МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
з вищої математики
до виконання контрольних робіт

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ» ТА «ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ»

для студентів заочної форми навчання
транспортного факультету

2017

Методичні вказівки з вищої математики до виконання контрольних робіт «Елементи теорії функції комплексної змінної» та «Елементи операційного числення» для студентів заочної форми навчання транспортного факультету./ Укл.: Килимник І.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017 – 78 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент
Полякова Т.Г, асистент

Рецензент: Онуфрієнко Л.М., доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доц.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої та загальної математики ЗНТУ
Протокол № 7 від 15.03.2017 р.

Затверджено
НМК транспортного факультету ЗНТУ
Протокол № 26 від 21.03.2017 р.

ЗМІСТ

	Стор
Правила оформлення та виконання контрольної роботи	4
Контрольна робота «Елементи теорії функції комплексної змінної»	
1. Вказівки до виконання контрольної роботи з теми «Елементи теорії функції комплексної змінної»	5
1.1 Комплексні числа та дії над ними.	5
1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині	10
1.3 Функції комплексної змінної	14
1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної. Аналітичні функції.	19
1.5 Інтегрування функції комплексної змінної	25
1.6 Степеневі ряди функції комплексної змінної. Ряд Лорана.	32
1.7 Класифікація нулів та ізольованих особливих точок функції комплексної змінної	37
1.8 Лишки та їх застосування	40
1.9 Індивідуальні завдання	46
Контрольна робота «Елементи операційного числення»	
2. Вказівки до виконання контрольної роботи «Елементи операційного числення»	55
2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал	55
2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми.	56
2.3 Знаходження оригіналу по зображенню.	61
2.4 Розв`язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.	64
2.5 Індивідуальні завдання	69
3. Довідковий матеріал	75
Література	78

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати назву контрольної роботи, дисципліну, з якої виконується контрольна робота, номер академічної групи, прізвище, ім’я та по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки, а в правому нижньому – домашню адресу.

3. В контрольній роботі повинні бути розв’язані всі завдання вказані викладачем. Розв’язання задач необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі переписується повністю.

4. Номер задачі в завдання вибирають таким чином: передостанню цифру шифру помножити на номер завдання і додати останню цифру шифру. Номером задачі в завданні є число одиниць в отриманому числі. Наприклад. Дві останні цифри шифру 65. Розв’язуємо 11 завдання. Необхідно $6{\cdot}11+5=71$. Номер задачі в 11 завданні буде 1.

Якщо число одиниць дорівнює нулю, то студент розв’язує 10 задачу завдання.

5. Контрольна робота подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольні роботи виконані не за своїм варіантом не зараховуються

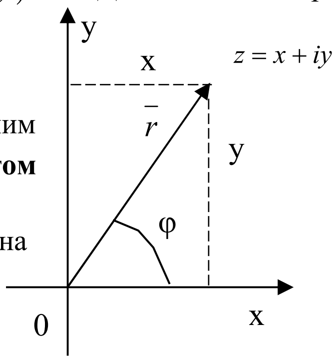
КОНТРОЛЬНА РОБОТА
«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

1. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

1.1 Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом z називається число, яке має вигляд: $z = x + iy$, де x і y – дійсні числа, i – уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$; $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається ***спряженим*** комплексному числу z.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою площини xOy з координатами (x, y), або вектором $\bar{r}$, який має напрямок з початку координат т. O в точку (x, y). Довжина вектора $\bar{r}$ називається **модулем комплексного числа:** $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Кут φ, утворений вектором з додатним напрямом осі Ox називається **аргументом комплексного числа**: $\varphi = Arg\, z$

Величина $Arg\, z$ многозначна і визначена з точністю до доданка кратного 2π:
$\varphi = Arg\, z = \arg z + 2\pi k,\ (k = 0,\ \pm 1, \pm 2, ...)$.
При $z = 0$ величина $Arg\, z$ не має змісту.

Головне значення аргументу позначається $\arg z$ і визначається умовами: $-\pi < \arg z \le \pi$, при цьому

$$\arg z=\begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x},\ якщо\ x>0,\ y-будь\ яке;\\ \pi+arctg\,\dfrac{y}{x},\ якщо\ x<0,\ y>0;\\ -\pi+arctg\,\dfrac{y}{x},\ якщо\ x<0,\ y<0;\\ \dfrac{\pi}{2},\ якщо\ x=0,\ y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2},\ якщо\ x=0,\ y<0;\\ 0,\ якщо\ x>0,\ y=0;\\ \pi,\ якщо\ x<0,\ y=0; \end{cases}$$

Форми комплексного числа:

1) **Алгебраїчна форма**: $z = x + iy$

2) **Тригонометрична форма**: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, якщо в алгебраїчній формі зробити заміну $x = r\cdot\cos\varphi,\quad y = r\cdot\sin\varphi$.

