МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ТА ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика”
для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання
Частина 2

2020

Індивідуальні завдання та вказівки до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання. Частина 2. / Укл.: Н.О. Нечипоренко, О.А. Щербина - Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка ”, 2020. – 50 с.

Укладачі: Н.О. Нечипоренко, доцент, к. ф.-м.н.
О.А. Щербина, асистент

Рецензент: О.В. Коротунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Н.О. Нечипоренко, доцент, к. ф.-м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 6 від 22.01.2020 р.

Рекомендовано до видання
НМК факультету
економіки та управління
Протокол № 24 від 12.02.2020 р.

ЗМІСТ

ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основні правила інтегрування

1) Якщо $F'(x) = f(x), \text{то} \int f(x)dx = F(x) + C,$

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, де a – сталий множник;

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1).$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, (a \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

13. $\int shx\,dx = chx + C.$ **14.** $\int chx\,dx = shx + C.$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$ **16.** $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

Розглянемо розв’язок типових завдань контрольної роботи.

ЗАВДАННЯ 1.

Зазначимо, що немає універсального методу інтегрування функцій , проте існують класичні, або основні методи інтегрування, до яких належать : метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки (метод заміни) й метод інтегрування частинами.

Знаходження невизначеного інтеграла шляхом зведення його до табличного називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1

$$\int (5x^3 + 3x^2 + 4)dx = 5\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 4\int dx = 5\cdot\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 4x + C =$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 4x + C.$$

Приклад 2

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{1+\frac{1}{6}}}{1+\frac{1}{6}} + \frac{x^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Приклад 3

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx -$$

$$-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + C.$$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановки двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - монотонна, безперервно диференційована функція нової змінної t. Формула заміни змінної в цьому випадку:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt\,;$$

2) $u = \psi(t)$, де u - нова змінна. Формула заміни змінної при цій підстановці:

$$\int f[\psi(t)] \cdot \psi'(t)dt = \int f(u)du\,.$$

Такий варіант заміни змінної часто називають підведенням під знак диференціала. Користуючись цим правилом, можна поширити таблицю основних інтегралів.

17. $\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

18. $\int ctgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Приклад 4

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{1-\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}} + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

<u>*Приклад 5*</u>

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{2}\int (x^2+a)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+a) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+a)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{x^2+a} + C.$$

Цими інтегралами можна користуватися як табличними.

<u>*Приклад 6*</u>

Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

Розв'язання

Нехай $2x-9=u^2$, тоді $x=\frac{u^2+9}{2}$, $dx = u\,du$.

Маємо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-9}} = \int \frac{udu}{\frac{u^2+9}{2}\cdot u} = 2\int \frac{du}{u^2+9} = 2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{u}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

<u>*Приклад 7*</u>

Знайти $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$.

Розв'язання

Нехай $\cos^2 x = t$, тоді $dt = -2\cos x \sin xdx$, $dt = -\sin 2xdx$..

Маємо

$$\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = C - \arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 8

Знайти $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

Розв'язання

Тому що x^4 є похідною $\frac{1}{5}x^5$, то замінивши x^5 на t, отримаємо:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \int \frac{\frac{1}{5}dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right| + C.$$

Метод інтегрування частинами:

якщо u(x) та v(x) диференційовані функції, то справедлива наступна формула

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Цією формулою можна користуватися неоднаразово.

Треба вказати 4 основні випадки, коли використовується метод інтегрування частинами.

1) Інтеграли виду $\int P_n(x) e^x dx$.

Тому що при диференціюванні показник ступеня многочлена $P_n(x)$ зменшується, то підінтегральні вирази треба розподілити так:

$$P_n(x) = u, \quad e^x dx = dv.$$

Тоді $du = P_n'(x)dx$ та $v = \int e^x dx = e^x$.

З формули $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ маємо:

$$\int P_n(x)e^x dx = P_n(x)e^x - \int P_n'(x)e^x dx.$$

До інтегралу справа можна знову застосувати формулу інтегрування частинами.

Приклад 9

Знайти $\int x^2 e^x dx,$

Розв'язання

Нехай $u = x^2$ та $dv = e^x dx$, тоді $du = 2xdx$ та $v = e^x$.
З формули інтегрування частинами маємо:

$$\int x^2 e^2 dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx.$$

Для інтегралу $\int 2xe^x dx$ знову застосуємо формулу інтегрування частинами: $u = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad v = e^x,$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

2) Для інтегралів виду: $\underline{\int P_n(x)\sin x dx}$ та $\underline{\int P_n(x)\cos x dx}$ діємо аналогічно, як і в випадку 1).

Приклад 10

Знайти $\int x\cos x dx.$

Розв'язання

Нехай $u = x$ та $dv = \cos x dx$, тоді $du = dx$ та $v = \sin x$.

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

3) Інтеграли виду: $\underline{\int P_n(x)\ln x dx}$.

В цьому випадку логарифмічну функцію слід прийняти за u, тому що після диференціювання вона спроститься:

$$u = \ln x, \qquad dv = P_n(x)dx,$$

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \int P_n(x)dx.$$

$$\int P_n(x)\ln x dx = \ln x \cdot \int P_n(x)dx - \int \left[\frac{1}{x}\int P_n(x)dx\right]dx + C.$$

Приклад 11

Знайти $\int x \ln x dx.$

Розв'язання

Нехай $u = \ln x$, $dv = x dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Зробив інтегрування частинами, знайдемо:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

4) Для інтегралів виду: $\underline{\int P_n(x) \arcsin x dx}$, $\underline{\int P_n(x) \arccos x dx}$, $\underline{\int P_n(x) arctgx dx}$, $\underline{\int P_n(x) arcctgx dx}$, діємо аналогічно випадку 3).

Приклад 12

Знайти $\int x arctgx dx.$.

Розв'язання

Нехай $u = arctgx$, $dv = dx$, тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

$$\int arctgx dx = x \cdot arctgx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x arctgx - \frac{1}{2} \ln\left|1 + x^2\right| + C.$$

ЗАВДАННЯ 2.

Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, такими що $f_2(x) \geq f_1(x)$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

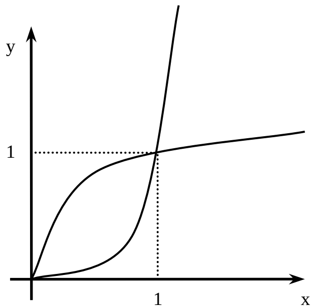
Приклад 13

Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$$y = x^2, \ y = \sqrt{x} \ .$$

Розв'язання

Побудуємо графікі функцій та визначимо фігуру, площу якої шукаємо:



Знайдемо координати точок перетину парабол:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y_1 = 0, y_2 = 1 \end{cases}.$$

Оскільки на відрізку [0, 1] виконується нерівність $\sqrt{x} \geq x^2$, то:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ кв. од.}$$

ЗАВДАННЯ 3.

Приклад 14

Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 6 + 4 \cdot \sqrt[4]{t^3} \ ; \quad D'(t) = 13 - 3 \cdot \sqrt[4]{t^3} \ .$$

$V(t)$ і $D(t)$ вимірюється у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язання

Оптимальний час t_0 для прибутку підприємства одержимо з умови: $V'(t) = D'(t)$.

$$6+4\cdot\sqrt[4]{t^3} = 13-3\cdot\sqrt[4]{t^3}\,, \quad 7\cdot\sqrt[4]{t^3} = 7\,, \qquad t_0 = 1\,.$$

Отже, підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час одержано прибутку:

$$P = \int_0^1 \left(D'(t) - V'(t)\right)dt = \int_0^1 \left(13 - 3\cdot\sqrt[4]{t^3} - 6 - 4\cdot\sqrt[4]{t^3}\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(7 - 7\cdot\sqrt[4]{t^3}\right)dt = \left.\left(7t - \frac{7\cdot t^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\right)\right|_0^1 = 7 - 4 = 3 \text{ (млн. грн.)}$$

ЗАВДАННЯ 4.

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$N(x)\cdot Q(y)dx + M(y)\cdot F(y)dy = 0$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Це рівняння розв’язується методом відокремлення змінних.

Приклад 15

Знайти частинний розв’язок рівняння $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$, якщо $y(0) = 1$.

Розв'язання

Приведемо це рівняння до рівняння з відокремленими змінними вигляду

$$N(x)dx + M(y)dy = 0\,.$$

Для цього поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{1-y^2}\cdot\sqrt{1+x^2}$ та дістанемо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, дістанемо загальний розв'язок:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=C;\Rightarrow\ \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-y^2}=C.$$

Підставимо в загальний розв'язок початкову умову $y(0)=1$

та отримуємо:

$$\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1-1^2}=C,\qquad C=1.$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння має вид:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-y^2}=1.$$

ЗАВДАННЯ 5.

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна звести до вигляду

$$y'=f(x,y),$$

де функція $f(x,y)$ не змінюється при заміні x та y на tx та ty, тобто задовольняє умові

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Приклад 16

Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{y}{x+y}$.

Розв'язання

Це рівняння є однорідним тому, що для правої частини рівняння виконується умова:

$$\frac{ty}{tx+ty}=\frac{ty}{t\cdot(x+y)}=\frac{y}{x+y}$$

Введемо допоміжну функцію u від змінної x, тобто зробимо підстановку $u=\dfrac{y}{x}$. Маємо $y=u\cdot x \Rightarrow y'=u'\cdot x+u$.

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$u'\cdot x+u=\frac{u\cdot x}{x+u\cdot x} \Rightarrow u'\cdot x=\frac{u}{1+u}-u \Rightarrow$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u-u-u^2}{1+u}\Rightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{u^2}{1+u} \Rightarrow\frac{1+u}{u^2}du=-\frac{dx}{x}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи його, знаходимо:

$$\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u}-\ln u=\ln x+\ln C \Rightarrow \frac{1}{u}=\ln(Cux).$$

Підставимо замість u вираз $\dfrac{y}{x}$ та одержимо загальний розв’язок:

$$\frac{x}{y}=\ln Cy \Rightarrow x=\ln(Cy)^y.$$

ЗАВДАННЯ 6.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' у першому степеню. Таке рівняння можна привести до вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x).$$

Приклад 17

Розв’язати рівняння $(x^2-1)\cdot y'+y=\sqrt{x-1}$.

Розв'язання

Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' + \frac{y}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Це рівняння є лінійне диференціальне рівняння першого порядку, його розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння.

Знайдемо

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

та підставимо у задане рівняння. Тоді

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot u \cdot v = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1},$$

або
$$u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot v) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто виконувалась рівність

$$v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot v = 0.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|v| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad \Rightarrow \quad v(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}.$$

Знайдемо тепер функцію u із рівняння :

$$u' \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot dx$$

$$u=\int\frac{dx}{(x+1)^{3/2}}=\int(x+1)^{-3/2}d(x+1)=-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+C\,.$$

Підставимо одержані функції u, v у формулу $y=u(x)\cdot v(x)$ та отримаємо загальний розв'язок

$$y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+C\right)=-\frac{2}{\sqrt{x-1}}+C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

ЗАВДАННЯ 7.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0\,.$$

Складемо до нього характеристичне рівняння:

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0\,.$$

При знаходженні коренів характеристичного рівняння k_1 та k_2 в залежності від дискримінанту D можливі наступні випадки:

Дискримінант	**Характер коренів характеристичного рівняння**	**Частинні розв'язки диференціального рівняння**
1. $D>0$	$k_1\neq k_2$, дійсні	$y_1=e^{k_1x},\quad y_2=e^{k_2x}$
2. $D=0$	$k_1=k_2$, дійсні	$y_1=e^{k_1x},\quad y_2=xe^{k_2x}$
3. $D<0$	$k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, комплексні	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y=C_1y_1+C_2y_2\,,$$

де y_1,y_2 - частинні розв'язки диференціального рівняння,
C_1, C_2 – довільні сталі.

<u>*Приклад 18*</u>

Розв’язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Воно має два корені $k_1 = 2,\quad k_2 = 3$, тоді частинні розв’язки диференціального рівняння: $y_1 = e^{2x},\quad y_2 = e^{3x}$.

