МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання
з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

Частина 1

«Задачі лінійного програмування»

2019

Конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі». Частина 1. «Задачі лінійного програмування» / Укл. О. Л. Мізерна. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2019. 51 с.

Укладач: Мізерна О. Л., старший викладач

Рецензент: Нечипоренко Н.О., доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Мізерна О. Л., старший викладач

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 9 від 15.05.2019 р.

Рекомендовано
до видання НМК факультету
економіки та управління
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 20 від 07.06.2019р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. До етапів вивчення економічних систем відносять: з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудову економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку, розробку плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану.

Метою викладання дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» є формування у студентів системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах ринкової економіки. У результаті вивчення навчальної дисципліни студенти повинні знати основні математичні моделі, засновані на теоретичних закономірностях; основні методи побудови математичних моделей економічних процесів; вміти економічно інтерпретувати та аналізувати отримані результати.

Дисципліна «Оптимізаційні методи та моделі» входить до комплексу дисциплін для спеціальностей: 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 075 «Маркетинг», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», а також є складовою дисципліни «Вища та прикладна математика» для спеціальностей 073 «Менеджмент», 281 Публічне управління та адміністрування».

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Економіко-математична модель

Модель – умовний образ деякого об'єкта, що наближено відтворює цей об'єкт за допомогою деякої мови. В економіко-математичних моделях таким об'єктом є економічний процес (використання ресурсів, розподіл виробів між різними типами устаткування і т.д.), а мовою – класичні і спеціально розроблені математичні методи.

Економіко-математична модель – математичний опис досліджуваного економічного об'єкта або процесу. Ця модель виражає закономірності економічного процесу в абстрактному вигляді за допомогою математичних співвідношень. Використання математичного моделювання в економіці дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, інтенсифікувати економічні розрахунки.

3 основних етапи математичного моделювання:

а) постановка мети й задачі дослідження;

б) формування математичної моделі досліджуваного об'єкта, здійснення (розробка) методів дослідження, програмування моделі на ЕОМ, підготовка вихідної інформації;

в) аналіз математичної моделі, проведення машинних розрахунків, обробка та аналіз отриманих результатів.

Процедура економіко-математичного моделювання замінює розрахунками коштовні й трудомісткі натуральні експерименти. На ЕОМ досить швидко й дешево проводиться порівняння різноманітних варіантів планів і управлінських рішень. У результаті відбираються найбільш оптимальні варіанти.

1.2 Лінійне програмування

Оптимізаційна задача – це економіко-математична задача, яка полягає у знаходженні оптимального (максимального чи мінімального) значення цільової функції, причому значення змінних повинні належати деякій області допустимих значень.

У найбільш загальному вигляді задачу математично можна записати так:

$$U = f(X) \to \max(\min), \tag{1.1}$$

де $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – приймає значення з деякої області допустимих значень (ОДЗ), $f(X)$ – цільова функція.

Для того, щоб розв'язати задачу оптимізації, потрібно знайти такий оптимальний розв'язок X_0 з ОДЗ, який би максимізував (мінімізував) цільову функцію (1.1).

Методи розв'язання оптимізаційних задач залежать від вигляду цільової функції та від будови допустимої множини. Якщо цільова функція задачі є функцією n змінних, то методи розв'язання називають **методами математичного програмування**.

Основні задачі математичного програмування:

— задачі лінійного програмування (ЗЛП), якщо $f(X)$ і ОДЗ лінійні;

— задачі цілочисельного програмування, якщо ставиться умова цілочисельності змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

— задачі нелінійного програмування, якщо цільова функція має нелінійний характер.

Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.2}$$

за умов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,k}; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m}; \\ x_J \ge 0, \quad j = \overline{1,l}; l \le n. \end{cases} \tag{1.3}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані сталі величини.

Функція (1.2) називається **цільовою функцією** задачі (1.2)–(1.3), а умови (1.2) – **обмеженнями** даної задачі.

Допустимий розв'язок (план) – сукупність чисел $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, які відповідають обмеженням задачі (1.2)–(1.3).

Оптимальний розв'язок (план) – це план $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)$, при якому цільова функція (1.2) приймає своє максимальне (мінімальне) значення. Отже, X^* – оптимальний план задачі, якщо для будь-якого X виконується нерівність: $F\left(X\right)\le F\left(X^*\right)$ (відповідно $F\left(X\right)\ge F\left(X^*\right)$).

Стандартна ЗЛП – це задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1.2) при виконанні умов (1.3), де $k=m,\;\; l=n,$ тобто всі обмеження є нерівностями й усі змінні невід'ємні.

Канонічна ЗЛП – це задача, яка полягає у визначенні мінімального значення функції (1.2) при виконанні умов (1.3), де $k=0,\;\; l=n,$ тобто всі обмеження є рівностями й усі змінні невід'ємні:

$$F\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=\overline{1,m};\\ x_j\ge 0, & j=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Приведення ЗЛП до канонічного вигляду:

а) якщо у вихідній задачі потрібно знайти максимум лінійної функції, то у функції необхідно змінити знак і шукати її мінімум;

б) якщо права частина деякого обмеження від'ємна, то це обмеження необхідно помножити на (-1);

в) якщо серед обмежень є нерівності, то слід привести їх до рівностей шляхом введення додаткових невід'ємних змінних;

г) якщо деяка змінна x_k не має обмежень за знаком, то вона повинна бути замінена різницею двох нових невід'ємних змінних.

Приклад. Привести до канонічного вигляду:

$$F=9x_1+10x_2+20x_3\to\max,$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 94, \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 \le 75, \\ x_1 + x_2 \ge -7, \\ x_1 \le 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінимо цільову функцію новою функцією $\widetilde{F}$, яку запишемо, як протилежну до функції F:

$$\widetilde{F} = -F = -9x_1 - 10x_2 - 20x_3 \to \min .$$

У системі обмежень у другому рядку додамо до лівої частини нерівності нову додатну змінну x_4, таким чином нерівність перетвориться у рівність:

$$5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + x_4 = 75 .$$

У третьому рядку віднімемо від лівої частини нову додатну змінну x_5 і помножимо отримане рівняння на (-1), щоб позбутися від'ємного числа у правій частині:

$$-x_1 - x_2 + x_5 = 7 .$$

Так як змінна x_1 не є додатною, замінимо її на різницю двох нових додатних змінних x_6 та x_7:

$$x_1 = x_6 - x_7$$

і підставимо отриману заміну у всі інші рівняння системи й цільову функцію. Одержимо ЗЛП у канонічному вигляді:

$$\widetilde{F} = -10x_2 - 20x_3 - 9x_6 + 9x_7 \to \min ,$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 6x_3 + 9x_6 - 9x_7 = 94, \\ 7x_2 - 9x_3 + x_4 + 5x_6 - 5x_7 = 75, \\ -x_2 + x_5 - x_6 + x_7 = 7, \\ x_j \ge 0, \ j = 2, 3, \ldots, 7. \end{cases}$$

1.3 Приклади задач лінійного програмування

Для складання математичної моделі ЗЛП необхідно:

а) визначити змінні;

б) скласти цільову функцію відповідно до мети задачі;

в) записати систему обмежень з урахуванням наявних в умові задачі показників.