3) **Показникова форма**: $z = re^{i\varphi}$, застосовуючи формулу Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можна перейти від тригонометричної форми до показникової.

Дії над комплексними числами:

Маємо
$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right),\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$

1) **Рівність:** $z_1 = z_2 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = x_2\ i\ y_1 = y_2$

2) **Додавання**: $z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right)$

3) **Добуток:**

$$z_1\cdot z_2 = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i\left(x_1y_2 + x_2y_1\right) = r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right) =$$
$$= r_1r_2e^{i\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}$$

4) **Частка:**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Маємо $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

1) **Піднесення до натурального степеня** n:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=re^{in\varphi}.$$

Формула Муавра: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$**.**

2) **Корінь *n*-го степеня** (n – ціле) :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{z}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$ Матимемо n різних значень $\sqrt[n]{z}$, поклавши $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$.

Задача 1. Задані комплексні числа $z_1=2+i$, $z_2=-2+2i$, $z_3=2-2\sqrt{3}i$. Знайти: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) $z_1\cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$.

Записати: д) z_2 в тригонометричній формі; е) z_3 у показниковій формі.

Розв`язування.

а) $z_1+z_2=(2+i)+(-2+2i)=3i$;

б) $z_1-z_2=(2+i)-(-2+2i)=4-i$;

в) $z_1\cdot z_2=(2+i)\cdot(-2+2i)=-4+4i-2i+2i^2=-6+2i$;

г) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{-2+2i}\cdot\frac{-2-2i}{-2-2i}=\frac{-4-4i-2i-2i^2}{4-4i^2}=\frac{-2-6i}{8}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i.$

д) $z_2=-2+2i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x=-2,\ y=2$. Тоді

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2};$$

$$x<0,\ y>0\ \Rightarrow\ \arg z=\pi+arctg\frac{y}{x}=\pi+arctg(-1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрична форма z_2:

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

е) $z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$. Знайдемо модуль комплексного числа та головне значення аргументу: $x = 2; y = -2\sqrt{3}$. Тоді

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4;$$

$$x > 0,\ y < 0 \Rightarrow \arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Показникова форма z_3:

$$z_3 = 4e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Задача 2. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$z = \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2.$$

Розв'язування. Запишемо в алгебраїчній формі чисельник і знаменник дробу:

$$i^5 + 2 = i \cdot \left(i^2\right)^2 + 2 = i + 2 = 2 + i,$$

$$i^{19} + 1 = i \cdot \left(i^2\right)^9 + 1 = -i + 1 = 1 - i,$$

$$\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} = \frac{2 + i}{1 - i}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу на комплексне число спряжене до знаменника:

$$\frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(2 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2 + 3i - 1}{1 + 1} = \frac{1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Піднесемо до квадрата отримане число

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i + \frac{9}{4}i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}i - \frac{9}{4} = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Задача 3. Обчислити: а) $\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)^{60}$, б) $\sqrt[4]{1 - i}$.

Розв’язування.

а) Застосовуємо формулу $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Маємо $z = -1+\sqrt{3}i$, де $n=60$, $x=-1$, $y=\sqrt{3}$.

Знайдемо тригонометричну форму комплексного числа z.

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Так як $x<0$ і $y>0$, то $\arg z = arctg\frac{y}{x}+\pi = arctg\frac{\sqrt{3}}{-1}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi$. Тоді

$$z=2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\text{siin}\frac{2}{3}\pi).$$

$$z^{60}=2^{60}(\cos(60\cdot\frac{2}{3}\pi)+i\sin(60\cdot\frac{2}{3}\pi))=2^{60}(\cos 40\pi+i\sin 40\pi)=2^{60}.$$

б) Корінь n-го степеня з комплексного числа z, відмінного від нуля , має n значень, які визначаються формулою:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\ k=0,1,2,\ldots,(n-1).$$

Маємо $z=1-i$, де $x=1$, $y=-1$. Запишемо комплексне число z у тригонометричній формі. Знаходимо

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Так як $x>0$, $y<0$, то

$$\arg z=\text{arctg}\frac{\text{y}}{\text{x}}=arctg\frac{-1}{1}=-arctg1=-\frac{\pi}{4}.$$

Маємо $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\,sii\,\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$.