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

<u>*Приклад 19*</u>

Розв’язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 9 = 0$.

Розв’язавши його, отримаємо два корені $k_1 = k_2 = -3$, тоді частинні розв’язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{-3x},\quad y_2 = xe^{-3x}.$$

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

<u>*Приклад 20*</u>

Розв’язати рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 25 = 0$.

Розв’язавши його, отримаємо два комплексні корені $k_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Тоді частинні розв’язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{3x}\cos 4x,\quad y_2 = e^{3x}\sin 4x.$$

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{3x}\cos 4x + C_2 e^{3x}\sin 4x.$$

ЗАВДАННЯ 8.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння складається із суми його частинного розв'язку ($y_ч$) й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння ($y_о$), тобто

$$y = y_о + y_ч .$$

Спочатку знайдемо $y_о$, розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 .$$

Частинний розв'язок $y_ч$ знайдемо методом невизначених коефіцієнтів, використовуючи вигляд правої частини $f(x)$.

1. Нехай $\underline{f(x) = e^{\alpha x} P(x),}$ де $P(x)$ - многочлен степеня n.

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між α та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2 .

№	**Взаємозв'язок між α та k_1 і k_2**	**Вигляд частинного розв'язку**
1	$\alpha \neq k_1 \neq k_2$	$y_ч = e^{\alpha x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
2	$\alpha = k_1$ або $\alpha = k_2$	$y_ч = x e^{\alpha x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
3	$\alpha = k_1 = k_2$	$y_ч = x^2 e^{\alpha x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$

б) $\underline{f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos \beta x + Q(x)\sin \beta x\right],}$ де $P(x)$ - многочлен степеня *m₁*, $Q(x)$ - многочлен степеня *m₂*.

Обчислимо $n = \max(m_1, m_2)$ та $z = \alpha + i\beta$.

Вигляд частинного розв'язку залежить від взаємозв'язку між z та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2. Можливі наступні випадки:

№	Взаємозв'язок між z та k_1 і k_2	Вигляд частинного розв'язку
1	$z \neq k_1 \neq k_2$	$y_ч = e^{\alpha x}\left[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right]$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_n x^n$
2	$z = k_1$ або $z = k_2$	$y_ч = xe^{\alpha x}\left[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x\right]$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_n x^n$

Приклад 21

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$:

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$$

Розв'язання

Знайдемо y_o, розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0 .$$

$k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x} \Rightarrow$ $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Запишемо тепер структуру частинного розв'язку $y_ч$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$:

$$f(x) = 13\sin 3x = e^{0x}[0 \cdot \cos 3x + 13\sin 3x] \Rightarrow$$

$P(x) = 0$, $Q(x) = 13$ - це многочлени нульового степеня ($n = 0$);

Обчислимо $z = \alpha + i\beta = 0 + 3i = 3i$. Оскільки $z \neq k_1 \neq k_2$, то за таблицею частинний розв'язок матиме вигляд

$$y_ч = e^{0x}\left[A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x\right] = A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x,$$

де $M(x) = A_0$ та $N(x) = B_0$.

Отже, загальний розв'язок:

$$y = y_o + y_ч = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x.$$

ЗАВДАННЯ 9.

Приклад 22

Для функції $z = x^y + \ln \frac{x}{y}$:

а) знайти частинні похідні І-го порядку;

б) знайти градієнт у точці $M_0(1,1)$ та у загальному вигляді.

Розв'язання

а) При обчисленні частинних похідних потрібно користуватися відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну постійною.

Вважаючи змінну y сталою, отримаємо

$$z'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}.$$

Якщо вважати x сталою, отримаємо

$$z'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = x^y \ln x - \frac{1}{y}.$$

б) Градієнтом функції $z = f(x,y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні цієї функції, тобто

$$grad\ z = \{z'_x, z'_y\} = z'_x \cdot \bar{i} + z'_y \cdot \bar{j}.$$

У нашому випадку

$$grad\ z = (y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}) \cdot \bar{i} + (x^y \cdot \ln x - \frac{1}{y}) \cdot \bar{j},$$

а у точці $M_0(1,1)$:

$$grad\ z(M_0) = \left.\left(y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}\right)\right|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left.\left(x^y \cdot \ln x - \frac{1}{y}\right)\right|_{M_0} \cdot \bar{j} =$$

$$= \left(1 \cdot 1^0 + \frac{1}{1}\right) \cdot \bar{i} + \left(1^1 \cdot \ln 1 - \frac{1}{1}\right) \cdot \bar{j} = 2 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j}.$$

ЗАВДАННЯ 10.

Приклад 23

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів ***x*** та ***y*** і виражається функцією $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 20x + 200y - 2800$. Визначити витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Розв'язання

Рішення зводиться до пошуку екстремуму функції $z = f(x,y)$. Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = -4x + 2y + 20; \qquad z'_y = -8y + 2x + 200.$$

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Точки, які задовольняють цю систему рівнянь, називають критичними.

У нашому випадку критичні точки задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 20 = 0, \\ -8y + 2x + 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -10, \\ x - 4y = -100. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2(4y - 100) + y = -10, \\ x = 4y - 100. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30, \\ x = 20. \end{cases}$$

Отже, функція має критичну точку $M_1(20, 30)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$A = z''_{xx} = -4$; $B = z''_{xy} = 2$; $C = z''_{yy} = -8$.

Обчислимо $\Delta = A \cdot C - B^2$ у критичній точці:

$\Delta(M_1) = (-4) \cdot (-8) - 2^2 = 28$. Оскільки $\Delta > 0$, то у точці M_1 є екстремум, причому максимум (тому що $A < 0$).

Отже, $z_{\max} = z(20, 30) = 400$.

Таким чином, витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, складають 20 та 30 одиниць, причому максимальний прибуток підприємства дорівнює 400 ум. од.

ЗАВДАННЯ 11.

Приклад 24

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+4n-1}{3n^4+2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!}{3^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{2n-1}\right)^n$.

Розв'язання

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+4n-1}{3n^4+2}\right)$.

