

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Запорізька політехніка»

МІЗЕРНА ОЛЕНА ЛЕОНІДІВНА

УДК 539.3

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ВОЛОКНИСТИХ
КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ В УМОВАХ В'ЯЗКОПРУЖНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Запоріжжя – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному університеті «Запорізька політехніка» Міністерства освіти і науки України

Науковий керівник

доктор технічних наук, доцент **Гребенюк Сергій Миколайович**, Запорізький національний університет Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри фундаментальної математики

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор **Дзюба Анатолій Петрович**, Дніпровський національний університет ім. Олеса Гончара Міністерства освіти і науки України, професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки;

доктор технічних наук, старший науковий співробітник **Сметанкіна Наталія Володимирівна**, Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, завідувач відділу вібраційних і термоміцнісних досліджень.

Захист відбудеться «11» травня 2021 р. о 15:30 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 17.052.01 при Національному університеті «Запорізька політехніка» за адресою: 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64, ауд. 153.

Із дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету «Запорізька політехніка» за адресою: 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64 та на сайті університету у розділі «Наука» – «Спеціалізована вчена рада»

Автореферат розісланий «____» квітня 2021 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради,
доктор технічних наук, професор

О. А. Міт'яєв

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Використання композиційних матеріалів дозволяє направлено регулювати властивості матеріалів при створенні конструкцій і оптимізації їх міцнісних властивостей; а також регулювати вагу матеріалів, геометричні параметри й покращувати інші експлуатаційні характеристики. Це підтверджує досвід застосування композиційних матеріалів у відповідальних несучих конструкціях у різних галузях сучасної техніки: авіаційно-космічній, суднобудівній, транспортному будівництві, ядерній техніці, хімічній промисловості та інших.

У сучасних силових конструкціях найчастіше застосовують волокнисті композиційні матеріали, що являють собою поєднання двох складових з різними фізичними властивостями. Однією з компонент є порівняно податливий матеріал – матриця, іншою – високоміцні та високомодульні волокна. Матриця забезпечує суцільність композиту, фіксує форму виробу і взаємне розташування армуючих волокон. Волокна сприймають основні напруження, що виникають у процесі експлуатації, і забезпечують жорсткість і міцність композиту. Саме з таких композиційних матеріалів методами неперервного намотування або укладання створюються типові елементи силових конструкцій – багатошарові балки, оболонки, панелі та інші конструкції. Поєднання властивостей матриці і волокна дозволяє створювати спеціальні типи композитів, які застосовуються при виробництві конструкційних елементів різного устаткування, що спрощує його конструкцію і покращує експлуатаційні характеристики. Зокрема, стає можливим регулювати жорсткісні характеристики конструкції за рахунок зміни орієнтації, типу і концентрації волокон, а також типу матриці та інших характеристик матеріалу.

Значні відмінності між фізико-механічними й хімічними властивостями та анізотропія властивостей складових композиту призводять до особливостей при деформуванні всієї конструкції. Зокрема використання як матриці еластомерів надає конструкції в'язкопружних властивостей. В'язкопружність у процесі деформування може проявлятися по-різному: повзучість при сталому напруженні, релаксація напружень при сталій деформації, згасання динамічних ефектів, залежність діаграми напруження-деформація від швидкості навантаження та інше. Крім того, з поширенням застосування композиційних матеріалів конструкції часто мають складну геометричну форму. Все це досить суттєво відзначається на складності моделювання та розрахунку напружено-деформованого стану композитної конструкції і використовувати аналітичні методи розрахунку неможливо. У зв'язку з цим останнім часом дуже широко застосовуються чисельні методи розрахунку з використанням комп'ютерної техніки.

Сучасні методики визначення напружено-деформованого стану композиційних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування часто мають деякі припущення й гіпотези, які дозволяють спростити розрахунок.

Однак, використання їх для конструкцій складної геометричної форми в умовах в'язкопружного деформування призводить до громіздкості та складності математичних моделей і неможливості їх розв'язку більшістю існуючих методів або незадовільною точністю одержуваних результатів. Створення ефективної методики, яка враховує особливості в'язкопружного деформування композитів і не вимагає громіздких математичних викладок, дозволить більш точно визначати напружено-деформований стан конструкцій в умовах реального навантаження та достовірно оцінювати їх працездатність.

В'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано відповідно до плану наукових досліджень, що проводяться на кафедрі прикладної математики Національного університету «Запорізька політехніка» за держбюджетними темами: «Розробка математичних моделей об'єктів і процесів. Створення методики наближеного розв'язку прикладних задач» (№ держреєстрації 0105U006064, 2003–2006 рр.), «Розробка математичних моделей і методів розв'язку задач механіки деформівного твердого тіла з геометричними і фізичними особливостями» (№ держреєстрації 0106U008619, 2006–2009 рр.), «Математичні моделі та методи дослідження динамічних процесів в елементах складових конструкцій» (№ держреєстрації 0109U007671, 2009–2012 рр.), «Математичне моделювання та методи розв'язання динамічних задач деформування елементів складених конструкцій», (№ держреєстрації 0115U004674, 2015–2018 рр.), «Прикладне моделювання та розробка методик дослідження складних систем в інженерних та економічних розрахунках» (шифр 04618, 2018–2021 рр.).

Мета й завдання дослідження. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану композиційного матеріалу з урахуванням в'язкопружних властивостей компонентів. Для досягнення поставленої мети були вирішені наступні завдання:

- побудова матриці жорсткості лінійного паралелепіпедного скінченного елемента для розрахунку композитних конструкцій, яка враховує в'язкопружні властивості матриці та пружні властивості волокон;
- розробка підходів до чисельного розв'язування задач в'язкопружності механіки композиційних матеріалів у тривимірній постановці;
- розвиток і застосування моментної схеми скінченних елементів для визначення напружено-деформованого стану конструкцій з волокнистих композитів з еластомерною матрицею;
- створення пакету прикладних програм для розрахунку в'язкопружних композитних конструкцій;
- розрахунок елементів сучасних машинобудівних конструкцій.

Об'єкт дослідження – процеси деформування в'язкопружних волокнистих композитів.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан в'язкопружних волокнистих композитів.

