.</u>

Явище уповільнення часу було експериментально підтверджено низкою експериментів, зокрема при розпаді елементарних частинок μ-мезонів. (μ-мезон – нестабільна заряджена частинка , маса та заряд якої: $m_\mu = 207 m_e$; $q_\mu = \pm e$. μ-мезони утворюються в космічних променях у верхніх шарах атмосфери на висоті приблизно 10км).

Порівняння інтенсивності потоків μ-мезонів в космічних променях високо у горах та у їх підніжжя показало, що середня довжина життя “швидкого” μ-мезону в лабораторній системі відліку: $\tau \approx 10^{-5} c$. А середня довжина життя “повільного” μ-мезону $\tau_0 \approx 2.2 \cdot 10^{-6} c$. Зростання довжини життя μ-мезону в $\tau / \tau_0 \approx 4.5$ разів пов’язане з уповільненням часу в системі відліку, що рухається.

<u>10.5 Ефект Допплера</u>. (Відкрито Допплером на акустичних хвилях 1842р.)

Ефект полягає в зміні частоти коливань ν, або довжини хвилі λ, що сприймаються спостерігачем при руху джерела коливань та спостерігача відносно один одного.

Ефект має кінематичне походження.

Нехай нерухоме джерело послідовно випромінює імпульси з відстанню між сусідніми імпульсами - λ_0, які розповсюджуються в певному середовищі з швидкістю c. Тоді нерухомий спостерігач буде приймати послідовні імпульси через проміжок часу:

$$T_0 = \frac{\lambda_0}{c} \qquad (10.9)$$

Якщо джерело рухається у бік спостерігача з швидкістю $\vec{V}$ ($V << c$), то сусідні імпульси будуть розділені меншим проміжком часу:

$$T = \frac{\lambda}{c} \qquad (10.10)$$

де

$$\lambda = \lambda_0 - V \cdot T_0 \qquad (10.11)$$

З (10.9) та (10.11) маємо:

$$\lambda = \lambda_0 - V \cdot \frac{\lambda_0}{c} = \lambda_0 \cdot (1 - \frac{V}{c}) \qquad (10.12)$$

У випадку гармонічної хвилі її частота, що сприймається спостерігачем, буде більше частоти, що випромінюється джерелом:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{V}{c}} \qquad (10.13)$$

При віддалянні джерела від спостерігача у формулі (10.13) змінюється знак.

Під час руху з довільним напрямком швидкості ефект залежить від кута θ між векторами $\vec{V}$ та $\vec{c}$, так що формула (10.13) приймає вигляд:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{V}{c} \cdot \cos\theta} \qquad (10.14)$$

Під час руху з швидкостями близькими до $\vec{c}$ необхідно приймати до уваги ефект релятивістського уповільнення часу. В цьому випадку формула (10.14) перетворюється на вигляд:

$$\nu = \frac{\nu_0}{(1 - \frac{V}{c} \cdot \cos\theta) \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (10.15)$$

Формула (10.15) дозволяє з'ясувати всі особливості ефекту Допплера. (рис.10.3).

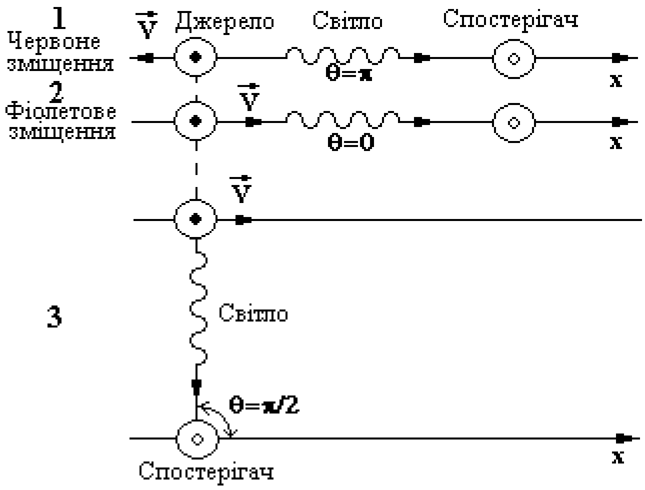

Рисунок 10.3

У 1-му та 2-му випадках, коли кут θ відповідно дорівнює $\theta = \pi$ та $\theta = 0$ – ефект називається <u>повздовжнім</u>. Коли $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$ і формула (10.15) перетворюється на вигляд:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad (10.16)$$

В цьому випадку ефект називається <u>поперечним.</u> Це є складний для спостереження ефект 2-го порядку. Існування ефекту було експериментально доказано в 1939 р.(Айвс), притому релятивістська формула (10.16) була повністю підтверджена.