Застосовуємо граничну ознаку порівняння: якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – ряди з додатними членами і існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l\neq 0$, то ряди одночасно будуть або збіжними, або розбіжними.

У нашому випадку $a_n=\dfrac{n^3+4n-1}{3n^4+2}$, виберемо $b_n=\dfrac{n^3}{n^4}=\dfrac{1}{n}$. Відомо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – розбіжний ряд. Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+4n-1\right)\cdot n}{(3n^4+2)}=\frac{1}{3}.$$

Тобто даний ряд, як і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, є розбіжним.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n}$.

Застосуємо ознаку Даламбера. Обчислимо $l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Якщо l<1 – ряд збіжний, l>1 – ряд розбіжний, l = 1 – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

У нашому випадку:

$$a_n=\frac{(2n+1)!}{3^n}; \qquad a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+1)!}{3^{n+1}};$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)\cdot(2n+3)}{3}=\infty>1.$$

За ознакою Даламбера ряд розбіжний.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{2n-1}\right)^n$.

Застосуємо ознаку Коші. Обчислимо $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

Якщо l<1 – ряд збіжний, l>1 – ряд розбіжний, l = 1 – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n-1}=\frac{1}{2}<1,$$ тобто ряд збіжний.

ЗАВДАННЯ 12.

Приклад 25

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n\cdot x^n}{n^2}$.

Розв'язання

Цей ряд є степеневим. Радіус збіжності R степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot x^n$ можна знайти за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\qquad \text{або}\qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

У нашому випадку маємо:

$$a_{n+1}=\frac{100^{n+1}}{(n+1)^2};\qquad\qquad a_n=\frac{100^n}{n^2};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{100^n\cdot(n+1)^2}{n^2\cdot 100^{n+1}}=\frac{1}{100}.$$

Ряд збігається, якщо $|x|<\frac{1}{100}$, тобто $-\frac{1}{100}<x<\frac{1}{100}$.

Нехай $x=\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який збіжний, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ збігається при α>1.

Нехай $x=-\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Це знакозмінний ряд, який абсолютно збігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний.

Остаточно, для області збіжності даного ряду маємо:

$$-\frac{1}{100}\le x\le\frac{1}{100}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 1.

Знайти невизначений інтеграл:

1. а) $\int (x^4 - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{4x-3} - 9)dx$; б) $\int \frac{5dx}{3x^2-7}$;

в) $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$; г) $\int x \sin 3x dx$.

2. а) $\int ((2x+6)^3 + \sqrt[4]{x^7} - \frac{9}{x} + 4)dx$; б) $\int \frac{3dx}{8x^2+5}$;

в) $\int \sqrt[6]{3-4\cos 3x} \cdot \sin 3x dx$; г) $\int x e^{-2x} dx$.

3. а) $\int (5x^8 + \sqrt[3]{(4x+3)^2} + \frac{2}{x} - 5)dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5x^2-6}}$;

в) $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$; г) $\int x \sin 8x dx$.

4. а) $\int (3x^4 + \sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{9x+5} - 3)dx$; б) $\int \frac{8dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$; г) $\int arctgx dx$.

5. а) $\int ((9x-6)^8 + \sqrt{x^3} - \frac{5}{x} + 4)dx$; б) $\int \frac{2dx}{7x^2-1}$;

в) $\int \sqrt[5]{3-5\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$; г) $\int x \ln x dx$.

6. а) $\int (5 + \sqrt[9]{(7x-5)^2} - \frac{4}{x} - 3x^4)dx$; б) $\int \frac{6dx}{3x^2+2}$;

в) $\int 3x^2 e^{-x^3} dx$; г) $\int (5x-7)e^x dx$.

7. а) $\int (8x^5 + 2\sqrt{x^5} - \frac{4}{3x+5} + 7)dx$; б) $\int \frac{7dx}{\sqrt{2x^2-3}}$;

в) $\int \frac{e^{ctg3x}}{\sin^2 3x}dx$; г) $\int x\cos 5x dx$.

8. а) $\int ((7-5x)^3 - \sqrt{x^5} - \frac{9}{4x} + 3)dx$; б) $\int \frac{3dx}{\sqrt{2-8x^2}}$;

в) $\int \sqrt[3]{2+e^{3x}} \cdot e^{3x}dx$; г) $\int (1-4x)\sin 2x dx$.

9. а) $\int (1 - \sqrt[6]{(4x-7)^5} + \frac{6}{5x} - 7x^9)dx$; б) $\int \frac{4dx}{6x^2-5}$;

в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; г) $\int arctg 2x dx$.

10. а) $\int (3x^4 - 7\sqrt{x^9} + \frac{5}{3-9x} + 4)dx$; б) $\int \frac{3dx}{\sqrt{8x^2+7}}$;

в) $\int \sqrt{3-5\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$; г) $\int xe^{7x}dx$.

11. а) $\int ((3x+1)^4 + 5\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{7x} + 3)dx$; б) $\int \frac{7dx}{5x^2+2}$;

в) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; г) $\int e^x 5x dx$.

12. а) $\int (8 + \sqrt[3]{(2x+9)^7} + \frac{1}{6x} - 5x^2)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{10-3x^2}}$;

в) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; г) $\int x\ln 3x dx$.

13. а) $\int (9x^6 + 7\sqrt{x^3} - \frac{10}{3x+7} + 2)dx$; б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{8x^2+3}}$;

в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$; г) $\int \arccos x dx$.

14. а) $\int (4+\sqrt[4]{(3x-8)^5}-\frac{7}{2x}-x^3)dx$; б) $\int \frac{15dx}{2x^2-7}$;

в) $\int \sin^{13} x \cos x dx$; г) $\int xe^{-x}dx$.

15. а) $\int ((6-3x)^4-9\sqrt[7]{x^3}-\frac{1}{4x}+8)dx$; б) $\int \frac{9dx}{2x^2+5}$;

в) $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int x\sin 7x dx$.

16. а) $\int (4x^7+\sqrt[4]{(3+8x)^3}+\frac{9}{5x}-8)dx$; б) $\int \frac{5dx}{\sqrt{7-9x^2}}$;

в) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; г) $\int x^2 \ln x dx$.