Приклад. *Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва).*

Для виготовлення двох типів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види ресурсів: S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси ресурсів, кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, приведені у таблиці:

Вид ресурсу	Запас ресурсу	Кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	0	1
S_4	21	3	0

Прибуток, що можна отримати від реалізації одиниці продукції P_1 і P_2, – відповідно, 2 та 3 умовні грошові одиниці. Необхідно скласти такий план виробництва продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальний.

Розв'язання. Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1 та x_2 – кількість одиниць продукції, відповідно, P_1 і P_2, запланованих до виробництва. Для їх виготовлення буде потрібно $(1\cdot x_1+3\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_1, $(2\cdot x_1+1\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_2, $(0\cdot x_1+1\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_3, $(3\cdot x_1+0\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_4. Так як використання ресурсів не повинно перевищувати їх запасів, то зв'язок між використанням і запасами ресурсів можна виразити системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 18, \\ 2x_1+x_2\le 16, \\ x_2\le 5, \\ 3x_1\le 21. \end{cases}$$

За змістом задачі, $x_1, x_2 \geq 0$. Сумарний прибуток F буде складати $2x_1$ умовних грошових одиниць від реалізації продукції P_1 і $3x_2$ умовних грошових одиниць від реалізації продукції P_2, тобто

$$F = 2x_1 + 3x_2 .$$

Отже економіко-математична модель задачі буде мати вигляд: знайти такий оптимальний план виробництва $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, який буде мінімізувати цільову функцію

$$F = 2x_1 + 3x_2 ,$$

за системи обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад. *Задача про мінімізацію відходів.*

На підприємство надходять прямокутні листи, з яких необхідно вирізати заготовки двох видів. Розкрій листів можна зробити п'ятьма різними способами. Скільки листів треба розкроїти кожним з п'яти способів, щоб отримати необхідну кількість заготовок і мінімально можливі рештки? Характеристики процесу розкрою представлені у таблиці 1.1.

Розв'язання. Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – кількість листів, розкроєних відповідно способами I–V. Потреби в заготовках складають:

$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 1000$ – першого виду,

$12 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 600$ – другого виду.

За змістом задачі $x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5.$

Цільова функція відходів буде складати:

$$F = 0x_1 + \frac{3}{16}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{16}x_4 + \frac{3}{4}x_5 \to \min .$$

Таблиця 1.1

Варіанти розкрою	Кількість заготовок з одного листа		Відходи
	першого виду	другого виду	
I	0	12	0
II	1	9	$\frac{3}{16}$
III	2	7	$\frac{1}{8}$
IV	3	4	$\frac{5}{16}$
V	4	0	$\frac{3}{4}$
Потреби в заготовках	1000	600	

Отже економіко-математична модель задачі буде мати вигляд: знайти такий оптимальний план розкрою листів $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right)$, який буде мінімізувати цільову функцію

$$F = \frac{3}{16}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{5}{16}x_4 + \frac{3}{4}x_5,$$

за системи обмежень:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1000, \\ 12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 600, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5. \end{cases}$$

Приклад. *Задача про використання потужностей (задача про завантаження устаткування).*

Підприємству задано план виробництва продукції за часом та номенклатурою: необхідно за 12 годин робочого часу випустити 20 одиниць продукції A й 15 одиниць продукції B. Продукцію виробляють на верстатах S_1, S_2, S_3. Для кожного верстата відомі продуктивність (тобто число одиниць продукції кожного виду, що можна виробити на верстаті S_i) й витрати на виготовлення продукції кожного виду на верстаті S_i за одиницю часу.

Верстати	Продуктивність		Витрати, грош. од.	
	A	B	A	B
S_1	2	1	1	2
S_2	1	3	7	5
S_3	5	2	3	1

Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто таким чином розподілити випуск продукції між верстатами), аби витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Розв'язання. Нехай x_{ij} – час, протягом якого верстат S_i буде зайнятий виготовленням продукції j-го виду. Так як час роботи кожного верстата обмежений і не перебільшує 12 годин, то є справедливими нерівності:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 12, \\ x_{21} + x_{22} \le 12, \\ x_{31} + x_{32} \le 12. \end{cases}$$

Для виконання плану випуску за номенклатурою мають виконуватись наступні рівності:

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{21} + 5x_{31} = 20, \\ x_{12} + 3x_{22} + 2x_{32} = 15, \\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Витрати на виробництво всієї продукції виражені функцією:

$$F = x_{11} + 2x_{12} + 7x_{21} + 5x_{22} + 3x_{31} + x_{32} \to \min.$$

Отримані системи обмежень та цільова функція і будуть економіко-математичною моделлю даної задачі.

2 ГРАФІЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Графічна інтерпретація задач лінійного програмування

Графічний спосіб розв'язку ЗЛП доцільно використовувати для:

- розв'язку задач з двома змінними, коли обмеження виражені нерівностями;
- розв'язку задач з багатьма змінними за умови, що в їх канонічному запису міститься не більше двох вільних змінних.

Розглянемо ЗЛП з двома змінними:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Кожна з нерівностей системи обмежень задачі геометрично визначає півплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. У тому випадку, коли система нерівностей сумісна, областю її розв'язків є множина точок, які належать усім вказаним півплощинам. Так як множина точок перетину даних півплощин є опуклою, то областю допустимих розв'язків є опукла множина, що називається **багатокутником розв'язків.** Сторони цього багатокутника розташовані на прямих, рівняння яких можна отримати з вихідної системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки рівностей.

Областю допустимих розв'язків системи нерівностей може бути:

- опуклий багатокутник;
- опукла багатокутна необмежена область;
- порожня область;
- луч;
- відрізок;
- точка.

Цільова функція F визначає на площині сукупність паралельних прямих, кожній з яких відповідає певне значення F. Вектор $\overline{n}=(c_1, c_2)$, перпендикулярний цим прямим, вказує напрям найбільш швидкого зростання функції F, а протилежний вектор – напрям спадання F.

Якщо в одній й тій самій системі координат зобразити область допустимих розв'язків системи нерівностей та сукупність паралельних прямих, то задачу визначення максимуму функції F буде зведено до знаходження у допустимій області точки, через яку проходить пряма зі сукупності $F = const$, і яка відповідає найбільшому значенню параметра F. Ця точка існує тоді, коли багатокутник розв'язків не є порожнім, та цільова функція на ньому обмежена зверху. За цих умов в одній з вершин багатокутника розв'язків цільова функція приймає максимальне значення.

Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, що проходить через початок координат перпендикулярно вектору $\overline{n}=(c_1, c_2)$, та будемо зміщувати її за напрямом вектора $\overline{n}=(c_1, c_2)$ доти, поки вона не дійде до останньої крайньої (кутової) точки багатокутника розв'язків. Координати цієї точки визначають оптимальний план вихідної задачі.

Можливі випадки при знаходженні оптимального розв'язку:

– цільова функція приймає максимальне значення в єдиній точці A (рисунок 2.1);

– цільова функція приймає максимальне значення у будь-якій точці відрізка AB (рисунок 2.2);

– максимум є недосяжним (рисунок 2.3);

– система обмежень задачі несумісна (рисунок 2.4).

Знаходження мінімального значення за даної системи обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення при тих самих обмеженнях лише тим, що лінія рівня переміщується не у напрямі вектора, а у протилежному напрямку.