При $k=0$ $z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right)$;

$k=1$ $z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right)$;

$k=2$ $z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right)$;

$$k=3 \qquad z_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right).$$

1.2 Лінії та множини точок на комплексній площині.

Якщо рівняння $F(z)=0$ визначає лінію на комплексній площині, а нерівності $F(z)\le 0$ і $F(z)\ge 0$ – частину комплексної площини, точки якої задовольняють цим нерівностям. Із урахуванням того, що

$z=x+\mathrm{i}y,\ \mathrm{Re}\,z=\mathrm{x},\ \mathrm{I}m\,z=y,\ \bar{z}=x-iy, |z|=\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2}, z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$

$z^2=x^2-y^2+2xyi,\ |z-z_0|=|(x-x_0)+i(y-y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$

$z^3=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right),$

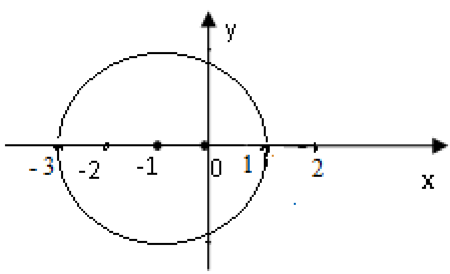
рівняння $F(z)=0$ отримаємо, як рівняння лінії $F(x,y)=0$, а нерівності $F(z)\le 0$ і $F(z)\ge 0$ – область, яка складається із множини точок (x,y).

Задача 4. Визначити та побудувати лінії, задані наступними рівняннями:

а) $|z|^2+2\,\mathrm{Re}\,z=3$; б) $|z-3+4i|=|z-2|$; в) $\mathrm{Im}(z^2-\bar{z})=2-\mathrm{Im}\,z$.

Розв'язування.

а) $|z|^2+2\,\mathrm{Re}\,z=3$. Знаючи, що $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{Re}\,z=x$. Тоді $z^2=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+2x=3 \;\Rightarrow\; (x+1)^2+y^2=4$. Це коло з центром у т. $(-1,0)$ і радіусом $R=2$.



б) $\left|z-3+4i\right|=\left|z-2\right|$. Знаючи, що

$$\left|z-z_0\right|=\left|x+iy-(x_0+iy_0)\right|=\left|x-x_0+i(y-y_0)\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

маємо $\left|z-3+4i\right|=\left|z-(3-4i)\right|=\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}\ \Rightarrow$

$$\left|z-2\right|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

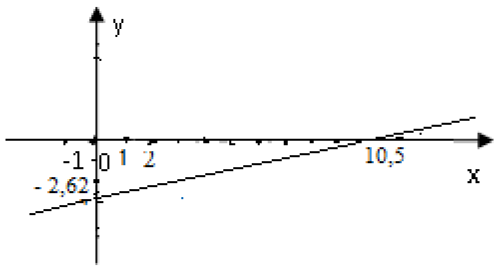
Тоді $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \qquad \uparrow 2$,

$$(x-3)^2+(y+4)^2=(x-2)^2+y^2.$$

Розкриваємо дужки і приводимо подібні:

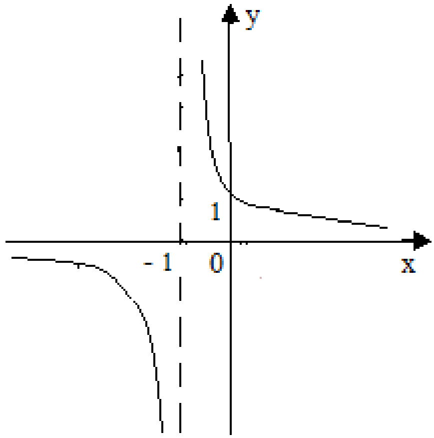
$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=x^2-4x+4+y^2\ \Rightarrow$$

$2x-8y-21=0$. Це рівняння прямої.



в) $\operatorname{Im}(z^2-\bar{z})=2-\operatorname{Im}z$. Знаючи, що $\bar{z}=x-iy$, $z^2=x^2-y^2+2xyi$ знайдемо $z^2-\bar{z}=x^2-y^2+2xyi-x+yi=x^2-y^2-x+i(y+2xy)$. Тоді $\operatorname{Im}(z^2-\bar{z})=y+2xy$. Враховуємо, що $\operatorname{Im}z=y$, матимемо $y+2xy=2-y\ \Rightarrow\ 2y+2xy=2$, $y(1+x)=1\Rightarrow y(x+1)=1$.