17. а) $\int (6x^3-12\sqrt{x^3}+\frac{8}{3x-2}+2)dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5x^2-7}}$;

в) $\int 7^x(7^x+3)^4 dx$; г) $\int (x-1)\ln x dx$.

18. а) $\int (5-\sqrt[7]{(2x+9)^5}-\frac{4}{7x}-5x^4)dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5+3x^2}}$;

в) $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5}$; г) $\int (1-4x)\sin 2x dx$.

19. а) $\int ((6x-3)^9+9\sqrt[3]{x^5}-\frac{7}{4x}-1)dx$; б) $\int \frac{4dx}{3x^2+10}$;

в) $\int \frac{e^{tg3x}}{\cos^2 3x}dx$; г) $\int xe^{2x}dx$.

20. а) $\int (7x^5 + 3\sqrt{x^3} - \frac{6}{2-5x} + 9)dx$; б) $\int \frac{5dx}{8x^2 - 1}$;

в) $\int (2\ln x + 3)^2 \frac{dx}{x}$; г) $\int (2 - xe^{-3x})dx$.

21. а) $\int (8x^5 - \sqrt[5]{(5-4x)^7} + \frac{2}{3x} + 4)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{10x^2 + 7}}$;

в) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$; г) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

22. а) $\int ((6+7x)^6 - 2\sqrt[9]{x^5} + \frac{4}{3x} + 9)dx$; б) $\int \frac{4dx}{\sqrt{2x^2 - 8}}$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$; г) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$.

23. а) $\int (1 - \sqrt[3]{(4x-5)^5} + \frac{15}{8x} - 9x^7)dx$; б) $\int \frac{4dx}{\sqrt{7 - 10x^2}}$;

в) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$; г) $\int (x+3)\cos 2x dx$.

24. а) $\int (3x^4 - \sqrt[9]{(4+6x)^5} - \frac{1}{3x} - 2)dx$; б) $\int \frac{3dx}{8x^2 + 7}$;

в) $\int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$; г) $\int (x-2) \cdot \cos x dx$.

25. а) $\int (9x^3 + 2\sqrt{x^7} - \frac{5}{7x+9} - 6)dx$; б) $\int \frac{5dx}{4x^2 - 11}$;

в) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} dx$; г) $\int x \cdot (\ln x^2 - 1)dx$.

26. а) $\int ((6-2x)^8 + 7\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{5x} - 1)dx$; б) $\int \frac{15dx}{\sqrt{3x^2 + 15}}$;

в) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x+4}}dx$; г) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

27. а) $\int (10+\sqrt[8]{(4-5x)^7}+\frac{9}{5x}-x^3)dx$; б) $\int \frac{6dx}{\sqrt{4-5x^2}}$;

в) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$; г) $\int x^2\cdot e^{-x}dx$.

28. а) $\int (4x^5-8\sqrt{x^7}+\frac{9}{7-x}-2)dx$; б) $\int \frac{7dx}{3x^2+9}$;

в) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+5x-8}$; г) $\int \ln(x+2)dx$.

29. а) $\int ((5+3x)^7-3\sqrt[9]{x^5}+\frac{8}{3x}-6)dx$; б) $\int \frac{7dx}{\sqrt{8x^2-9}}$;

в) $\int \frac{(\ln x-3)^2}{x}dx$; г) $\int x\cdot 3^x dx$.

30. а) $\int (2+\sqrt[5]{(9-7x)^3}+\frac{3}{5x}-6x^4)dx$; б) $\int \frac{12dx}{3x^2-5}$;

в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+4}}dx$; г) $\int \arcsin 3x\,dx$.

ЗАВДАННЯ 2.

Знайти площу фігури, обмежену заданими лініями.

1. $y = x^2 - 2$; $y = 0$.

2. $y = x^2 - 6x + 5$; $y = 0$.

3. $y = x^3$; $y = x^2$.

4. $y = x$; $y = -x + 2$; $y = 0$.

5. $y = -x^2 + 4$; $y = 0$.

6. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = 0$.

7. $y = \sqrt{x}$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

8. $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 1$.

9. $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

10. $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

11. $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$.

12. $y = \dfrac{1}{x}$; $x = 2$; $y = x$.

13. $y = \dfrac{4}{x}$; $x = 4$; $y = x$.

14. $y = x^2$; $y = -x^2 + 2$.

15. $y = x$; $y = x^2$.

16. $y = 2x$; $y = 2x^2$.

17. $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$.

18. $y = \cos x$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$; $y = 0$.

19. $y = tgx$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = 0$.

20. $y = ctgx$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = 0$.

21. $y = x^2 - 5x + 6$; $y = x$.

22. $y = x^2 + x$; $y = x + 1$.

23. $y = x^2 + x$; $y = -x$.

24. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{4 - 3x}$; $y = 0$.

25. $y = x^2 + 2$; $y = 1 - x^2$; $x = 0$; $x = 1$.

26. $y = x^2$; $y = 2e^x$; $x = 0$; $x = 1$.

27. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{1 - x}$; $y = 0$.

28. $y = x^2 - 4$; $y = 4 - x^2$.

29. $y = x^2 - 9$; $y = 9 - x^2$.

30. $y = x^2 + 5$; $y = x + 5$.

ЗАВДАННЯ 3.

Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами $V'(t)$ і $D'(t)$. $V(t)$ і $D(t)$ вимірюються у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і зайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

1. $V'(t) = 4 + \sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 16 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

2. $V'(t) = 1 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 17 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

3. $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

4. $V'(t) = 5 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 45 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

5. $V'(t) = 3 + 4\sqrt{t}$, $D'(t) = 13 - \sqrt{t}$.

6. $V'(t) = 14 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 38 - 2\sqrt[4]{t^3}$.

7. $V'(t) = 7 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt{t}$.

8. $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 31 - \sqrt[3]{t^2}$.

9. $V'(t) = 11 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 4\sqrt[3]{t^2}$.

10. $V'(t) = 15 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 20 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

11. $V'(t) = 22 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

12. $V'(t) = 13 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 17 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

13. $V'(t) = 4 + 3\sqrt{t}$, $D'(t) = 9 - \sqrt{t}$.