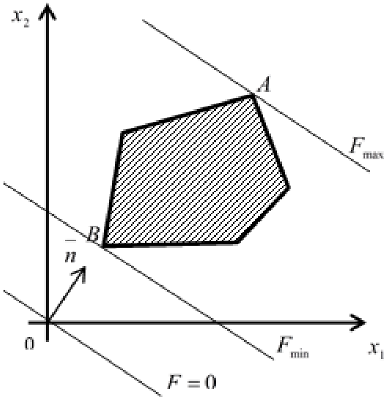

Рисунок 2.1

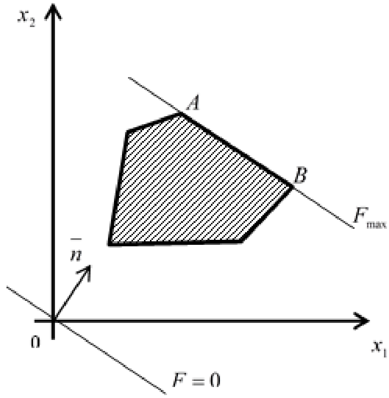

Рисунок 2.2

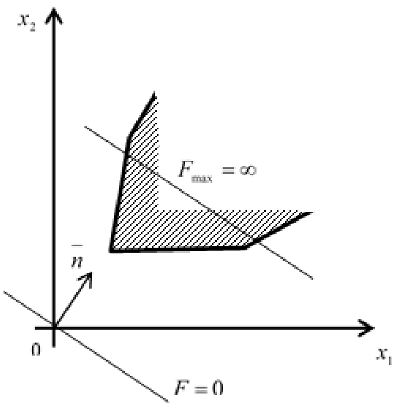

Рисунок 2.3

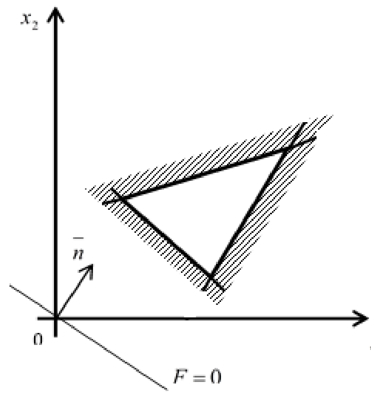

Рисунок 2.4

2.2 Алгоритм розв'язку задач лінійного програмування графічним методом

1. Побудувати прямі, рівняння яких можна отримати заміною в обмеженнях знаків нерівностей знаками рівностей.

2. Знайти півплощини, які визначені кожним з обмежень задачі.

3. Визначити багатокутник розв'язків.

4. Побудувати вектор $\overline{n}(c_1, c_2)$.

5. Побудувати пряму $F = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$, що проходить через початок координат перпендикулярно вектору $\overline{n}$.

6. Переміщувати пряму $F = c_1 x_1 + c_2 x_2$ у напрямку вектора $\overline{n}$, у результаті чого або буде знайдена точка (точки), в якій цільова функція приймає максимальне значення, або буде встановлено необмеженість функції зверху на множині планів.

7. Визначити координати точки максимуму функції та обчислити значення цільової функції у цій точці.

Приклад. Розв'язати ЗЛП графічним методом:

$$F = 7x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінимо в системі обмежень знаки нерівностей знаками рівностей, та побудуємо у системі координат графіки отриманих прямих (рисунок 2.5):

$$\begin{aligned} &4x_1 - 3x_2 = 12 \quad (I), \\ &5x_1 + 2x_2 = 20 \quad (II), \\ &x_1 + x_2 = 9 \quad (III). \end{aligned}$$

Взявши будь-яку точку, наприклад, початок координат, встановимо, яку півплощину визначає кожна нерівність. Знайдемо багатокутник розв'язків (рисунок 2.6).

Побудуємо вектор $\overline{n} = (7; 3)$ та пряму $F = 7x_1 + 3x_2 = 0$, що проходить через початок координат перпендикулярно вектору $\overline{n}$ (рисунок 2.7). Переміщуємо побудовану пряму паралельно самій собі у напрямі вектора $\overline{n}$. З рисунку 2.7 видно, що крайньою точкою багатокутника розв'язків, яку досягне пряма, буде точка A. Відповідно у цій точці цільова функція набуває свого максимального значення.

Точка A є точкою перетину прямих (II) і (III). Її координати знаходимо як розв'язок системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 20, \\ x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Отримали оптимальний план задачі: $x_1 = 0{,}67$; $x_2 = 8{,}33$. Підставимо знайдений розв’язок у цільову функцію та знайдемо максимальне значення функції F :

$$F_{\max} = 7 \cdot 0{,}67 + 3 \cdot 8{,}33 = 29{,}68.$$

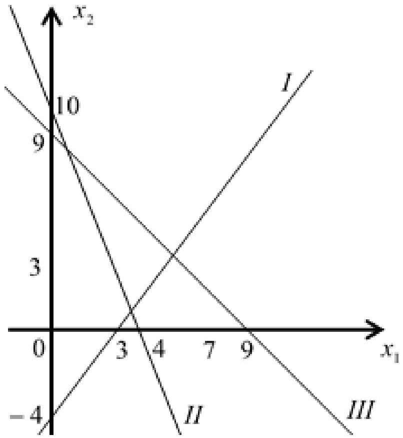

Рисунок 2.5

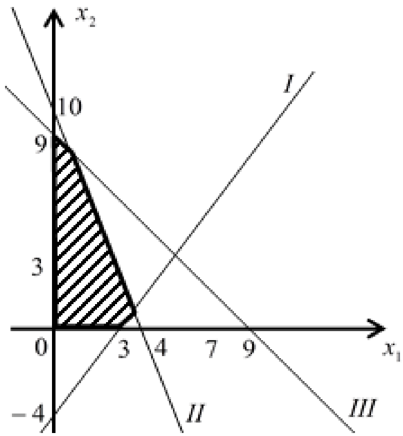

Рисунок 2.6

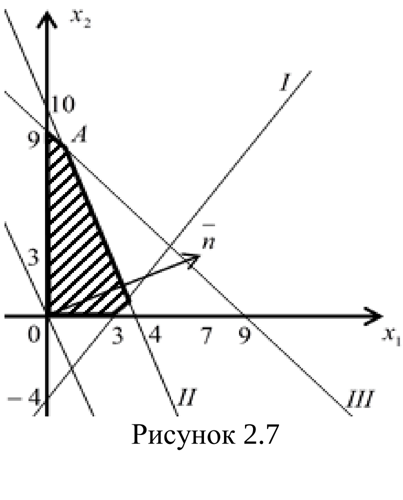

Рисунок 2.7

3 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Знаходження початкового плану задачі

Для застосування симплекс-методу необхідно, щоб задача була приведена до канонічного вигляду. Розглянемо ЗЛП:

$$F = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Виділимо у системі базисні змінні. Нехай $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ – базисні, тоді всі інші змінні будемо вважати вільними. Виразимо базисні змінні через вільні і запишемо у спеціальному вигляді:

$$F = \gamma_0 - \left(\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n\right), \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \left(\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \alpha_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{1n}x_n\right), \\ x_2 = \beta_2 - \left(\alpha_{2r+1}x_{r+1} + \alpha_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{2n}x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r - \left(\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \alpha_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + \alpha_{rn}x_n\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

За цільовою функцією (3.1) та системою обмежень (3.2) складемо першу симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Вільний член	Вільні змінні			
		x_{r+1}	x_{r+2}	…	x_n
x_1	β_1	α_{1r+1}	α_{1r+2}	…	α_{1n}
x_2	β_2	α_{2r+1}	α_{2r+2}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	α_{rr+1}	α_{rr+2}	…	α_{rn}
$\tilde{F}_{\min}$	γ_0	γ_1	γ_2	…	γ_n

3.2 Алгоритм симплекс-метода

1. В останньому рядку симплекс-таблиці знайти найменший додатний елемент, не враховуючи вільний член. Якщо таких елементів декілька однакових, обрати будь-який. Стовпець, який відповідає цьому елементу, вважати розв'язувальним.