Методи дослідження – для визначення напружено-деформованого стану композитних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування було використано модифікацію методу скінченних елементів – моментну схему скінченного елемента.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

- вперше розроблено просторово-часовий скінченний елемент для визначення напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів, що мають в'язкопружні властивості;

- отримала подальший розвиток моментна схема скінченних елементів у тривимірній постановці для визначення напружено-деформованого стану композиційних матеріалів, які містять пружні волокна та в'язкопружну матрицю;

- удосконалені чисельні підходи для розв'язання задач механіки композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування у тривимірній постановці;

- вперше на основі розробленого пакету прикладних програм отримано нові чисельні результати, що відображають вплив в'язкопружних властивостей компонент композиційного матеріалу і характеризують процес в'язкопружного деформування всієї конструкції.

Практичне значення отриманих результатів. Розроблено підходи до розв'язування задачі в'язкопружності механіки композитних матеріалів у тривимірній постановці. На їх базі створено пакет прикладних програм, що дозволяє розв'язувати задачі в'язкопружності композитів і досліджувати напружено-деформований стан композитних конструкцій складної геометричної форми в умовах в'язкопружного деформування. Методика дозволяє на стадії проектування отримати раціональні параметри конструкції, а також вибрати найбільш ефективні параметри компонентів композиційного матеріалу, умови навантаження та закріплення. Крім того, запропонована методика дозволяє отримувати адекватні реальним процесам результати при розрахунку й зменшувати час і трудомісткість проектування. За допомогою розробленого пакету прикладних програм проведено розрахунок конструкцій транспортного та промислового призначення.

Особистий внесок здобувача. За результатами дослідження опубліковані наукові праці [1–16]. Основні положення й результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. 2 наукових роботи опубліковано одноосібно: [7, 16]. У спільних публікаціях здобувачеві належить:

- аналіз актуальності проблеми [6];
- застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченних елементів з просторово-часовою апроксимацією [3, 8–10];
- чисельні результати в'язкопружного розрахунку конструкцій за допомогою методу скінченних елементів [1–5, 11–15];

– пакет прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів в умовах в'язкопружності [2, 4, 5, 11–13, 15].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях, зокрема: III–V Регіональних конференціях молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 2005–2007 рр.); VI Міжнародному симпозиумі «Механіка еластомерів – 2005» (м. Дніпро, 2005 р.); XI Міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (м. Київ, 2006 р.); Міжнародній конференції «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» (м. Харків, 2006 р.); конференції молодих вчених і фахівців «Сучасні проблеми машинобудування» (м. Харків, 2006 р.); Міжнародній науково-технічній конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (м. Дніпро, 2007 р.); щорічних науково-технічних конференціях серед студентів, викладачів, науковців, молодих учених і аспірантів Національного університету «Запорізька політехніка» «Тиждень науки» (м. Запоріжжя, 2007–2017 рр.); IV Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці» (м. Луганськ, 2010 р.); XII Міжнародній конференції з математичного моделювання (м. Херсон, 2010 р.); Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2011» (м. Дніпро, 2011 р.); VIII Міжнародних молодіжних науково-технічних читань ім. А. Ф. Можайського (м. Запоріжжя, 2015 р.).

Публікації. За результатами виконаних досліджень опубліковано 16 робіт, в яких відображено основний зміст дисертаційної роботи та етапи її підготовки. З них 6 статей опубліковано у фахових наукових виданнях згідно з Постановами МОН України й 1 стаття – у міжнародному науковому періодичному виданні, з яких 3 статті входять до наукометричних баз даних; а також 9 робіт – у матеріалах і тезах конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотацій, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 135 сторінок. Основна частина викладена на 88 сторінках, містить 28 рисунків, 1 таблицю; список використаних джерел складається зі 158 найменувань на 20 сторінках; 5 додатків на 11 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету та завдання роботи, визначені об'єкт, предмет та методи дослідження, висвітлено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, а також особистий внесок автора в роботах, виконаних у співавторстві,

наведено апробацію результатів дисертації та кількість публікацій, виконаних за темою дисертаційної роботи.

У **першому розділі** розглянуто основні підходи до розрахунку композитних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування. Механічна поведінка волокнистих композиційних матеріалів в значній мірі залежить від властивостей їх компонентів. Еластомерні матриці надають композиту властивостей в'язкопружності, які стають анізотропними через наявність у матеріалі пружних волокон, крім того деформаційні процеси у композиті залежать також від способу армування. Анізотропія властивостей та в'язкопружні ефекти в значній мірі впливають на процес деформування композитної конструкції, тому набули глибокого експериментального, аналітичного або чисельного дослідження багатьма авторами.

Значний внесок у розвиток теорії та методів розв'язання задач механіки неоднорідних та композиційних матеріалів, внесли: Д. С. Аболіньш, М. А. Абросімов, С. Д. Акбаров, Х. Альтенбах, В. М. Ахундов, В. Ф. Бондін, Г. А. Ванін, В. В. Васильєв, О. П. Вільчинський, Г. В. Гаврилов, В. П. Голуб, С. М. Гребенюк, В. З. Гришак, А. П. Дзюба, Н. М. Долініна, В. М. Дякон, М. І. Затула, К. М. Зінгерман, А. О. Камінський, Д. М. Карпінос, В. В. Киричевський, В. П. Луньов, Г. І. Львов, Я. Г. Ляшенко, В. Л. Нарусберг, Р. М. Нескородєв, В. І. Пожуєв, Ю. М. Работнов, М. І. Розовський, О. С. Сахаров, М. Ф. Селіванов, Н. В. Сметанкіна, В. О. Толок, Г. А. Тетєрс, П. В. Фернаті, В. О. Федоров, В. П. Шевченко, J. G. Berryman, L. V. Gibiansky, M. Klastorny, K. Kondo, G. W. Milton, O. Nobutada, K. Patrik, T. Staffan, A. Takaaki та інші дослідники.

Серед багатьох аналітичних та чисельних методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла найбільш ефективним і поширеним є метод скінченних елементів (МСЕ), який дозволяє розраховувати конструкції довільної геометричної форми зі складними умовами навантаження та закріплення. МСЕ у класичній постановці та його варіації набули широкого застосування у розв'язанні задач механіки композитів у роботах авторів: С. Д. Акбарова, І. І. Вдовиченка, О. В. Вершиніна, С. М. Гребенюка, В. В. Киричевського, О. В. Кондакової, Г. М. Куликова, С. В. Плотнікової, О. Г. Рзаєва, О. С. Сахарова, О. Ю. Сметаннікова, Ю. І. Фомічова, М. Я. Яковлева, N. Hiroshi, K. Kondo, N. Labed, S. Nobuyseki, R. Takiguchi, N. Turbe та інших.