14. $V'(t) = 1 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - \sqrt{t}$.

15. $V'(t) = 2 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 58 - 4\sqrt[4]{t^3}$.

16. $V'(t) = 5 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 21 - \sqrt[4]{t^3}$.

17. $V'(t) = 1 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 3\sqrt[4]{t^3}$.

18. $V'(t) = 6 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 22 - \sqrt[4]{t^3}$.

19. $V'(t) = 8 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 28 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

20. $V'(t) = 10 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 12 - \sqrt[4]{t^3}$.

21. $V'(t) = 9 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 29 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

22. $V'(t) = 13 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

23. $V'(t) = 12 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 14 - \sqrt[4]{t^3}$.

24. $V'(t) = 10 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 14 - 2\sqrt[4]{t^3}$.

25. $V'(t) = 3 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - \sqrt[4]{t^3}$.

26. $V'(t) = 1 + 3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 4\sqrt[4]{t^3}$.

27. $V'(t) = 9 + 4\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 14 - \sqrt[3]{t^2}$.

28. $V'(t) = 7 + \sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 12 - 4\sqrt[3]{t^2}$.

29. $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t^2}$.

30. $V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

ЗАВДАННЯ 4.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1.	$y'\ln y\cos x = y;$	$y(0)=1.$
2.	$(1+x^2)dy - ydx = 0;$	$y(1)=1.$
3.	$yy' + xe^{y^2} = 0;$	$y(1)=0.$
4.	$3e^x tgy dx + (1+e^x)\sec^2 y dy = 0;$	$y(0)=\frac{\pi}{4}.$
5.	$ydx - (\ln y)^2 dy = 0;$	$y(0)=e.$
6.	$(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx;$	$y(0)=0.$
7.	$y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y);$	$y(0)=\frac{\pi}{4}.$
8.	$y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0;$	$y(-\frac{15}{16}) = e.$
9.	$y = y'\ln y;$	$y(2)=1.$
10.	$y' = e^{x+y} + e^{x-y};$	$y(0)=0.$
11.	$(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0;$	$y(0)=1.$
12.	$xy' + y = y^{2;}$	$y(1)=0{,}5.$
13.	$x^2y^2y' + 1 = y;$	$y(1)=2.$
14.	$\frac{dx}{x(y-1} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0;$	$y(1)=1.$
15.	$x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0;$	$y(0)=1.$
16.	$(1+e^{2x})y'y^2 = e^x;$	$y(0)=0.$
17.	$(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0;$	$y(1)=1.$
18.	$xy' = y^2 + 1;$	$y(1)=1.$
19.	$(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx;$	$y(1)=1.$
20.	$(1-e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y;};$	$y(0)=0.$
21.	$y'\left(1+x^2\right) = 1 + y^2;$	$y(0)=1.$

22.	$\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0;$	$y(0)=1.$
23.	$6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx;$	$y(2)=0.$
24.	$(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0;$	$y(0)=1.$
25.	$(xy^2+x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$	$y(2)=0.$
26.	$(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0;$	$y(0)=1.$
27.	$\sqrt{y^2+1}dx = xydy;$	$y(1)=0.$
28.	$y' + 2y - y^2 = 0;$	$y(0)=3.$
29.	$(1+e^{2x})y^2y' = e^x;$	$y(0)=1.$
30.	$(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0;$	$y(1)=1.$

ЗАВДАННЯ 5.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $2x^2y' = x^2 + y^2.$

2. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$

3. $x\sin\frac{y}{x}y' + x = y\sin\frac{y}{x}.$

4. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

5. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}.$

6. $xyy' = y^2 + 2x^2.$

7. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}.$

8. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$

9. $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2.$

10. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$

11. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y.$

12. $tg\dfrac{y}{x}(xy' - y) = x.$

13. $xy' = y - \sqrt{xy}.$

14. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$

15. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

16. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}.$

17. $xy'y - y^2 = y'x^2.$

18. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

19. $3xyy' + x^2 = 3y^2.$

20. $xy' - x\cos^2\dfrac{y}{x} = y.$

21. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

22. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 9\dfrac{y}{x} + 9.$

23. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

24. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$

25. $xdy = (2y - x)dx$.

26. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

27. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

28. $xy' + y(\ln\dfrac{y}{x} - 1) = 0.$

29. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

30. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

ЗАВДАННЯ 6.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}.$

2. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$

3. $xy' - y = x^2 \cos x.$

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

5. $y' - 3y = e^{-2x}.$

6. $y' + 5y = e^{4x}.$

7. $y' + 2y = e^{3x}.$

8. $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x.$

9. $y' \sin x - y \cos x = 1.$

10. $y' - \dfrac{y}{x} = 1 + 2 \ln x.$

11. $xy' - 2y = 2x^4.$

12. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

13. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

14. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$

15. $y = x(y' - x \cos x).$

16. $y'x = x \ln x + y.$

17. $(xy' - 1) \ln x = 2y.$

18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$

19. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x}.$

20. $y' = (x+1)^3 + \dfrac{2y}{x+1}.$

21. $(x^2+1)y' + 4xy = 3.$

22. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0.$

23. $x^3 y' = 1 - 2x^2 y.$

24. $y' ctgx + y = 2\cos^2 x ctgx.$

25. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$

26. $y' + ytgx = \cos^2 x.$

27. $(2xy + 3)dx - x^2 dy = 0.$

28. $(x^4 + 2y)dx = xdy.$

29. $\cos x dy = (y + 2\cos x)\sin x dx.$

30. $x^2 y' = xy + 1.$

ЗАВДАННЯ 7.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $y'' - 2y' + y = 0$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

5. $y'' - 14y' + 53y = 0$.

6. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

7. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

8. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

9. $y'' + y = 0$.

10. $y'' - y = 0$.

11. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

12. $y'' + 10y' + 34y = 0$.

13. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

14. $y'' + 25y = 0$.

15. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

16. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

17. $y'' + y' - 12y = 0$.

18. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

19. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

20. $y'' - 2y' + 37y = 0$.

21. $y'' - 8y' = 0$.