2. Обчислити симплекс-відношення, тобто відношення вільних членів до відповідних додатних елементів розв'язувального стовпця. Рядок з найменшим симплекс-відношенням вважати розв'язувальним. Якщо найменшими є декілька однакових симплекс-відношень, обрати будь-яке. Якщо серед симплекс-відношень додатних немає, то задача не має розв'язку, тобто мінімуму цільової функції при заданих обмеженнях досягнути неможливо.

3. На перетині розв'язувального стовпця та розв'язувального рядка знайти розв'язувальний елемент.

4. Побудувати другу симплекс-таблицю. Змінні, що знаходяться у розв'язувальних рядку та стовпці, змінюють місцями. Тобто, базисна змінна стає вільною, а вільна – базисною.

5. Елемент другої таблиці, що відповідає розв'язувальному елементу першої таблиці, обчислити, як обернений до розв'язувального.

6. Елементи другої таблиці, що відповідають елементам розв'язувального рядка першої таблиці, обчислити шляхом ділення елементів розв'язувального рядка на розв'язувальний елемент.

7. Елементи другої таблиці, що відповідають елементам розв'язувального стовпця першої таблиці, обчислити шляхом ділення елементів розв'язувального стовпця на розв'язувальний елемент і записати з протилежним знаком.

8. Усі інші елементи обчислити ***за правилом прямокутника***. Подумки у першій таблиці викреслити прямокутник, одна вершина якого знаходиться у тій клітинці, для якої необхідно обчислити елемент для другої таблиці, а протилежна вершина – у клітинці з розв'язувальним елементом. Інші дві вершини визначаються однозначно. Тоді шуканий елемент з другої таблиці буде дорівнювати різниці відповідного елемента з першої таблиці та дробу, в знаменнику якого знаходиться розв'язувальний елемент, а у

чисельнику – добуток елементів, що знаходяться на двох інших вершинах прямокутника.

9. Після заповнення другої таблиці зробити перевірку на оптимальність. Якщо в останньому рядку немає додатних елементів, то оптимальний розв'язок знайдено. Він визначається значеннями стовпця вільних членів при відповідних базисних змінних, значення вільних змінних вважаються рівними нулю. Мінімальне значення цільової функції дорівнює відповідному значенню у стовпці вільних членів.

10. Якщо оптимальності не досягнуто, почати алгоритм спочатку.

Приклад. Розв'язати задачу симплекс-методом:

$$F = 5x_1 - x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Розв'язання. Задачу задано у канонічній формі, тому можемо одразу виділяти базисні та вільні змінні. Нехай $\{x_1, x_2\}$ – базисні, а $\{x_3, x_4\}$ – вільні змінні. Виразимо базисні змінні через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_4, \end{cases}$$

$$F = 10 - 11x_3 + 15x_4$$

і запишемо цільову функцію і систему обмежень у спеціальній формі (3.1)–(3.2):

$$F = 10 - (11x_3 - 15x_4),$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - (2x_3 - 3x_4), \\ x_2 = 1 - (0x_3 + 2x_4). \end{cases}$$

Складемо першу симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_3	x_4
x_1	2	2	–3
x_2	1	0	2
F	10	11	–15

В останньому рядку знаходимо найменший додатний елемент, окрім елементу зі стовпця вільних членів. Цей елемент – 11, отже стовпець зі змінною x_3 є розв'язувальним.

Знаходимо симплекс-відношення. У даному випадку воно одне у рядку зі змінною x_1, отже цей рядок є розв'язувальним.

Розв'язувальний елемент – 2.

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_3	x_4
x_1	2	$\boxed{2}$	–3
x_2	1	0	2
F	10	11	–15

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінні x_1 та x_3 міняються місцями. Усі елементи нової таблиці обчислюються згідно з пунктами 5–8 алгоритму:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_1	x_4
x_3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	$1-\frac{1\cdot 0}{2}=1$	0	$2-\frac{0\cdot(-3)}{2}=2$
F	$10-\frac{2\cdot 11}{2}=-1$	$-\frac{11}{2}$	$-15-\frac{11\cdot(-3)}{2}=\frac{3}{2}$

Перевіряємо отриманий план на оптимальність. Так як в останньому рядку є додатне число, план не є оптимальним.

Повторюємо пункти 2–3 алгоритму для отриманої таблиці:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_1	x_4
x_3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	1	0	$\boxed{2}$
F	-1	$-\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінні x_2 та x_4 міняються місцями. Усі елементи нової таблиці обчислюються згідно з пунктами 5–8 алгоритму:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_1	x_4
x_3	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
F	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{4}$

Отримали новий план і він є оптимальним розв’язком задачі. Базисні змінні – $\{x_2, x_3\}$, вільні змінні – $\{x_1, x_4\}$, отже оптимальний розв’язок запишемо у наступному вигляді:

$$X^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}, 0\right),$$

мінімальне значення цільової функції:

$$F_{\min} = -\frac{7}{4}.$$

3.3 Знаходження початкового плану задачі методом штучного базису

Нехай задано ЗЛП у канонічному вигляді:

$$F = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Введемо штучні змінні $y_1, y_2, \ldots, y_m$ таким чином, щоб був виділений базис:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n), \\ y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n). \end{cases} \tag{3.4}$$

Системи (3.3) і (3.4) будуть еквівалентні, якщо всі змінні y_i для $i = \overline{1,n}$ будуть дорівнювати нулю. Крім того, вважається, що всі $b_i \geq 0$ для $i = \overline{1,n}$. В іншому випадку відповідні обмеження з системи (3.3) помножуються на (-1). Для того, щоб усі y_i дорівнювали нулю, необхідно їх перевести з базисних у вільні змінні. Це можна зробити кроками симплекс-методу. При цьому потрібно ввести додаткову функцію

$$Z = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \min.$$

Перехід закінчується тоді, коли $Z_{\min} = 0$ й усі y_i переведено у вільні змінні.

Можливі випадки розв’язку:

а) якщо $Z_{\min} \neq 0$, а всі y_i переведені у вільні змінні, то задача додатних розв’язків не має;

б) якщо $Z_{\min} = 0$, а деякі y_i залишилися у базисі, то для переведення їх до вільних змінних необхідно застосовувати спеціальні методи.

Після того, як закінчено перехід, у симплекс-таблиці викреслюють стовпці, що відповідають змінним y_i, та рядок для $Z_{\min}$, і розв'язують задачу для вихідної функції F.

Зауваження. Рекомендовано вводити якомога менше штучних змінних.