Огляд робіт з дослідження, моделювання та обчислення напружено-деформованого стану в'язкопружних волокнистих композитів дає змогу зробити висновок про деяку обмеженість методів дослідження, направлених або на розв'язання конкретних задач, або на моделювання певних матеріалів. Тенденція до ускладнення як геометрії конструкції, так і структури самих матеріалів вимагає розробки методів, за допомогою яких можна було б розраховувати композиційні конструкції без громіздких математичних моделей, а також без втрати точності розрахунку.

У **другому розділі** запропоновано розвиток моментної схеми МСЕ у формі методу переміщень на основі варіаційного принципу Лагранжа, з метою застосування для розрахунку напружено-деформованого стану в'язкопружних композитних конструкцій. При практичному використанні традиційних схем МСЕ у формі методу переміщень, побудованих на базі варіаційного принципу Лагранжа для розв'язування задач, що мають певну специфіку (врахування слабкої стисливості, розрахунок пластин і оболонок на базі тривимірних скінченних елементів і ін.), виникають суттєві труднощі, для подолання яких використовують інші варіаційні принципи, тобто змішані схеми МСЕ. Маючи позитивні особливості, змішані моделі мають і низку недоліків, таких як збільшення порядку розв'язувальної системи рівнянь, порушення додатної визначеності матриці рівнянь. Тому для задач із зазначеними особливостями кращим є розвиток гібридних схем МСЕ у формі методу переміщень на базі варіаційного принципу Лагранжа.

Стандартна схема МСЕ у формі методу переміщень не враховує жорсткі зміщення скінченних елементів, а також «ефект хибного зсуву», тому для усунення цих недоліків у роботі скористалися моментною схемою скінченних елементів. Розглянуто лінійний скінченний елемент у вигляді шестигранного паралелепіпеду. Об'єм V , який займає елемент, відображений на куб зі стороною 2. У центр куба, віднесеного до базисної системи координат z^i , поміщено початок місцевої системи координат x^1 , x^2 , x^3 , вісі якої спрямовані вздовж ребер. Згідно з варіаційним принципом Лагранжа рівновага скінченного елемента визначена, якщо варіація повної потенціальної енергії приймає мінімальне значення, тобто:

$$\delta\tilde{\Pi} = \delta\tilde{W} - \delta A = 0, \quad (1)$$

де $\delta\tilde{W}$ – варіація енергії в'язкопружної деформації, δA – варіація роботи розподілених об'ємних і поверхневих сил.

Варіацію енергії в'язкопружної деформації представили у вигляді:

$$\delta\tilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta\tilde{\varepsilon}_{ij} dV. \quad (2)$$

Для опису в'язкопружних властивостей композиційного матеріалу скористалися спадковою теорією Больцмана–Вольтерра і тензор напружень взяли у вигляді інтегрального оператора із застосуванням миттєвих і тривалих пружних сталей:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - (C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl}) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де C_0^{ijkl} – тензор миттєвих пружних сталих композиційного матеріалу, C_∞^{ijkl} – тензор тривалих пружних сталих. Застосування інтегрального оператора саме в такому вигляді є цілком виправданим, зважаючи на те, що миттєві і тривалі модулі пружності можуть бути знайдені експериментальним шляхом, а отже відомі для більшості матеріалів, які використовують в якості матриць композитних матеріалів. Зв'язок між компонентами тензора деформацій і напружень має часовий характер. Таким чином, деформація тіла залежить не тільки від сили, що діє у даний момент часу, але й від усіх попередніх сил, вплив яких тим менший, чим більше часу пройшло з моменту їх прикладення (при цьому застосований принцип суперпозиції). Враховуючи, що за початок відліку часу приймається момент прикладення навантаження, то нижня межа в інтегралі дорівнює нулю.

Далі приведено математичні викладки згідно моментної схеми скінченного елемента. Для побудови матриці жорсткості всередині скінченного елемента необхідно провести апроксимацію полів переміщень та компонентів тензора деформацій. Спочатку було проведено часову дискретизацію, тобто часовий проміжок розбито вузловими значеннями t_i . Для отримання матриці жорсткості скінченного елемента у момент часу t всередині кожного часового проміжку апроксимацію переміщень представили у вигляді:

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1})N_{n-1}(t) + u_m(t_n)N_n(t), \quad (4)$$

де $u_m(t_{n-1})$, $u_m(t_n)$ – вектори переміщень у вузлах t_{n-1} і t_n відповідно у просторовому напрямі m ; $N_{n-1}(t)$ і $N_n(t)$ – базисні функції, що визначені співвідношеннями:

$$N_{n-1}(t) = 1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad N_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, \quad (5)$$

тоді

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1}) \left(1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m(t_n) \left(\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right). \quad (6)$$

Для визначення тензора деформацій $\varepsilon_{kl}(t)$ скінченного елемента переміщенням $u_m(t)$ надали вигляду:

$$u_m(t) = \sum_{s=1}^8 u_m^s(t, x_1^s, x_2^s, x_3^s) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) = u_m^s(t) \cdot N_s(x_1, x_2, x_3), \quad (7)$$

тоді отримали

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} u_m^s(t) \cdot \left(C_l^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_l} \right). \quad (8)$$

Підставивши (3) і (8) у (2), отримали співвідношення для варіації енергії в'язкопружної деформації:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{W} = & \iiint_V \left(C_0^{ijkl} \cdot \frac{1}{2} u_m^s(t) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) - \right. \\ & \left. - \left(C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl} \right) \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot \frac{1}{2} u_m^s(\tau) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) d\tau \right) \times \\ & \times \delta \left(\frac{1}{2} u_m^s(t) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) \right) dV. \end{aligned} \quad (9)$$

Прийнявши такі позначення:

$$K = \frac{1}{4} \iiint_V C_0^{ijkl} \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \quad (10)$$

$$\Delta K = \frac{1}{4} \iiint_V \left(C_0^{ijkl} - C_\infty^{ijkl} \right) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \quad (11)$$

отримали

$$\delta \tilde{W} = \left(K u_m^s(t) - \int_0^t \Delta K u_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \right) \cdot \delta u_m^s(t), \quad (12)$$

де K і ΔK – шукані матриці жорсткості скінченного елемента.