$y=\dfrac{1}{x+1}$ - це рівняння рівнобічної гіперболи, асимптоти якої $x=-1,\ y=0$.



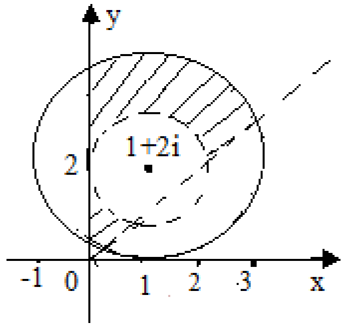
Задача 5. Знайти та побудувати множину точок комплексної площини задану умовами:

$$\text{а) } \begin{cases} 1 < |z - 1 - 2i| \le 2 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} < \arg(z - 1 - 2i) \le \dfrac{\pi}{6} \\ |z - 2i| \le 2 \end{cases} .$$

Розв`язування.

$$\text{а) } \begin{cases} 1 < |z - 1 - 2i| \le 2 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Враховуючи, що $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, маємо: $|z - 1 - 2i| = |(x-1) + i(y-2)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$. Перша нерівність системи має вигляд: $1 < (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4$. На площині – це кільце, яке обмежене концентричними колами радіусів $R = 1$ (не включаючи саме коло) та $R = 2$. Друга нерівність системи $\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$ визначає частину площини між прямими, що виходять з точки O і утворюють з віссю Ox кути $\dfrac{\pi}{2}$ і $\dfrac{\pi}{4}$ (не включаючи пряму $y = x$, $x > 0$). Зробимо рисунок.



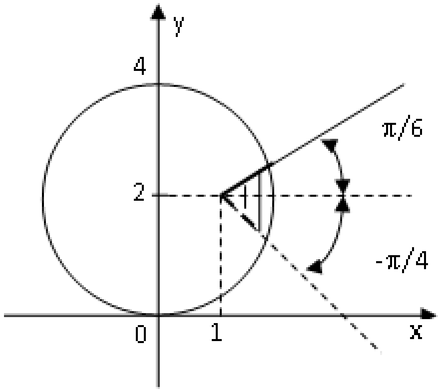
Розв'язком є заштрихована частина площини.

б) $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1-2i) \le \dfrac{\pi}{6} \\ |z-2i| \le 2 \end{cases}$

Комплексне число $z-1-2i = z-(1+2i)$ зображується вектором, початком якого є точка $(1+2i)$, а кінцем – точка z. Кут між цим вектором та віссю OX змінюється в межах від $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ до $\dfrac{\pi}{6}$. З цього випливає, що нерівність $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(z-1-2i) \le \dfrac{\pi}{6}$ визначає частину площини між прямими, що виходять з точки $(1+2i)$ і утворюють з віссю OX кути $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ та $\dfrac{\pi}{6}$, включаючи верхню пряму.

Нерівність $|z-2i| \le 2$ задовольняє множина точок площини, що знаходиться всередині кола з центром в точці $z = 2i$ і радіусом $R = 2$ та його межі. Системі нерівностей задовольняє множина точок заштрихованої частини площини .

Зробимо рисунок.



Розв’язком є заштрихована частина площини

1.3 Функції комплексної змінної

Множина D точок комплексної площини називається ***областю***, якщо вона задовольняє умовам:

а) разом із кожною точкою з D цій множині належить і достатньо малий круг із центром у вказаній точці (властивість відкритості);

б) будь які дві точки множини D можна сполучити ламаною, що повністю складається із точок множини D (властивість зв’язності).

Точки, які задовольняють умову а) означення області, називаються точками області (**внутрішніми точками області**).

Зовнішня точка області D – точка комплексної площини, яка не належить множині D разом із деяким кругом, що містить у собі цю точку.

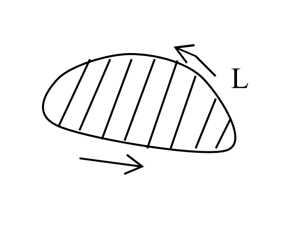
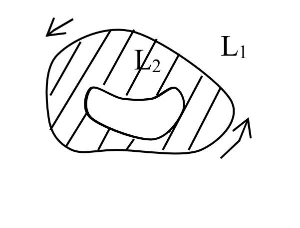
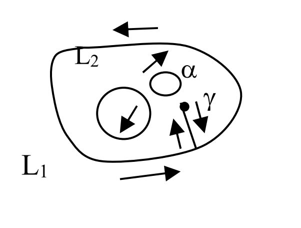
Межова точка області D – точка, що не належить цій області, але будь-який достатньо малий окіл указаної точки містить точки області D.