22. $y'' + 12y' + 36y = 0$.

23. $y'' + 3y' = 0$.

24. $y'' - 9y' + 18y = 0$.

25. $y'' + 8y' = 0$.

26. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

27. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

28. $y'' + y = 0$.

29. $y'' - y = 0$.

30. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

ЗАВДАННЯ 8.

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$.

1. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}(x+5)$;
б) $f(x) = e^{3x}\cos x + x - 3$.

2. $y'' - 2y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = e^{x}\sin 2x$;
б) $f(x) = e^{x}(2x+1) + e^{2x}\cos x$.

3. $y'' - 2y' - 8y = f(x)$; а) $f(x) = e^{4x}(3x-1)$;
б) $f(x) = e^{4x}\sin 2x + e^{x}(1-2x)$.

4. $y'' - 12y' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-6x}\cdot x^2$;
б) $f(x) = e^{6x}(1-x) + e^{6x}\sin 3x$.

5. $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\cos x$;
б) $f(x) = \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}}(3x^2 + 5)$.

6. $6y'' - y' - y = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}}$;
б) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}\cos\dfrac{x}{3} + x^2 e^{3x}$.

7. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 7e^{4x}$;
б) $f(x) = 2\cos 4x + e^{4x}\sin x$.

8. $y'' - 9y' + 20y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{5x}$;

б) $f(x) = e^{4x}\cos 5x + x^2$.

9. $y'' - 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}\sin x$;

б) $f(x) = x^2 e^{3x} + e^x \sin 3x$.

10. $y'' + 5y' = f(x)$; а) $f(x) = x^3 + 8$;

б) $f(x) = e^{-5x}\cos x - 5xe^x$.

11. $y'' + 10y' + 25 = f(x)$; а) $f(x) = \cos 5x$;

б) $f(x) = 10e^{-5x} + 1 - 5x$.

12. $y'' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^x \sin x$;

б) $f(x) = \cos x + x^3$.

13. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$; а) $f(x) = x^2 e^{4x}$;

б) $f(x) = e^{-6x}\cos x + e^x$.

14. $y'' + 2y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x}\sin 3x$;

б) $f(x) = 5e^{-x} + \cos x$.

15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;

б) $f(x) = e^x \cos 2x + 3x^2$.

16. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x}\sin 6x$;

б) $f(x) = e^{-x}(6x-1) + 2x$.

17. $y'' - 14y' + 49 = f(x)$; а) $f(x) = e^x \cos 7x$;

б) $f(x) = (1-x)e^{7x} + 7x^2$.

18. $y'' + 2y' - 3y = f(x)$; а) $f(x) = (x+3)e^{-3x}$;

б) $f(x) = e^x \cos x + e^{3x}$.

19. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 e^x$;

б) $f(x) = e^x \cos 3x + e^{-3x}\sin x$.

20. $y'' - 10y + 25 = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{5x}$;

б) $f(x) = 7\cos 5x + e^{5x}\sin x$.

21. $y'' + y' - 6y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\cos 2x$;

б) $f(x) = (1-2x)e^{2x} + x^3$.

22. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\sin 2x$;

б) $f(x) = (1-2x)e^{-3x} + e^{2x}\cos 3x$.

23. $y'' + 4y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-2x}$;

б) $f(x) = \cos 2x + e^{-2x}\sin x$.

24. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$;

б) $f(x) = (x-2)e^{-x} + \sin 2x$.

25. $y'' - 12y' + 40y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x}\sin 6x$;

б) $f(x) = e^{6x}\cos 2x + (1+6x)e^{2x}$.

26. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\cos 3x$;

б) $f(x) = 7e^{-3x} + \sin 3x$.

27. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x}\sin 6x$;

б) $f(x) = 5e^{6x} + 7\cos 2x$.

28. $y'' - 6y' + 13y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}\cos 2x$;

б) $f(x) = (1+2x)e^{3x} + 2\sin 3x$.

29. $y'' + 8y' + 16 = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-4x}$;

б) $f(x) = \cos 4x + e^{-4x}\sin x$.

30. $y'' - 6y' + 34y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}\sin 5x$;

б) $f(x) = e^{5x}\sin 3x + 5xe^{3x}$.

ЗАВДАННЯ 9.

Для функції $z = f(x, y)$:

а) знайти частині похідні I-го порядку;
б) знайти градієнт у точці *Mo* та у загальному вигляді.

1. $z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right),\ M_o(2{,}0).$

2. $z = \arcsin\sqrt{xy},\ M_o\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$

3. $z = arctg\left(x^2 + y^2\right),\ M_o(0{,}1).$

4. $z = \cos\left(x^3 - 2xy\right), M_o(3,-1).$

5. $z = \sin\sqrt{\frac{y}{x^3}},\ M_o(1{,}1).$

6. $z = tg\left(x^3 + y^2\right),\ M_o(-1{,}2).$

7. $z = ctg\sqrt{xy^3},\ M_o(2{,}1).$

8. $z = e^{-x^2+y^2},\ M_o(2{,}1).$

9. $z = \ln\left(3x^2 - y^4\right),\ M_o(1{,}1).$

10. $z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right),\ M_o(4{,}2).$

11. $z = arcctg\left(xy^2\right), M_o(1{,}2).$

12. $z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}, M_o(-2{,}2).$

13. $z = \sin\sqrt{x - y^3}, M_o(2{,}1).$

14. $z = tg\left(x^3 y^4\right), M_o(3,-1).$

15. $z = ctg(3x - 2y), M_o(1{,}3).$

16. $z = e^{2x^2 - y^5}, M_O(1,-2).$

17. $z = \ln\left(\sqrt{xy} - 1\right), M_o(1{,}4).$

18. $z = \arcsin\left(2x^3 y\right), M_o\left(\frac{1}{2},1\right).$

19. $z = arctg\left(\frac{x^2}{y^3}\right), M_o(2{,}3).$

20. $z = \cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right), M_o(1{,}2).$

21. $z = \sin\frac{x + y}{x - y}, M_o(3{,}2).$

22. $z = tg\frac{2x - y^2}{x}, M_o(3{,}2).$

23. $z = ctg\sqrt{\frac{x}{x - y}}, M_o(4{,}2).$

24. $z = e^{-\sqrt{x^2 - y^2}}, M_o(1,-1).$

25. $z = \ln\left(3x^2 - y^2\right), M_o(2{,}1).$

26. $z = \arccos\left(x - y^2\right), M_o\left(1,\frac{1}{2}\right).$

27. $z = arcctg\dfrac{x^2}{y}, M_o(1,3).$

28. $z = \cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, M_o(1,2).$

29. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}, M_o(4,2).$

30. $z = e^{-\left(x^3+y^3\right)}, M_o(-2,3).$

ЗАВДАННЯ 10.