Таким чином з'ясували, що варіація енергії в'язкопружної деформації складається з пружної і спадкової складових.

Далі отримано матрицю жорсткості для пружної складової. Вираз для варіації енергії пружної деформації скінченного елемента з урахуванням узагальненого закону Гука взяли у вигляді:

$$\delta W = \iiint_V C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV. \quad (13)$$

Просторову апроксимацію полів переміщень відносно базисної системи координат представлено у вигляді лінійного закону:

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_{k'}^{(pqr)} \psi^{(pqr)} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)} \psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_{k'}^{(001)} \psi^{(001)} + \\ + \omega_{k'}^{(110)} \psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)} \psi^{(111)}. \quad (14)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу, $\psi^{(pqr)}$ – набір степеневих координатних функцій вигляду:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \cdot \frac{(x^2)^q}{q!} \cdot \frac{(x^3)^r}{r!},$$

де $p = 0, 1, \dots, l$; $q = 0, 1, \dots, m$; $r = 0, 1, \dots, n$ – степені апроксимуючого полінома за відповідними координатними напрямками.

Компоненти тензора деформацій апроксимували шляхом розкладання компонентів у ряд Маклорена в околі початку координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (15)$$

де коефіцієнти розкладу $e_{ij}^{(stg)}$ обчислюються за спеціальними формулами, причому у розкладі (15) залишаються тільки ті члени, які не змінюються при збільшенні порядку апроксимації переміщень.

У результаті компоненти тензора деформацій знайдено у вигляді системи співвідношень:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)}; \\ \varepsilon_{22} = e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}; \\ \varepsilon_{33} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)}; \\ \varepsilon_{12} = e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}; \\ \varepsilon_{13} = e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}; \\ \varepsilon_{23} = e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)}. \end{cases} \quad (16)$$

Записавши отримані розклади у матричному вигляді і підставивши у співвідношення (13), отримали:

$$\delta W = \delta\{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H_0^{ijkl}] [F_{kl}^t] \{\omega_{t'}\}, \quad (17)$$

тут

$$[H_0^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\psi_{kl}\}^T [C^{ijkl}] \{\psi_{kl}\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

де $[C^{ijkl}]$ – матриця миттєвих пружних сталих, що характеризує фізичні властивості анізотропного матеріалу з урахуванням метрики простору, елементами якого є компоненти метричного тензора \hat{g} .

Далі перейшли від коефіцієнтів розкладу $\{\omega_{k'}\}$ виразу (14) до коефіцієнтів розкладу для переміщень через інтерполяційні поліноми Лагранжа вигляду:

$$u_i = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^L u_i^{(pqr)} \varphi^{(pqr)} = u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}, \quad (18)$$

де $u_i^{(pqr)}$ – вузлові значення переміщень скінченного елемента, $\varphi^{(pqr)}$ – апроксимуюча функція, що задається за допомогою одномірних поліномів Лагранжа, $N_{(pqr)}$ – функції форми.

Зіставляючи вирази для апроксимації переміщень (14) і (18), записані у матричному вигляді, отримаємо зв'язок між інтерполяційними поліномами Лагранжа і степеневими функціями:

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}, \quad (19)$$

де $[A]$ – матриця перетворення.

Для подальшого пошуку матриці жорсткості підставили (20) у (18):

$$\delta W = \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H_0^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \delta\{u_{s'}\}^T [K^{s't'}] \{u_{t'}\}, \quad (20)$$

де

$$[K^{s't'}] = [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A]$$

– шукана матриця жорсткості скінченного елемента для композиційного матеріалу. Розмірність матриці жорсткості: 24×24 .

Матриця ΔK отримана за аналогічним алгоритмом з використанням тривалих пружних сталих $[C_{\infty}^{ijkl}]$.

Підставивши у варіаційний принцип Лагранжа (1) отриманий вираз (12) і прийнявши варіацію роботи поверхневих сил у вигляді:

$$\delta A = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \delta u_m^s(t) dS, \quad (21)$$

після математичних перетворень отримали систему розв'язувальних рівнянь вигляду:

$$Ku_m^s(t) - \int_0^t \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P, \quad (22)$$

де

$$P = \iint_S P_m \cdot N_s(x_1, x_2, x_3) dS$$

– вектор поверхневих сил.

Далі період часу від 0 до t було розбито на $n-1$ часовий інтервал, і рівняння (22) представлені у вигляді:

$$Ku_m^s(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Ku_m^s(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = P. \quad (23)$$

Розбиття на часові інтервали прийнято таким, що співпадає з розбиттям на часові скінченні елементи. Тоді, якщо t належить $n-1$ -му скінченному елементу, тобто $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ (а саме, $t = t_n$), то переміщення можна апроксимувати функцією (4):

$$Ku_m^s(t_n) - \Delta K \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(u_m^s(t_i) \begin{pmatrix} t_{i+1} - \tau \\ t_{i+1} - t_i \end{pmatrix} + u_m^s(t_{i+1}) \begin{pmatrix} \tau - t_i \\ t_{i+1} - t_i \end{pmatrix} \right) e^{-(t_n-\tau)} d\tau = P. \quad (24)$$

Після математичних перетворень отримано розв'язувальну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{K}u_m^s(t_n) = P + \sum_{i=1}^{n-2} Q_i + \tilde{Q}_{n-1}, \quad (25)$$

де

$$\tilde{K} = K - \Delta K \left(1 - \frac{1}{t_n - t_{n-1}} (1 - e^{t_{n-1} - t_n}) \right)$$

– матриця жорсткості в'язкопружного матеріалу в момент часу t ;

$$Q_i = \Delta K \left(u_m^s(t_i) \left(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_i - t_n} \right) + \right. \\ \left. + u_m^s(t_{i+1}) \left(e^{t_{i+1} - t_n} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_i - t_n}) \right) \right)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом i -го часового скінченного елемента;

$$\tilde{Q}_{n-1} = \Delta K u_m^s(t_{n-1}) \left(\frac{1}{t_n - t_{n-1}} (1 - e^{t_{n-1} - t_n}) - e^{t_{n-1} - t_n} \right)$$

– вектор додаткового навантаження, що обумовлений впливом $n-1$ -го часового скінченного елемента.