Межа області – сукупність усіх межових точок області D.

Замкнена область – множина точок, що складається з області D та її межі.

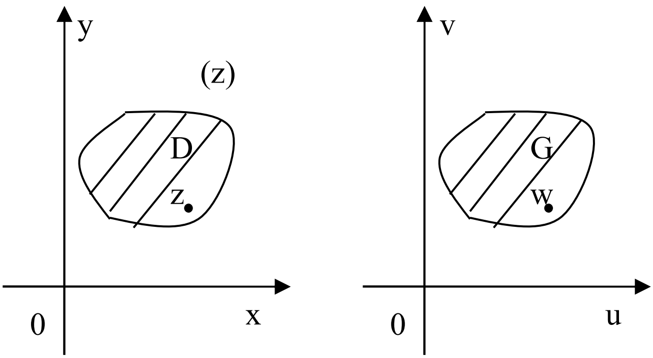
Область D називається **однозв’язною**, якщо будь-яка проста замкнена крива, що цілком належить D, може бути стягнена в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області D (в іншому випадку – область ***многозв’язна***). З цього визначення випливає, що межа многозв'язної області не може складатися з однієї замкненої кривої.

Наприклад,

		
а)однозв′язна область	б) двозв′язна область	в)тризв′язна область

Нехай D – однозв'язна область і L – її межа. Виберемо на L деяку точку і, починаючи з цієї точки, будемо обходити межу L. ***Додатним напрямом обходу*** межі області вважається такий, при якому область залишається весь час зліва.

Нехай дано дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ і $w = u + iv$.



Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w \in G$, то кажуть, що на множині D задано **однозначну функцію комплексної змінної**, яка відображає множину D у множину $G: w=f(z)$.

Множина D називається **множиною визначення** функції $f(z)$. Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то G – **множина значень** цієї функції, або образ множини D, заданий за допомогою функції $f(z)$. Якщо кожному $z\in D$ відповідає кілька різних значень w, то функція $w=f(z)$ називається ***багатозначною.***

Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді:

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ (x,y)\in D$, де $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ – функції дійсних змінних x і y.

Основні елементарні функції комплексної змінної

1) *Дробово-раціональна:* $w=\dfrac{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$, $n,m\in N$.

Її окремими випадками є:

лінійна функція: $w=az+b$, (a,b – комплексні числа);

степенева функція: $w=z^n,\ n\in N$;

дробово-лінійна : $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, (a,b,c,d – комплексні числа);

2) *Показникова функція:* $w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

$$\left|e^z\right|=e^x,\ \arg e^z=y.$$

Властивості: $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$; $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1}-e^{z_2}$.

Показникова функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$:

$$e^z=e^{z+i2\pi}=e^z\cdot(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

3) *Логарифмічна функція:* $w=Ln\,z$ визначається як функція, обернена до показникової. Функція є багатозначною:

$$w=Ln\,z=\ln z+i\,2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

де $\ln z$ – головне значення $Ln\,z$: $\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

Властивості:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2,\; Ln\frac{z_1}{z_2} = Ln\, z_1 - Ln\, z_2,\; Ln\, z^n = n\, Ln\, z\,.$$

4) *Загальна степенева функція:* $w = z^a = e^{a\, Ln\, z}$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення:

$$z^a = e^{a \ln z}$$

5) *Загальна показникова функція*: $w = a^z = e^{z\, Ln\, a}$, $a \neq 0$ – будь-яке комплексне число. Функція є багатозначною. Головне значення

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

6) *Тригонометричні функції:*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\;\; tgz = \frac{\sin z}{\cos z},\;\; ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функції $\sin z$, $\cos z$ періодичні з дійсним періодом 2π, а функції $tg\, z$, $ctg\, z$ – з дійсним періодом π. При довільних значеннях комплексних аргументів z_1 і z_2 справедливі формули

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

При довільному комплексному z виконується тотожність $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Модулі функцій $\sin z$, $\cos z$ можуть бути більше 1.

7) *Гіперболічні функції:*

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\quad ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};\quad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z};\quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}.$$

Функції $sh\, z$, $ch\, z$ періодичні з уявним періодом $2\pi i$ а функції $th\, z$, $cth\, z$ – з уявним періодом πi.