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів ***x*** та ***y*** і виражається функцією $z = z(x, y)$. Визначити витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

1. $z(x,y) = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y.$

2. $z(x,y) = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y.$

3. $z(x,y) = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y.$

4. $z(x,y) = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y.$

5. $z(x,y) = -2100 - x^2 - y^2 + 60x + 80y.$

6. $z(x,y) = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y.$

7. $z(x,y) = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y.$

8. $z(x,y) = -400 - x^2 - y^2 + 40x + 20y.$

9. $z(x,y) = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y.$

10. $z(x,y) = -3800 - x^2 - y^2 + 120x + 60y.$

11. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 20x + 60y - 600.$

12. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 800.$

13. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100y - 1200.$

14. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x + 100y - 3100.$

15. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 80x + 140y - 4200.$

16. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 60x + 20y - 600.$

17. $z(x,y)=-2x^2-3y^2+2xy+100y-800$.
18. $z(x,y)=-2x^2-3y^2+2xy+100x-1200$.
19. $z(x,y)=-2x^2-3y^2+2xy+100x+100y-3100$.
20. $z(x,y)=-2x^2-3y^2+2xy+140x+80y-4200$.
21. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+40x+60y-700$.
22. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+140x-1200$.
23. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+20x+100y-1300$.
24. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+160x+100y-4000$.
25. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+140x+140y-5100$.
26. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+200x+20y-2800$.
27. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+60x+40y-700$.
28. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+140y-1200$.
29. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+100x+20y-1300$.
30. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+140x+140y-5100$.

ЗАВДАННЯ 11.

Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{2n^2-1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n-3}{2n^2+3n-1}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-n}{2n^3+3n+4}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{3n^2-6n-1}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!\cdot 4^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}(n+1)^3$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2n!}{(2n)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

ЗАВДАННЯ 12.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5x^{2n}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n9^n(x-1)^{2n}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n tg\frac{1}{3^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x-1)^n}{(n+3)^2 2^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)(x-1)^n}{(n+1)^2 5^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{(x+1)^n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{8^n (x+1)^{2n}}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яку функцію називають первісною для даної функції ?
2. Що називають невизначеним інтегралом даної функції ?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Які існують основні методи інтегрування ?
5. У чому полягає суть методу інтегрування частинами ?
6. Яке означення визначеного інтеграла функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a,b]$?
7. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
8. Які основні властивості визначеного інтеграла?
9. Як записується формула Ньютона – Лейбніца ?
10. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі ?
11. Як знайти площі плоских фігур, використовуючи визначений інтеграл ?
12. Як обчислити середні значення функцій ?
13. Яке рівняння називають диференціальним ?
14. Що таке порядок диференціального рівняння ?
15. Як формулюється означення загального розв’язку, частинного розв’язку, загального інтегралу диференціального рівняння ?
16. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку ?
17. Яке диференціального рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними ?
18. Яке диференціального рівняння першого порядку називають однорідним ? Як воно розв’язується ?
19. Яке диференціального рівняння першого порядку називають лінійним ? Як воно розв’язується ?
20. Як записується загальний розв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами в різних випадках ?
21. Як формулюється теорема про структуру розв’язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку ?
22. Що називають функцією двох змінних ?
23. Що таке частинні й повний прирости функції двох змінних ?
24. Яке означення частинних похідних двох змінних ?
25. Як обчислюються частинні похідні другого порядку ?

26. Що називають повним диференціалом функції двох змінних ?
27. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно ?
28. Що називають градієнтом функції ? Що він характеризує ?
29. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних ?
30. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних ?
31. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції двох змінних ?
32. Що називають числовим рядом ?
33. Що називається сумою числового ряду ?
34. Який числовий ряд називається збіжним ?
35. Яка необхідна ознака збіжності числового ряду ?
36. У чому полягає гранична ознака порівняння ?
37. У чому полягає ознака Даламбера збіжності ряду ?
38. У чому полягає ознака Коші збіжності ряду ?
39. Який числовий ряд називається знакозмінним й знакопереміжним ?
40. У чому полягає ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду ?
41. Який знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, умовно збіжним ?
42. Що називають функціональним рядом ?
43. Що називається областю збіжності функціонального ряду ?
44. За допомогою яких ознак можна знайти область збіжності функціонального ряду ?
45. Що називають степеневим рядом ?
46. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду ?
47. Як обчислюється радіус збіжності степеневого ряду ?
48. Який ряд називається рядом Тейлора для функції $f(x)$?
49. Який ряд називається рядом Маклорена для функції $f(x)$?
50. Як розвиваються елементарні функції в ряд Маклорена?

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська.- 5-те вид. – Київ : Центр навч. літератури, 2010. – 448 с.
2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: основні розділи: підручник для студ. вищ. навч. закл.: затв. МОНУ / І. П. Васильченко.- 2-ге вид. – Київ : Кондор, 2012. – 608 с.
3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: спеціальні розділи: підручник для студ. вищ. навч. закл.: затв. МОНУ / І. П. Васильченко.- 2-ге вид. – Київ : Кондор, 2012. – 352 с.
4. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачи: Навч. посіб.для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. /М.В. Грисенко. -– К.: Либідь,2007. – 720 с.
5. Мастиновский, Ю.В. Короткий курс математики для економістів [Текст] : конспект лекцій / Ю.В. Мастиновский, Д.І. Анпілогов, Т.І. Левицька. – Запоріжжя: Акцент Інвест-Трейд, 2014. – 228 с.