Таким чином, отримано основні співвідношення для просторово-часового скінченного елемента, які базуються на значеннях миттєвих та тривалих характеристик компонентів композиційного матеріалу при моделюванні його в'язкопружного деформування.

У **третьому розділі** представлено опис ітераційного алгоритму розв'язання задачі в'язкопружності у композиті. Програмно алгоритм реалізований в обчислюваному комплексі «МРЕЛА+» у вигляді пакету прикладних програм KMVIS. Представлені структура і взаємодія програм підсистеми KMVIS із програмами обчислювального комплексу «МРЕЛА+» під час розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій. Розрахунок конструкцій у програмному пакеті здійснюється у три послідовних етапи:

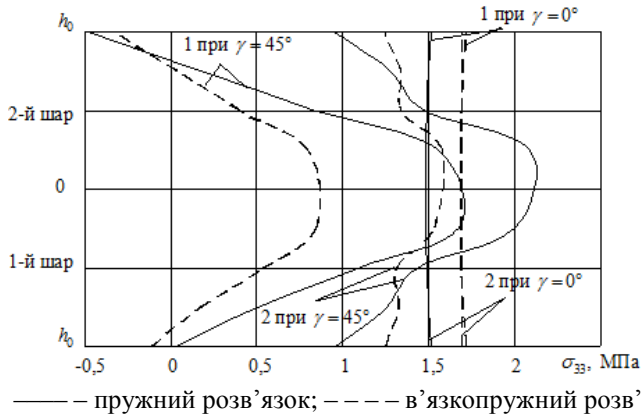
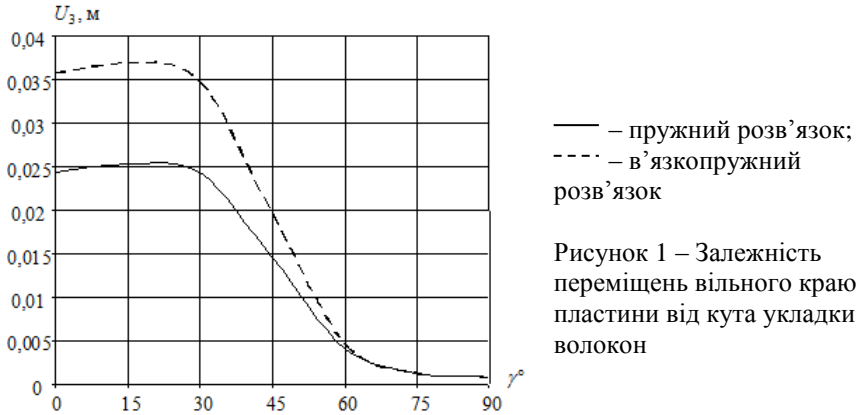
1) підготовка вихідних даних – опис фізико-механічних характеристик матеріалу, геометрії конструкції, силових граничних умов, скінченно-елементна дискретизація об'єкта тощо;

2) чисельний розрахунок скінченно-елементної моделі – обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів, формування глобальної системи розв'язувальних рівнянь та її розв'язок;

3) обробка результатів розв'язання – обчислення параметрів напружено-деформованого стану конструкції; їх візуальне представлення у вигляді таблиць, графіків, двовимірних або тривимірних зображень.

У **четвертому розділі** на основі запропонованої методики за допомогою розробленого пакету прикладних програм досліджено напружено-деформований стан в умовах в'язкопружності елементів композитних конструкцій. Розглянуто двошарову пластину, затиснену з одного краю, та із розподіленим навантаженням, що розтягує, на іншому. Матеріал являє собою волокнистий композит, виготовлений з гуми 2959: $E_{R0} = 5,28$ МПа,

$E_{R\infty} = 2,22$ МПа, $\nu_R = 0,49$ і поліамідного корда 23КНТС: $E_C = 1277,5$ МПа, $G_C = 490$ МПа. Діаметр волокон $d_C = 0,07$ см, частота армування $i_C = 2900$ ниток/м. На рисунках 1 і 2 представлено розподіли переміщень і напружень за товщиною затисненої двошарової пластини.



Геометричні розміри пластини: $a \times b = 0,1 \times 0,1$ м. Пластина має два шари з перехресною схемою армування з кутом укладки волокон $\gamma^{(k)} = (-1)^{k-1} \gamma$, товщина кожного шару $h_0 = 0,8$ см. Інтенсивність розтягувального навантаження $q = 1,5$ МПа. Як показує аналіз чисельного дослідження напружено-деформованого стану, збільшення переміщень через

в'язкопружність досягає 46,6% для значення кута армування $\gamma = 0^\circ$ і 46,3% для кута армування $\gamma = 45^\circ$. Зі збільшенням значень кута армування зростає жорсткість конструкції. Можна спостерігати кількісну різницю розподілу напружень на затисненому й на вільному краях.

Досліджено напружено-деформований стан композитної труби, що навантажена радіальною зосередженою силою. Радіус труби: $R = 0,112$ м, відносна товщина: $h/R = 0,03156$, довжина твірної: $L = 2,37R$. Труба вільно оперта торцями й навантажена посередині прогону радіальною зосередженою силою $P = 98$ Н (рис. 3).

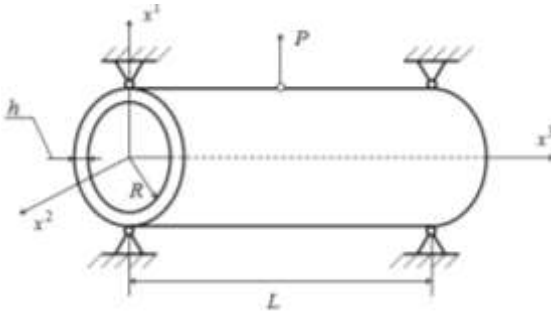
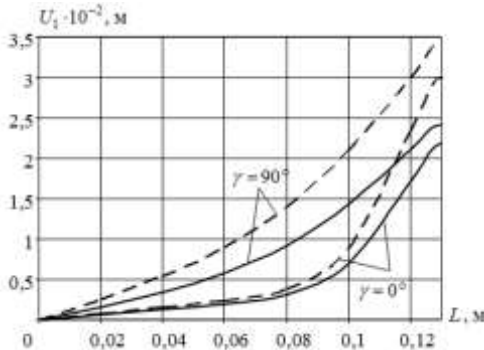


Рисунок 3 –
Розрахункова схема
труби

На рисунку 4 приведено результати чисельного дослідження розподілу прогину вздовж твірної циліндра в залежності від різних кутів армування.