При довільному комплексному z виконується тотожність $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

Співвідношення між тригонометричними та гіперболічними функціями:

$\sin z = -i\, sh\, iz$ $\qquad$ $sh\, z = -i \sin iz$ або $\sin iz = i\, sh\, z$

$\cos z = ch\, iz$ $\qquad$ $ch\, z = \cos iz$

$tg\, z = -i\, th\, iz$ $\qquad$ $th\, z = -i\, tg\, iz$

$ctg\, z = i\, cth\, iz$ $\qquad$ $cth\, z = i\, ctg\, iz.$

8) О*бернені тригонометричні функції:*

$$Arc\sin z = -i\, Ln\left(i\, z + \sqrt{1 - z^2} \right);\ Arc\cos z = -i\, Ln\,(z + \sqrt{z^2 - 1})\ ;$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz};\ Arcctgz = -\frac{i}{2} Ln \frac{z+i}{z-i}.$$

Всі функції є багатозначними.

Задача 6. Обчислити: а) $\sin i$; б) $ch(2-5i)$; в) $Ln(-1-i)$; г) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^i$.

Розв'язування.

а) За означенням $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Маємо

$\sin i = \dfrac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \dfrac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\dfrac{1}{i}\dfrac{e^{1} - e^{-1}}{2} = -\dfrac{1}{i}\cdot sh1 = i\, sh1$. Можна користуватись наведеними вище співвідношеннями: $\sin z = -i\, sh\, iz$. В нашому випадку $z = i$. Тоді $\sin i = -i\, sh\,(i\cdot i) = -i\, sh\,(-1) = i\, sh1$.

б) За означенням $ch\, z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$. Тоді

$$ch\,(2-5i) = \frac{e^{2-5i} + e^{-2+5i}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^2\left(\cos(-5) + i\sin(-5)\right) + e^{-2}\left(\cos 5 + i\sin 5\right)\right] =$$

$$= \cos 5 \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - i\ \sin 5 \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \cos 5 \cdot ch\,2 - i\ \sin 5 \cdot sh\,2\,.$$

Або $ch(2-5i) = \cos(i\,(2-5i)) = \cos(5+2i) = \cos 5 \cdot \cos 2i - \sin 5 \cdot \sin 5i =$
$= [\text{\textit{за формулами маємо}}: \cos 2i = ch2;\ \sin 2i = i\, sh2] = \cos 5 \cdot ch\,2 - i \sin 5 \cdot sh\,2$

в) За означенням $Ln\, z = \ln|z| + i\left(\arg z + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Маємо $z = -1 - i$. Знайдемо $|z| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$x<0, y<0 \Rightarrow \arg z = -\pi + arctg\,\frac{y}{x}$;

$\arg z = -\pi + arctg\,\frac{-1}{-1} = -\pi + arctg\,1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$.

$\ln|z| = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$Ln(-1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \pi i\left(-\frac{3}{4} + 2k\right), k = 0, \pm1, \pm2...$

Головне значення $\ln(-1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{4}\pi i$.

г) За означенням $z^a = e^{aLn\,z}$. Маємо $z = 1-\sqrt{3},\ a = i.$ Тоді $|z| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$,

$x>0,\ y<0 \Rightarrow \arg z = arctg\,\frac{y}{x}$

$\arg\left(1-i\sqrt{3}\right) = arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

$Ln\left(1-i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm1, \pm2,...$

Підставляємо знайдене значення в формулу.

$\left(1-\sqrt{3}\right)^i = e^{iLn\left(1-i\sqrt{3}\right)} = e^{i\left(\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right)} = e^{i\ln 2 - \left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} =$

$= e^{\frac{\pi}{3}-2k\pi}\left(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2\right),\ k = 0, \pm1, \pm2,...$

Головне значення $\left(1-i\sqrt{3}\right)^i = e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2\right)$.

1.4 Диференціювання функцій комплексної змінної. Аналітичні функції.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 = x_0 + y_0\,i$, крім можливо, самої точки z_0 . Якщо існують границі

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ і $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$, то функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ має ***границю*** при $z\to z_0$, яка дорівнює $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=u_0+i\,v_0=w_0$. Дане визначення зводиться до звичайного визначення границі функції дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних змінних справедливі і для функцій комплексної змінної. Функція $f(z)$ називається ***неперервною у точці*** z_0, якщо вона визначена у деякому околі z_0 (включаючи саму точку z_0) і $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Очевидно, що для неперервності функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ у точці z_0 необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервними у точці (x_0,y_0). Сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці z_0 комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці. (У випадку частки припускаємо, що $g(z)\neq 0$). Функція називається ***неперервною в області*** *D*, якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.

Основні поняття і формули аналізу функцій дійсної змінної переносяться на випадок функції комплексної змінної.

Нехай функція $w=f(z)$ визначена в деякій області D і точки $z\,,z+\Delta z\ \in\ D$.