Приклад. Розв'язати ЗЛП:

$$F = x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'язання. У базис можна виділити змінну x_3. Введемо дві штучні змінні – y_1 і y_2. Запишемо систему обмежень у вигляді (3.4):

$$\begin{cases} x_3 = 1 - (3x_1 - 5x_2 + 2x_4), \\ y_1 = 4 - (-2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5), \\ y_2 = 5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5). \end{cases}$$

Цільова функція задачі:

$$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$$

та додаткова функція переходу:

$$Z = y_1 + y_2 = 9 - (-3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5).$$

Складемо першу симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні			
		x_1	x_2	x_4	x_5
x_3	1	3	–5	2	0
y_1	4	–2	2	–1	$\boxed{1}$
y_2	5	–1	3	–2	1
F	0	–1	–2	0	0
Z	9	–3	5	–3	2

Найменший додатний елемент в останньому рядку – це 2. Найменше симплекс-відношення – у рядку для y_1. Отже розв'язувальний елемент розташований на перетині стовпця для змінної x_5 та рядка для y_1.

Складемо наступну симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні			
		x_1	x_2	x_4	y_1
x_3	1	3	–5	2	0
x_5	4	–2	2	–1	1
y_2	1	1	$\boxed{1}$	–1	–1
F	0	–1	–2	0	0
Z	1	1	1	–1	–2

Найменший додатний елемент в останньому рядку – це 1. Найменше симплекс-відношення – у рядку для y_2. Отже розв'язувальний елемент розташований на перетині стовпця для змінної x_2 та рядка для y_2.

Наступна симплекс-таблиця:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні			
		x_1	y_2	x_4	y_1
x_3	6	8	5	–3	5
x_5	2	–4	–2	1	3
x_2	1	1	1	–1	–1
F	2	1	2	–2	–1
Z	0	0	–1	0	–1

Так як $Z_{\min} = 0$ та y_1 і y_2 переведені у вільні змінні, перехід до першого опорного розв'язку завершено. У симплекс-таблиці викреслюємо рядок, що відповідає функції Z, і стовпці змінних y_1 і y_2. Отримуємо таблицю у наступному вигляді:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_1	x_4
x_3	6	$\boxed{8}$	–3
x_5	2	–4	1
x_2	1	1	–1
F	2	1	–2

Розв'яжемо задачу відносно функції F. Розв'язувальний елемент знаходиться на перетині стовпця змінної x_1 та рядка змінної x_3. Виконуючи дії згідно з алгоритмом симплекс-метода, отримаємо наступну таблицю:

Базисні змінні	Вільні члени	Вільні змінні	
		x_3	x_4
x_1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$
x_5	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$
F	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{13}{8}$

В останньому рядку додатних елементів немає, отже оптимальний розв'язок знайдено:

$$X^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 5\right),$$

$$F_{\min} = \frac{5}{4}.$$

4 ДВОЇСТІ ЗАДАЧІ

4.1 Математичні моделі двоїстих задач

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу також лінійного програмування, яку називають **двоїстою** до вихідної задачі. Вихідна та двоїста задачі пов'язані між собою та створюють єдину пару двоїстих задач.

Види математичних моделей двоїстих задач.

1. *Симетричні двоїсті задачі.*

Нехай задано ЗЛП:

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\max, \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m,\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Математична модель двоїстої задачі будується наступним чином:

а) кожній нерівності системи обмежень (4.2) вихідної задачі ставиться у відповідність змінна y_i;

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m,\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \end{cases}\right| \begin{matrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_m\\ \end{matrix}$$

б) складається цільова функція: коефіцієнтами при змінних y_i є вільні члени b_i системи обмежень вихідної задачі; вимога максимізації цільової функції змінюється на мінімізацію та навпаки;

в) складається система обмежень: коефіцієнти нової системи обмежень створюють транспоновану матрицю коефіцієнтів системи обмежень (4.2) вихідної задачі; знаки нерівностей змінюються на протилежні; вільними членами системи є коефіцієнти c_i цільової функції (4.1) вихідної задачі; усі змінні y_i двоїстої задачі невід'ємні.

Математична модель двоїстої задачі має вигляд:

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min, \qquad (4.3)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

2. *Несиметричні двоїсті задачі.*

Нехай задано ЗЛП:

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max, \qquad (4.5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Математична модель двоїстої задачі будується аналогічно симетричній задачі з урахуванням наступних особливостей:

а) обмеженнями двоїстої задачі є нерівності; якщо у цільовій функції двоїстої задачі потрібно знайти мінімум, то знак нерівності $\geq$, якщо максимум, то – $\leq$;

б) змінні y_i можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Математична модель двоїстої задачі має вигляд:

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases}$$

3. *Змішані двоїсті задачі.*

Математична модель вихідної задачі містить умови симетричних і несиметричних задач. При складанні двоїстої задачі необхідно дотримуватись правил складання і симетричних, і несиметричних двоїстих задач.

4.2 Теореми двоїстості

Сумісне дослідження пари двоїстих задач має практичне значення, тому що, маючи оптимальний розв'язок однієї задачі, за допомогою теорем двоїстості можна знайти оптимальний розв'язок іншої задачі, не розв'язуючи її.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то інша також має оптимальний розв'язок, причому для будь-яких оптимальних розв'язків X^* та Y^* виконується рівність:

$$F_{\max}\left(X^*\right) = Z_{\min}\left(Y^*\right).$$

Якщо одна з двоїстих задач не має розв'язку, то інша задача також не має допустимих розв'язків.

Друга теорема двоїстості. Якщо в оптимальному розв'язку однієї з двоїстих задач будь-яка змінна строго більша нуля, то відповідне їй обмеження в іншій двоїстій задачі виконується як строга рівність, і навпаки, якщо при оптимальному розв'язку однієї з двоїстих задач будь-яке обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна йому змінна в оптимальному розв'язку іншої задачі дорівнює нулю.

Приклад. Нехай дана ЗЛП:

$$F(x) = x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Побудувати двоїсту задачу та знайти її розв’язок за допомогою теорем двоїстості.

Розв’язання. Математична модель симетричної двоїстої задачі згідно (4.3)–(4.4) буде мати вигляд:

$$Z(y) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1, \\ y_i \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Розв’язавши вихідну задачу графічним методом, отримаємо:

$$X^* = (4;1),$$

$$F_{\max} = 3.$$

Згідно з першою теоремою двоїстості:

$$Z_{\min} = F_{\max} = 3.$$

Згідно з другою теоремою двоїстості, так як в оптимальному розв’язку $x_1, x_2 > 0$, то відповідні їм обмеження у двоїстій задачі виконуються як строгі рівності:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Підставимо X^* у систему обмежень (4.7) вихідної задачі:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \le 2, \\ 4 - 2 \cdot 1 \le 2, \\ 4 + 1 \le 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 < 2, \\ 2 = 2, \\ 5 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 > 0, \\ y_3 > 0. \end{cases}$$

Тоді система (4.8) матиме вигляд:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1, \\ -2y_2 + y_3 = -1, \end{cases}$$

звідси

$$Y^* = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Приклад. Нехай дана ЗЛП:

$$F(x) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Побудувати й розв’язати двоїсту задачу, та знайти розв’язок вихідної задачі за допомогою теорем двоїстості.