— пружний розв'язок;
- - - в'язкопружний розв'язок

Рисунок 4 – Розподіл прогину
вздовж твірної циліндричної
поверхні при різних кутах
армування γ

Можна зауважити, що різниця між пружним і в'язкопружним розв'язками збільшується у напрямку місця прикладання сили, де складає близько 42%. Крім того, спосіб армування також впливає на в'язкопружні властивості матеріалу. Найменше повзучість труби наявна при радіальному способі

армування, найбільше – при армуванні вздовж твірної. Різниця величини переміщень складає до 33%.

Досліджено розтягування консольної циліндричної оболонки, що має парну кількість перехресно армованих шарів. Конструкція являє собою двошарову, перехресно армовану циліндричну оболонку, один торець якої затиснений, а інший переміщується на задану величину $\Delta = 1$ мм (рис. 5).

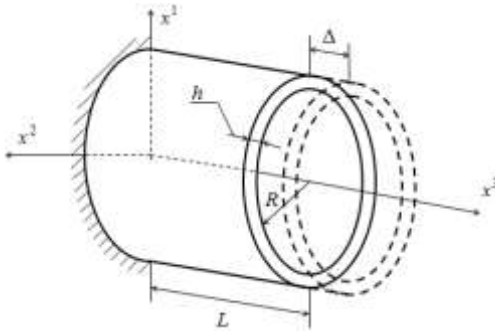
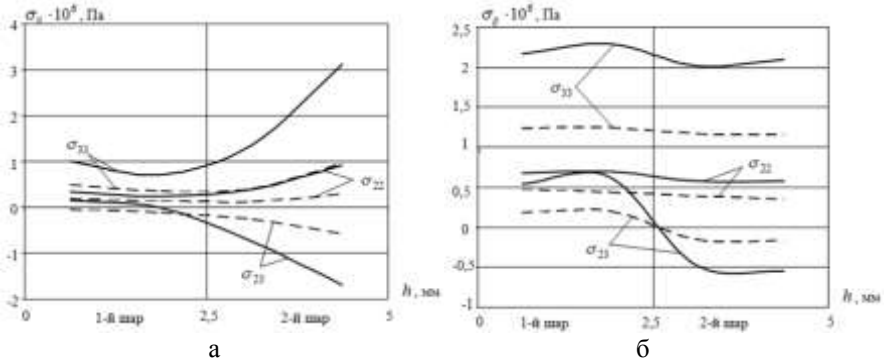


Рисунок 5 – Консольна циліндрична оболонка, один торець якої затиснений, а другий переміщується на задану величину

Геометричні параметри оболонки: $h = 5$ мм, $L = R = 100$ мм. Об'ємний коефіцієнт армування $\psi_C = 0,5$. Інші характеристики армованого шару кожного разу підбирають, виходячи з рівності $h_0 = h/N$, де N – кількість шарів у пакеті, й залежності об'ємного коефіцієнту армування від діаметру і частоти волокон. Шари оболонки розташовані антисиметрично з кутами укладки волокон $\gamma^{(k)} = (-1)^k \gamma$. На рисунку 6 приведені залежності напружень σ_{22} , σ_{33} й σ_{23} від поперечної координати у затисненні та у центральному перерізі оболонки. У затисненні пружний розв'язок дає значення напружень, що майже втричі перебільшують значення напружень, знайдені за в'язкопружним розв'язком. У центральному перерізі різниця значень складає до 77%. Очевидно, що з часом при постійній деформації у конструкції відбувається процес релаксації напружень як у затисненні, так і у центрі оболонки.

Досліджено напружений стан затисненої на торцях багатошарової гумокордної труби. Товщина труби: $h = 0,456$ см, внутрішній радіус: $R = 0,1$ м, довжина твірної: $L = 0,5$ м. Труба затиснута на торцях і перебуває під внутрішнім тиском. Інтенсивність навантаження $q = 0,15$ МПа. На рисунку 7 зображено залежність прогину внутрішньої поверхні труби від кутів укладки волокон. Можна зазначити, що найбільше повзучість матеріалу проявляє себе при радіальному способі армування, і майже однакова для інших кутів, різниця величини переміщень складає від 31% до 55%.



— пружний розв'язок; --- в'язкопружний розв'язок
 а – у затисненні; б – у центральному перерізі
 Рисунок 6 – Залежність напружень σ_{22} , σ_{33} й σ_{23} від поперечної координати

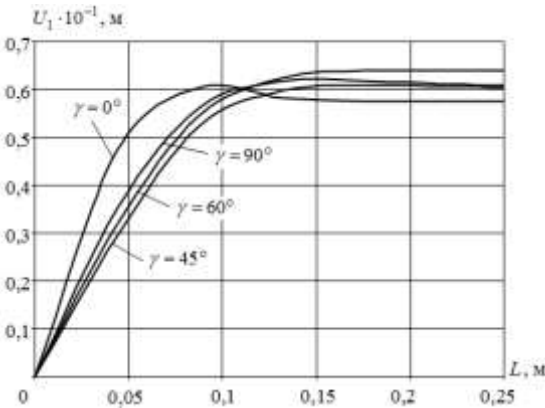


Рисунок 7 – Радіальне переміщення внутрішньої поверхні труби при різних кутах армування

Розглянуто напружено-деформований стан однопорожнинного пневмобалона з гумокордною оболонкою (рис. 8). Розміри пневмобалона: $D = 248$ мм, $H = 112$ мм, $D_1 = 150$ мм. Оболонка виготовлена з гуми (миттєвий модуль пружності $E_{R0} = 10$ МПа, тривалий модуль пружності $E_{R\infty} = 3,874$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu_R = 0,49$), армованої поліамідними волокнами ($E_C = 120$ ГПа, $\nu_C = 0,34$). Волокна розташовані у два шари і мають перехресну схему армування з кутами $\pm\gamma$ відносно меридіану конструкції. Оболонка перебуває під дією внутрішнього тиску та осьового навантаження. Розрахунки були проведені для різного об'ємного вмісту волокон при меридіанному армуванні гумокордної оболонки.