Похідною функції $w=f(z)$ **комплексної змінної** називається границя $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)=\dfrac{df}{dz}=\dfrac{dw}{dz}$, при умові, що $\Delta z\to 0$ довільним чином.

Функція $w=f(z)$ називається ***диференційованою*** в точці, якщо існує похідна в цій точці.

Функція $w=f(z)$ називається ***аналітичною*** в даній точці z, якщо вона диференційована як в самій точці z, так і в деякому її околі.

Функція $w=f(z)$, що однозначна та диференційована в кожній точці області D, називається ***аналітичною*** в області D.

Точки області, де функція аналітична, називаються ***правильними***, а точки де вона не аналітична – ***особливими***.

Умови диференційованості функції $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ виражає наступна **теорема**:

Нехай функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки z, до того ж у цій точці функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовані. Тоді для диференційованості функції комплексної змінної $f(z)$ у точці z необхідно і достатньо, щоб у цій точці мали місце рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}.$$

Рівності (1), (2) називаються умовами **Коші-Рімана**.

Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області D, необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних від функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана. При виконанні умов Коші-Рімана, похідну $f'(z)$ можна представити в таких рівнозначних формах:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Правила диференціювання функцій комплексної змінної і похідні від елементарних функцій комплексної змінної аналогічні, що й для функцій дійсного аргументу.

Дійсна і уявна частини аналітичної в області D функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є *гармонічними* функціями в цій області, тобто кожна з них задовольняє рівнянням Лапласа, які отримаємо з умов Коші-Рімана, вилучивши $v(x,y)$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\Delta u)=0$ і, аналогічно, вилучивши $u(x,y)$: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=(\Delta v)=0$.

Внаслідок лінійності оператора Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) маємо $\Delta w = \Delta u + i\Delta v = 0$. Дві гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що задовольняють умовам Коші-Рімана, називаються ***спряженими***.

Умови Коші-Рімана дають змогу відновити аналітичну функцію, знаючи її дійсну або уявну частину.

Задача 7. З′ясувати, які з наведених функцій є аналітичними і в якій області: а) $w = e^z$; б) $w = z\operatorname{Re} z$.

Розв'язування.

а) Для функції $w = e^z$ виділимо дійсну і уявну частини. Запишемо $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Тоді дійсна частина функції є $u(x, y) = e^x \cos y$, а уявна – $v(x, y) = e^x \sin y$. Ці функції диференційовані в будь-якій точці $(x; y)$. Знайдемо частинні похідні цих функцій і перевіримо задовольняють вони чи ні умовам Коші – Рімана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Умови Коші - Рімана для функції $w = e^z$ виконуються в усіх точках комплексної площини. Функція є диференційованою в усіх точках комплексної площини, з чого випливає її аналітичність на всій комплексній площині.

б) Для функції $w = z\operatorname{Re} z$ виділимо дійсну і уявну частини. Запишемо $z\operatorname{Re} z = (x + iy)\operatorname{Re}(x + iy) = (x + iy)x = x^2 + ixy$. Тоді дійсна частина функції $\operatorname{Re} w = u(x, y) = x^2$, а уявна – $\operatorname{Im} w = v(x, y) = xy$. Ці функції диференційовані в будь-якій точці (x, y). Знайдемо частинні похідні цих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Звідси маємо, що умови Коші – Рімана виконуються для цієї функції тільки при $x=0$ і $y=0$. таким чином функція $w = z\operatorname{Re} z$ диференційована тільки в єдиній точці $z=0$ і не аналітичною (так як не диференційована в околі точки $z=0$).

Задача 8. Поновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по відомій дійсній або уявній частині: а) $v(x,y)=5x+4xy$ б) $u(x,y)=2e^x \sin y+3x-2y$ при умові, що $f(0)=0$.

Розв'язування.

а) Маємо $v(x,y)=5x+4xy$. Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому задовольняє умовам Коші – Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

Знаходимо $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=4x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-5-4y$. Інтегруємо перше співвідношення по x і знаходимо функцію

$$u(x,y)=\int 4x dx+\varphi(y)=2x^2+\varphi(y).$$

Щоб знайти функцію $\varphi(y)$, диференціюємо отриману функцію по y і підставляємо в друге співвідношення: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)=-5-4y$.

Тоді $\varphi(y)=\int(-5-4y)dy+C=-5y-2y^2+C$. Дійсна частина шуканої функції $u(x,y)=2x^2-5y-2y^2+C$.