Розв’язання. Математична модель несиметричної двоїстої задачі згідно (4.5)–(4.6) буде мати вигляд:

$$Z(y) = 9y_1 + 6y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 3, \\ -2y_1 + y_2 \leq 1, \\ 3y_1 - 6y_2 \leq 3, \\ -2y_1 - y_2 \leq 1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Розв’язавши двоїсту задачу графічним методом, отримаємо:

$$Y^* = \left(\frac{1}{2}; 2\right),$$

$$Z_{\max} = \frac{33}{2}.$$

Згідно з першою теоремою двоїстості:

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{33}{2}.$$

Підставимо Y^* у систему обмежень (4.10) двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{1}{2}+2\le 3, \\ -2\cdot\dfrac{1}{2}+2\le 1, \\ 3\cdot\dfrac{1}{2}-6\cdot 2\le 3, \\ -2\cdot\dfrac{1}{2}-2\le 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=3, \\ 1=1, \\ -\dfrac{21}{2}<3, \\ -3<1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=0, \\ x_4=0. \end{cases}$$

Тоді система (4.9) матиме вигляд:

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2=9, \\ x_1+x_2=6, \end{cases}$$

звідси

$$X^*=\left(\frac{21}{4},\frac{3}{4},0,0\right).$$

Приклад. Нехай дана ЗЛП:

$$F(x)=x_1-6x_2-x_3\to\max,$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=3, \\ 2x_1+3x_3\le 4, \\ x_j\ge 0, \quad j=1,2,3. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу та знайти її розв’язок за допомогою теорем двоїстості.

Розв’язання. Математична модель змішаної двоїстої задачі буде мати вигляд:

$$Z(y)=3y_1+4y_2\to\min,$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2\ge 1, \\ 3y_1\ge -6, \\ 3y_1+3y_2\ge -1, \\ y_2\ge 0. \end{cases}$$

Розв’язавши вихідну задачу, маємо:

$$X^* = \left(1, 0, \frac{2}{3}\right),$$

$$F_{\max} = \frac{1}{3}.$$

Згідно з першою теоремою двоїстості:

$$Z_{\min} = F_{\max} = \frac{1}{3}.$$

Згідно з другою теоремою двоїстості, так як в оптимальному розв’язку $x_1, x_3 > 0$, то відповідні їм обмеження у двоїстій задачі виконуються як строгі рівності:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3y_1 + 3y_2 = -1, \end{cases}$$

звідси

$$Y^* = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

5 ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1 Основні поняття

Транспортна задача – це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \tag{5.1}$$

за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5.2}$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача; a_i – запаси продукції *i*-го постачальника; b_j – попит на продукцію *j*-го споживача.

У загальному вигляді вихідні дані можна представити таблицею 5.1.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{5.3}$$

то таку транспорту задачу називають **збалансованою**, або **закритою**. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають **незбалансованою**, або **відкритою**.

Таблиця 5.1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Попит	b_1	b_2	…	b_n	

Теорема *(умова існування розв'язку транспортної задачі).* Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто виконання умови (5.3).

У випадку, коли у вихідній умові задано відкриту задачу, її необхідно збалансувати:

– якщо попит перевищує запаси, то вводять фіктивного постачальника з обсягом запасу, якого не вистачає;

– якщо запаси перевищують попит, то вводять фіктивного споживача з рівнем попиту, якого не вистачає.

Вартості перевезень між фіктивними постачальниками та споживачами беруть рівними нулю.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.2) транспортної задачі, який позначають матрицею $X = (x_{ij}),\ i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}.$

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю X^*, яка задовольняє умові задачі та для якої цільова функція (5.1) набуває найменшого значення.

Транспортну задачу, як задачу лінійного програмування, можна розв'язати симплекс-методом, але найпоширенішим та більш ефективним є метод потенціалів.

5.2 Алгоритм метода потенціалів

1. Побудова початкового плану.

Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі – стовпчиками. Методи побудови початкового плану:

а) ***метод північно-західного кута***. Починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т.д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

б) ***метод мінімальної вартості.*** На кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

в) ***метод апроксимації Фогеля.*** На кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови опорного плану у таблиці має бути заповнено $(m + n - 1)$ клітинок, де m – кількість постачальників; n – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають **виродженим**. У цьому випадку необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення».

2. Розрахунок потенціалів.

Розрахунок потенціалів виконують для заповнених клітинок, для яких має виконуватись рівність:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \qquad (5.4)$$

де α_i – потенціал i-го рядка, β_j – потенціал j-го стовпця. Для першого рядка приймають $\alpha_1 = 0$.

3. Перевірка плану на оптимальність.

Для порожніх клітинок повинна виконуватись нерівність:

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}, \qquad (5.5)$$

якщо хоча б для однієї порожньої клітинки умова (5.5) не виконується, то план не є оптимальним.

4. Пошук клітинки з максимальною неоптимальністю.

Для клітинок, у яких умова (5.5) не виконалася обчислюють різниці:

$$\Delta c_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}, \qquad (5.6)$$

які показують розмір економії транспортних витрат на перевезення одиниці вантажу. Обирають клітинку з найбільшим значенням Δc_{ij}. Перехід до нового плану здійснюється заповненням цієї клітинки.

5. Побудова циклу перерозподілу.

Для клітинки з найбільшою неоптимальністю будують цикл перерозподілу за наступними правилами:

а) будують замкнений багатокутник з вершинами у заповнених клітинках та у порожній клітинці з максимальною неоптимальністю;

б) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому порожній клітинці – знак «+», а іншим чергують «–» та «+»;

в) із клітинок зі знаком «–» обирають клітинку з найменшим обсягом перевезення x_{ij};

г) це найменше значення переносять у порожню клітинку з найбільшою неоптимальністю, тим самим заповнюючи її; віднімають його від відповідних значень у клітинках зі знаком «–» і додають у клітинках зі знаком «+».

Таким чином одна з порожніх клітинок стала заповненою, а одна із заповнених стала порожньою. У інших клітинках обсяги вантажу перерозподілені.

6. Перейти до пункту 2.

Алгоритм виконують доти, поки не виконається умова оптимальності (5.5) у пункті 3.

Оптимальний розв’язок записують у вигляді матриці перевезень.

Приклад. Мінімізувати транспортні витрати на доставку вантажів від постачальників A_1, A_2, A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 якщо задані обсяги поставок: $a_1 = 150,\ \ a_2 = 60,\ \ a_3 = 80,$ і потреб: $b_1 = 110,\ \ b_2 = 40,\ \ b_3 = 60,\ \ b_4 = 80$. Тарифи на доставку одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача представлені у таблиці:

Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити початковий план трьома способами: а) методом північно-західного кута; б) методом мінімальної вартості; в) методом Фогеля.

Розв’язання. Перевіримо, чи є задача закритою:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 150 + 60 + 80 = 290,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 110 + 40 + 60 + 80 = 290,$$

отже $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ – задача збалансована. Побудуємо першу транспортну таблицю:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	4	2	5	150
A_2	5	3	1	2	60
A_3	2	1	4	2	80
Потреби	110	40	60	80	290

Складемо опорний план.

1. Метод північно-західного кута.