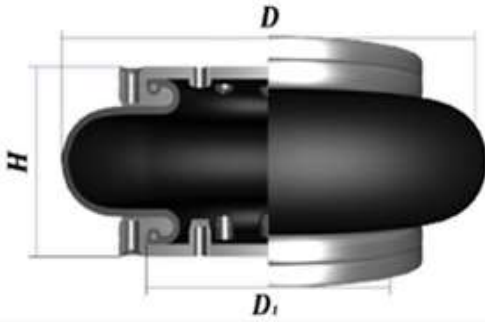


Рисунок 8 – Пневмобалон з гумокордною оболонкою

Розподіл осьових переміщень у пневмобалоні при об'ємному вмісті волокна $\psi_C = 0,3$ представлено на рисунку 9. Вертикальна осадка амортизатора в залежності від часу показана на рисунку 10.

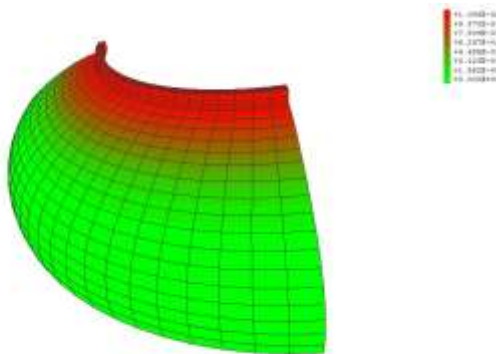


Рисунок 9 – Розподіл осьових переміщень оболонки

Якісна картина при різному об'ємному вмісті волокна однакова: спочатку йде значне збільшення величини осадки (від 90% при $\psi_C = 0$ до 70% при $\psi_C = 0,3$), а потім процес стабілізується і з плином часу (20 с після навантаження) практично не змінюється. Гума має виражені в'язкопружні властивості, тому чим менше об'ємний вміст волокна, тим більший прояв в'язкопружних властивостей у гумокордному композиційному матеріалі. Розрахунок напружено-деформованого стану конструкції дозволяє визначити раціональні характеристики для композиційного матеріалу при заданих навантаженнях та оцінювати міцність конструкції без проведення практичних експериментів.

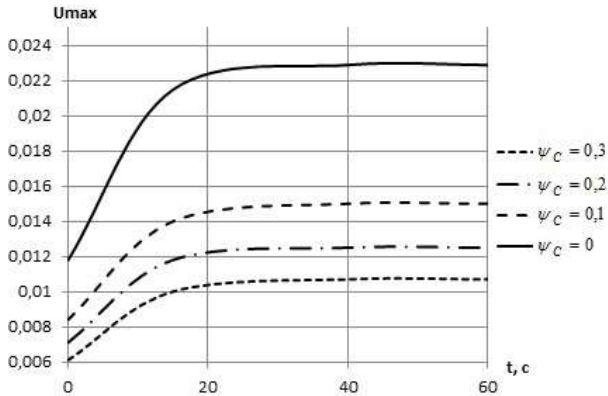


Рисунок 10 – Максимальні переміщення в оболонці протягом часу в залежності від об'ємного вмісту волокон

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язано важливу науково-технічну задачу про визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів в умовах в'язкопружного деформування з використанням миттєвих та тривалих характеристик складових. Основні результати, отримані у дисертаційній роботі, такі:

1) вперше розроблено просторово-часовий скінченний елемент для розв'язування задач в'язкопружності. Із застосуванням моментної схеми скінченних елементів побудовано матрицю жорсткості для модифікованого лінійного паралелепіпедного скінченного елемента;

2) вперше запропоновано чисельні підходи до визначення напружено-деформованого стану композиційних конструкцій в умовах в'язкопружного деформування на основі розробленого просторово-часового скінченного елемента;

3) на основі запропонованих чисельних підходів створено програмне забезпечення для розв'язування задач в'язкопружності конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів;

4) за допомогою розробленого програмного забезпечення досліджено напружено-деформований стан конструкцій із волокнистого композиційного матеріалу в умовах в'язкопружності;

5) встановлено, що для розглянутих конструкцій із композиційних матеріалів із пружним волокном та в'язкопружною матрицею:

– внаслідок повзучості переміщення у в'язкопружному випадку можуть бути на 30...50% більші, ніж у пружному, в залежності від властивостей матеріалу та характеру армування; чим менший вміст в'язкопружної матриці у композиті, тим менший прояв повзучості;

– зменшення величин напружень внаслідок релаксації, тим сильніше, чим менше об’ємний вміст волокон у композиційному матеріалі.

Співвідношення для матриці жорсткості просторово-часового скінченного елемента, чисельні підходи та пакет прикладних програм, запропоновані в дисертаційній роботі, були впроваджені та використані у відділі механіки еластомерних конструкцій Інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при проектуванні гумових амортизаторів із гумокордними вставками.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати

1. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние полого ортотропного цилиндра в условиях вязкоупругого деформирования. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2005. № 2. С. 76–80. (фахове видання)

2. Гребенюк С. Н., Лисица Н. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2006. Вип. 63. С. 154–160. (фахове видання)

3. Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. 2006. № 2. С. 50–54. (фахове видання, Web of Science)

4. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженное состояние защемленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической оболочки. *Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць*. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 71. С. 166–170. (фахове видання)

5. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. *Вісник Східноукраїнського національного університету*. Луганськ, 2010. № 10(152). Ч. 2. С. 41–48. (фахове видання, Google Scholar)

6. Гоменюк С. И., Гребенюк С. М., Клименко М. И., Мизерна О. Л. Чисельне моделювання в’язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу. *Вісник ХНТУ*. 2018. № 3(66). Т. 1. С. 39–44. (фахове видання)

7. Mizerna O. Calculation of the stress-strain state of a pneumocylinder with a rubber-cord shell. *Polish journal of science*. 2020. № 24. Vol. 1. P. 56–60. (Google Scholar)

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

8. Киричевский В. В., Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций. *Механика эластомеров – 2005*: Тезисы докладов VI Международного симпозиума, 22...24 ноября 2005 г., Днепропетровск, 2005. С. 39–40.

9. Grebenyuk S. N., Kirichevsky Val. V., Mizernaya E. L. Modeling of features in stressdeformed states of designs from composite materials. *Advanced Problems in Mechanics: XXXIV Summer School-Conference*, June 25...July 1 2006 у., St. Petersburg, 2006. P. 40–41.

10. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Киричевский Вал. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики*: Тезисы докладов Междунар. конф., 23...26 октября 2006 г., Харьков, 2006. С. 63.

11. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние композитной пластины с круговым отверстием. *Современные проблемы машиностроения*: Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов, 1...7 декабря 2006 г., Харьков, 2006. С. 13.

12. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Вязкоупругое деформирование конструкций из композитных материалов. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: Тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського, 17...19 жовтня 2007 р., Дніпропетровськ, 2007. С. 180.

13. Мизерная Е. Л., Гребенюк С. Н. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МИРЕЛА». *Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці*: Тези доповідей IV Всеукраїнської науково-практичної конференції, 15...17 квітня 2010 р., Луганськ, 2010. С. 66–67.

14. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л., Решевская Е. С., Тархова В. М. Специальные конечные элементы в программном комплексе «МИРЕЛА». *Международная конференция по математическому моделированию*: Тезисы докладов, 12...17 сентября 2010 г., Херсон, 2010. Вып. 3(39). С. 132–136.

15. Гребенюк С. Н., Мизерная Е. Л. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ. *Математические проблемы технической механики – 2011*: Тезисы докладов Международной научной конференции, 13...15 апреля 2011 г., Днепропетровск, 2011. С. 60–61.

16. Мизерная Е. Л. Исследование напряженно-деформированного состояния композита с вязкоупругой матрицей. *VIII Международные молодежные научно-технические чтения им. А. Ф. Можайского*: Тезисы докладов, 19...20 мая 2015 г., Запорожье, 2015. С. 36–37.

АНОТАЦІЯ

Мізерна О. Л. Напружено-деформований стан волокнистих композиційних матеріалів в умовах в'язкопружного деформування. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла, Національний університет «Запорізька політехніка» Міністерства освіти і науки України, Запоріжжя, 2021.

Запропоновано підхід, що є розвитком моментної схеми скінченних елементів у вигляді методу переміщень на основі варіаційного принципу Лагранжа для визначення напружено-деформованого стану в'язкопружного композиційного матеріалу. Розроблено спеціальний просторово-часовий скінченний елемент, який враховує в'язкопружні властивості матриці матеріалу та пружні властивості волокон.

Розроблено підходи до розв'язку задач в'язкопружності механіки композиційних матеріалів у тривимірній постановці, на їх базі створено пакет прикладних програм. Проведено розрахунок елементів машинобудівних конструкцій різноманітної конфігурації з експлуатаційними умовами навантаження.

Ключові слова: волокнистий композиційний матеріал, в'язкопружність, напружено-деформований стан, моментна схема скінченних елементів, просторово-часова апроксимація.

АННОТАЦИЯ

Мизерная Е. Л. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, Национальный университет «Запорожская политехника» Министерства образования и науки Украины, Запорожье, 2021.

Диссертация посвящена определению напряженно-деформированного состояния волокнистых композиционных материалов, в которых в качестве матрицы использован материал, обладающий свойствами вязкоупругости, а в качестве армирующего материала – упругие волокна. Наличие в композиционном материале компонентов, обладающих разными механическими и физическими свойствами, обуславливает новые свойства материала. С увеличением сферы применения композитов усложняются также и геометрические формы конструкций на их основе. Все это приводит к сложностям математического характера при моделировании и расчете напряженно-деформированного состояния композитных конструкций. Применение аналитических методов расчета становится невозможным, и

возникает необходимость в разработке и усовершенствовании численных методов.

Предложен подход, являющийся развитием моментной схемы конечных элементов в форме метода перемещений на основе вариационного принципа Лагранжа. Волокнистый композиционный материал рассмотрен в трехмерной постановке, при моделировании были применены соотношения пространственной теории упругости. Для описания свойств вязкоупругости в материале использована упруго-наследственная теория Больцмана–Вольтерра.

Разработан специальный пространственно-временной конечный элемент, представленный линейным параллелепипедным элементом с пространственно-временной аппроксимацией перемещений. Построена матрица жесткости модифицированного конечного элемента, учитывающая вязкоупругие свойства матрицы материала и упругие свойства волокон.

Разработаны подходы к решению задач вязкоупругости механики композиционных материалов в трехмерной постановке. Создан пакет прикладных программ для исследования напряженно-деформированного состояния конструкций из волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования. С помощью данного пакета проведен расчет элементов современных машиностроительных конструкций: пластин и оболочек различной конфигурации с разными силовыми граничными условиями. Проведено сравнение, где это возможно, с известными решениями задач других авторов. Полученные результаты не противоречат данным, приведенным в литературе, что подтверждает достоверность и эффективность разработанных подходов. Также проведен расчет напряженно-деформированного состояния резинокордной оболочки пневмобаллона. Исследовано распределение полей перемещений и напряжений в зависимости от концентрации волокон в материале.

Разработанные подходы к решению задач вязкоупругости в волокнистых композиционных материалах имеют важное практическое значение, так как позволяют на стадии проектирования получить рациональную форму и размеры конструкции, а также выбрать наиболее эффективные параметры компонентов композиционного материала, условия нагрузки и закрепления. Все это позволяет уменьшить время и стоимость проведения экспериментальных исследований и оптимизировать процесс проектирования конструкции.

Ключевые слова: волокнистый композиционный материал, вязкоупругость, напряженно-деформированное состояние, моментная схема конечных элементов, пространственно-временная аппроксимация.

ABSTRACT

Mizerna O. L. Stress-strain state of fibrous composites under viscoelastic deformation. – Manuscript copyright.

The Ph.D. thesis for a Candidate Degree in Technical Sciences in specialty 01.02.04 – Deformable and Rigid Body Mechanics, Zaporizhzhia Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Zaporizhzhia, 2021.

The paper proposes an approach that builds the moment scheme of finite elements in the form of the displacement method based on the Lagrange principle to determination of the stress-strain state of viscoelastic fibrous composite structures. A special space-time finite element taking into account the material matrix viscoelastic properties and the elastic properties of the fibers has been developed.

Approaches to solving problems of composite mechanics viscoelasticity in three-dimensional model have been figured out, the application package has been created. The calculation of units of modern machine-building structures of different configurations with different power boundary conditions has been carried out.

Keywords: fibrous composite, viscoelasticity, stress-strain state, moment scheme of finite elements, spatio-temporal approximation.

Підписано до друку 01.03.2021 р. формат 60x84 1/16 0,74 д.а.
Тираж 100 прим. Зам. № 97.
69063 м. Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», Друкарня,
вул. Жуковського, 64