Починаємо заповнювати таблицю з верхньої лівої клітинки, $x_{11} = 110$. Далі рухаємося праворуч у наступну клітинку, заповнюємо $x_{12} = 40$. Так як у постачальника A_1 запаси вичерпано, зпускаємося на клітинку вниз. Так як потреби споживача B_2 задовільнені повністю, рухаємося знову у наступну клітинку праворуч, заповнюємо $x_{23} = 60$. Так як запаси постачальника A_2 вичерпано і потреби споживача B_3 задовільнені, знову рухаємося на одну клітинку вниз і праворуч. Останнє заповнення – $x_{34} = 80$. Отримали початковий опорний план:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 110	4 40	2	5	150
A_2	5	3	1 60	2	60
A_3	2	1	4	2 80	80
Потреби	110	40	60	80	290

Обчислимо вартість перевезень цього плану:

$F = 4 \cdot 110 + 4 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 80 = 820$ ум. гр. одиниць.

2. Метод мінімальної вартості.

Заповнюємо таблицю, починаючи з клітинки з найменшою вартістю. Так як таких клітинок дві, обираємо будь-яку. Нехай перше заповнення $x_{23} = 60$. Так як запаси постачальника A_2 вичерпано і потреби споживача B_3 задовільнені, виключаємо відповідний рядок і стовпець з розглядання. З тих клітинок, що залишилися, знову обираємо клітинку з найменшою вартістю, наступне заповнення $x_{32} = 40$. Так як потреби споживача B_2 задовільнені, виключаємо цей стовпець з розглядання. З клітинок, що залишилися, наступним заповненням буде, наприклад, $x_{31} = 40$. Так як запаси постачальника

A_3 вичерпано, виключаємо цей рядок. Наступні заповнення: $x_{11}=70$ і $x_{14}=80$. Отримали початковий опорний план:

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 70	4	2	5 80	150
A_2	5	3	1 60	2	60
A_3	2 40	1 40	4	2	80
Потреби	110	40	60	80	290

Обчислимо вартість перевезень цього плану:

$F = 4\cdot 70 + 5\cdot 80 + 1\cdot 60 + 2\cdot 40 + 1\cdot 40 = 860$ ум. гр. одиниць.

3. Метод Фогеля.

У кожному рядку і стовпці таблиці обчислимо різницю між двома найменшими значеннями вартостей і запишемо у додаткових рядку та стовпці. Найбільша з різниць дорівнює 2. Так як таких значень декілька, обираємо будь-яке, наприклад, у рядку постачальника A_1. Знаходимо у цьому рядку клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її, $x_{13}=60$. Так як потреби споживача B_3 задовільнені, виключаємо цей стовпець з розгляду. Для тих клітинок, що залишилися, знову обчислюємо різницю між найменшими значеннями вартостей і записуємо у наступних додаткових рядку і стовпці. Найбільша з різниць дорівнює 2. Так як таких значень знову декілька, обираємо будь-яке, наприклад, у стовпці споживача B_1. Знаходимо у цьому стовпці клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її, $x_{31}=80$. Так як запаси постачальника A_3 вичерпано, виключаємо цей рядок з розгляду. Для тих клітинок, що залишилися, знову обчислюємо різницю між найменшими значеннями вартостей і записуємо у наступних додаткових рядку і стовпці. Найбільша з різниць дорівнює 3 і знаходиться у стовпці споживача B_4. Обираємо клітинку з найменшою вартістю і заповнюємо її, $x_{24}=60$ і рядок постачальника A_2 виключається з розгляду. Так як незаповненим залишився тільки один рядок, що відповідає постачальнику A_1, заповнюємо його методом мінімальної вартості. Наступні заповнення: $x_{11} = 30$, $x_{12} = 40$ і $x_{14} = 20$. Отримали початковий опорний план:

Постачальники	Споживачі				Запаси			
	B_1	B_2	B_3	B_4				
A_1	4 30	4 40	2 60	5 20	150	2	0	0
A_2	5	3	1	2 60	60	1	1	1
A_3	2 80	1	4	2	80	1	1	-
Потреби	110	40	60	80	290			
	2	2	1	0				
	2	2	-	0				
	1	1	-	3				

Обчислимо вартість перевезень цього плану:

$$F = 4 \cdot 30 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 60 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 80 = 780 \text{ ум. гр. одиниць.}$$

Оберемо для подальшого розв’язання початковий план із найменшим значенням цільової функції, тобто отриманий методом Фогеля. Перевіримо, чи кількість заповнених клітинок дорівнює $(m+n-1)$:

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6.$$

У таблиці маємо 6 заповнених клітинок, отже опорний план невироджений.

За формулою (5.4) розрахуємо для нього потенціали. Враховуючи, що $\alpha_1 = 0$, можемо знайти:

$$\beta_1 = c_{11} - \alpha_1 = 4 - 0 = 4,$$

$$\beta_2 = c_{12} - \alpha_1 = 4 - 0 = 4,$$

$$\beta_3 = c_{13} - \alpha_1 = 2 - 0 = 2,$$

$$\beta_4 = c_{14} - \alpha_1 = 5 - 0 = 5,$$

$$\alpha_2 = c_{24} - \beta_4 = 2 - 5 = -3,$$

$$\alpha_3 = c_{31} - \beta_1 = 2 - 4 = -2.$$

Постачальники	Споживачі				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 30	4 40	2 60	5 20	$\alpha_1 = 0$
A_2	5	3	1	2 60	$\alpha_2 = -3$
A_3	2 80	1	4	2	$\alpha_3 = -2$
β_j	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 5$	

Перевіримо план на оптимальність. Перевіримо виконання умови (5.5) для порожніх клітинок таблиці:

$$\alpha_2 + \beta_1 = -3 + 4 = 1 \le c_{21} = 5,$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = -3 + 4 = 1 \le c_{22} = 3,$$
$$\alpha_2 + \beta_3 = -3 + 2 = -1 \le c_{23} = 1,$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = -2 + 2 = 2 > c_{32} = 1,$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = -2 + 2 = 0 \le c_{33} = 4,$$
$$\alpha_3 + \beta_4 = -2 + 5 = 3 > c_{34} = 2.$$

Постачальники	Споживачі				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 30	4 40	2 60	5 20	$\alpha_1 = 0$
A_2	$1 \le 5$	$1 \le 3$	$-1 \le 1$	2 60	$\alpha_2 = -3$
A_3	2 80	$2 > 1$	$0 \le 4$	$3 > 2$	$\alpha_3 = -2$
β_j	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 5$	

Так як є клітинки, в яких умова (5.5) не виконується, то опорний план не є оптимальним. Таких клітинок дві, отже, виберемо клітинку з найбільшою неоптимальністю. За формулою (5.6):

$$\Delta c_{32} = \alpha_3 + \beta_2 - c_{32} = -2 + 4 - 1 = 1,$$
$$\Delta c_{34} = \alpha_3 + \beta_4 - c_{34} = -2 + 5 - 2 = 1.$$

Економія витрат для обох клітинок однакова, тому обираємо будь-яку клітинку, наприклад, A_3B_2. Складемо для цієї клітинки цикл перерозподілу:

Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	+ 4 30	– 4 40	2 60	5 20
A_2	5	3	1	2 60
A_3	2 80 –	1 +	4	2

У клітинках зі знаком «–» знайдемо мінімальне значення, це – $x_{12} = 40$. Отже, перерозподіляємо ці 40 одиниць вантажу: у клітинках зі знаком «–» віднімаємо, а у клітинках зі знаком «+» додаємо. Отримаємо новий опорний план:

Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4 70	4	2 60	5 20
A_2	5	3	1	2 60
A_3	2 40	1 40	4	2

Повторюємо алгоритм спочатку – обчислюємо потенціали і перевіряємо новий опорний план на оптимальність:

Постачальники	Споживачі				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 70	$3 \le 4$	2 60	5 20	0
A_2	$1 \le 5$	$0 \le 3$	$-1 \le 1$	2 60	–3
A_3	2 40	1 40	$0 \le 4$	$3 > 2$	–2
β_j	4	3	2	5	

Опорний план не є оптимальним, отже, потребує перерозподілу.

Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	+ 4 70	4	2 60	– 5 20
A_2	5	3	1	2 60
A_3	2 40 –	1 40	4	2 +

У клітинках зі знаком «–» найменше значення – $x_{14} = 20$. Отже, перерозподіляємо 20 одиниць вантажу. Отримаємо новий опорний план:

Постачальники	Споживачі			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4 90	4	2 60	5
A_2	5	3	1	2 60
A_3	2 20	1 40	4	2 20

Обчислюємо потенціали і перевіряємо новий опорний план на оптимальність:

Постачальники	Споживачі				α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 90	$3 \le 4$	2 60	$4 \le 5$	0
A_2	$2 \le 5$	$1 \le 3$	$0 \le 1$	2 60	–2
A_3	2 20	1 40	$0 \le 4$	2 20	–2
β_j	4	3	2	4	

Для всіх клітинок умова оптимальності виконана, отже, отримали оптимальний план перевезень:

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix},$$

мінімальна вартість перевезень:

$F_{\min} = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. гр. одиниць.

5.3 Задача про призначення

Частковим випадком транспортної задачі є задача про призначення:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \\ x_{ij} = 0; 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Зважаючи на особливу структуру цієї задачі було розроблено спеціальний алгоритм, що отримав назву **угорського методу.**

Етап 1.

1. Записати вихідні дані задачі у вигляді таблиці по типу транспортної.

2. У кожному рядку таблиці знайти найменший елемент і відняти його від усіх елементів відповідного рядка.

3. У кожному стовпці таблиці знайти найменший елемент і відняти його від усіх елементів відповідного стовпця.

Етап 2.

1. Знайти рядок, що містить тільки одне нульове значення, і помітити відповідну клітинку. Це буде означати призначення. Якщо таких рядків немає, то припустимо вибрати будь-яке нульове значення.

2. Закреслити інші нульові значення відповідного стовпця.

3. Пункти 1 і 2 повторювати доти, поки це можливо.

4. Якщо залишилися непомічені та незакреслені нулі, знайти стовпець, що містить тільки одне нульове значення, і помітити відповідну клітинку.

5. Закреслити інші нульові значення і відповідному рядку.

6. Повторювати пункти 4 і 5 доти, поки це можливо.

7. Якщо у кожному рядку й кожному стовпці є по одній поміченій клітинці, то отримано оптимальний розв'язок задачі. Якщо – ні, перейти до етапу 3.

Етап 3.

1. Провести мінімальну кількість прямих через рядки та стовпці таблиці (але не за діагоналями) таким чином, щоб ці прямі проходили через усі нульові значення таблиці.

2. Знайти найменший елемент серед тих, через які не проходить жодна пряма.

3. Відняти його від усіх елементів, через які не проходить жодна пряма.

4. Додати його до всіх елементів, які розташовані на перетині проведених прямих.

5. Усі елементи таблиці, через які проходить тільки по одній прямій, залишити без змін.

6. Перейти до етапу 2.

Приклад. Деяка компанія має чотири збутові бази та чотири замовлення, які необхідно доставити різним споживачам. У таблиці приведена інформація про відстань між кожною базою та кожним споживачем. Як потрібно розподілити замовлення між збутовими базами, щоб дальність транспортування була мінімальною?

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Розв'язання. Етап 1. У кожному рядку знайдемо найменший елемент:

Збутова база	Споживачі				Найменший елемент рядка
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Віднімемо найменший елемент від усіх інших елементів відповідного рядка:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	4	7	15
B	0	4	2	7
C	3	5	0	10
D	7	2	0	5

Знайдемо найменший елемент у кожному стовпці:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	4	7	15
B	0	4	2	7
C	3	5	0	10
D	7	2	0	5
Найменший елемент стовпця	0	2	0	5

Віднімемо найменший елемент від усіх інших елементів відповідного стовпця:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	0	5
D	7	0	0	0

Етап 2. Здійснимо призначення згідно з пунктами 1 і 2:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	$\boxed{0}$	2	7	10
B	~~0~~	2	2	2
C	3	3	$\boxed{0}$	5
D	7	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~

На даному етапі можемо здійснити тільки 3 призначення. Отриманий розв'язок є недопустимим.

Етап 3. Проведемо мінімальну кількість прямих через усі нулі таблиці:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	0	5
D	7	0	0	0

Найменшим елементом, через який не проходить жодна з прямих є 2. Змінимо таблицю відповідно до пунктів 3–5:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	0	0	7	8
B	0	0	2	0
C	3	1	0	3
D	9	0	2	0

Переходимо до етапу 2 і робимо призначення:

Збутова база	Споживачі			
	I	*II*	*III*	*IV*
A	$\boxed{0}$	~~0~~	7	8
B	~~0~~	$\boxed{0}$	2	~~0~~
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	~~0~~	2	$\boxed{0}$

Отримали оптимальний розв'язок:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Цей розв’язок не єдиний. Оптимальними також є два інші розв’язки:

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ і } X_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дальність перевезень для кожного з цих трьох розв’язків є однаковою та мінімальною:

$$Z_{\min}^1 = 68 + 60 + 35 + 45 = 208;$$
$$Z_{\min}^2 = 68 + 63 + 35 + 42 = 208;$$
$$Z_{\min}^3 = 72 + 56 + 35 + 45 = 208.$$

Особливі випадки задачі про призначення.

1. Максимізація цільової функції.

Якщо в умові задачі є вимога максимізації цільової функції, то усі значення першої таблиці помножуються на (–1). Далі застосовується звичайний алгоритм.

2. Неприпустимі призначення.

Якщо з деякої причини те чи інше призначення є неприпустимим, то у першій таблиці у відповідну клітинку записується таке значення вартості, яке є більшим будь-якого іншого значення вартості в таблиці.

3. Невідповідність кількості пунктів призначення та виробництва.

Якщо в умові задачі кількість пунктів призначення не дорівнює кількості пунктів виробництва, то при складанні першої таблиці до неї необхідно включити необхідну кількість рядків або стовпців, які відповідають деяким фіктивним пунктам. Значення вартості, які відповідають фіктивним клітинкам, дорівнюють нулю.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом, спец. вузов. М.: Высш. шк., 1986. 319 с.

2. Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2003. 444 с.

3. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2006. 432 с.

4. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Київ: КНЕУ, 2001. 248 с.

5. Волков И. К., Загоруйко Е. А. Исследование операций: Учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 436 с.

6. Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б. Математические методы и модели для менеджмента. СПб.: Изд-во «Лань», 2005. 528 с.

7. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник. Київ: Видавничий Дім «Слово», 2006. 816 с.

8. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб: Питер, 2000. 208 с.

9. Красс М. С, Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. СПб.: Питер, 2005. 464 с.

10. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2003. 407 с.

11. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник. Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. 260 с.

12. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.

13. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Исследование операций: учеб. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. 280 с.