Знаходимо функцію

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=2x^2-5y-2y^2+C+i(5x+4xy)=$$
$$=5i(x+iy)+2(x^2-y^2+i2xy)+C=5iz+2z^2+C.$$

б) Маємо $u(x,y)=2e^x \sin y+3x-2y$, $f(0)=0$. Шукана функція $f(z)$ є аналітичною за умовою задачі і тому задовольняє умовам Коші – Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

Знаходимо $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \sin y + 3$, $-\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2e^x \cos y - 2$.

Інтегруємо перше співвідношення по y і знаходимо функцію

$$v(x, y) = \int \left(2e^x \sin y + 3\right) dy + \varphi(x) = -2e^x \cos y + 3y + \varphi(x).$$

Щоб знайти функцію $\varphi(x)$, диференціюємо отриману функцію по x і підставляємо в друге співвідношення:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(-2e^x \cos y + \varphi'(x)\right) = 2e^x \cos y - 2 .$$

Тоді $2e^x \cos y - \varphi'(x) = 2e^x \cos y - 2$.

$$\varphi'(x) = 2 \Rightarrow \varphi(x) = \int 2dx + C = 2x + C .$$

Уявна частина шуканої функції

$$v(x, y) = -2e^x \cos y + 3y + 2x + C$$

Знаходимо функцію

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 2e^x \sin y + 3x - 2y +$$
$$+ i\left(-2e^x \cos y + 3y + 2x + C\right) = -i\,2\,e^x\left(\cos y + i \sin y\right) + 3(x + iy) +$$
$$+ 2i(x + iy) + iC = -2ie^x \cdot e^{iy} + 3z + 2iz + iC = -2ie^z + 3z + 2iz + iC .$$

Комплексну сталу C знайдемо з умови $f(0) = 0$:

$$0 = -2ie^0 + 3 \cdot 0 + 2i \cdot 0 + iC \Rightarrow C = 2 .$$

Тоді $f(z) = -2ie^z + 3z + i2z + i2 = -2ie^z + z(3 + 2i) + 2i$.

Зауваження. При знаходженні $f(z)$ слід пам’ятати, що $\bar{z} = x - iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$, $z^3 = x^3 - y^3 i + 3x^2 yi - 3xy^2$, $\bar{z}^3 = x^3 + y^3 i - 3x^2 yi + 3xy^2$.

1.5 Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ визначена і неперервна в області D, а C – кусково-гладка замкнена або незамкнена крива, що належить D. ***Обчислення інтеграла від*** $f(z)$ зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду :

$$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy .$$

Інтеграли від функції комплексної змінної мають властивості криволінійних інтегралів другого роду для функцій дійсного аргументу.

Якщо шлях інтегрування є променем, який виходить із точки z_0 , або є колом з центром у точці z_0 , то зручно робити заміну змінної виду: $z-z_0=re^{i\varphi}$. В першому випадку $t=const$ (кут нахилу до осі Ox), r – дійсна змінна інтегрування; в другому випадку $r=const$ (радіус кола), t – дійсна змінна інтегрування.

Якщо крива C задана *параметричним рівнянням* $z(t)=x(t)+i\,y(t)$, де $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t_0\le t\le t_1$ і значення параметра $t=t_0$ і $t=t_1$ відповідають початковій та кінцевій точкам кривої C, то:

$$\int_C f(z)dz=\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\cdot z'(t)dt .$$

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, що містить точки z_0 і z_1, то має місце ***формула Ньютона-Лейбніца***:

$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=F(z_1)-F(z_0)$, де $F(z)$ - первісна функція для $f(z)$.

Обчислення інтегралів від аналітичних функцій проводять із використанням таблиці основних інтегралів та методів інтегрування функцій дійсного аргументу.

У випадку, коли $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, обмеженій контуром L, і C – замкнений контур, що цілком лежить в області D, то $\oint\limits_C f(z)dz = 0$ (***Теорема Коші***).

Інтегральна теорема Коші справджується і у випадку замкненого контуру, який є границею області аналітичності.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в замкненій однозв`язній області D, обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C і на самому контурі, то значення функції $f(z)$ в будь-якій точці $z_0 \in D$ можна обчислити за ***інтегральною формулою Коші***:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

(при обході контуру C область D залишається зліва).
Формула Коші зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у довільній точці області зі значенням цієї функції на межі області.

Для функцій комплексної змінної справедлива ***теорема***:

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в замкненій області D. Тоді в кожній внутрішній точці $z_0 \in D$ функція $f(z)$ має похідні всіх порядків, причому похідну n - го порядку обчислюють за формулою:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

При застосуванні інтегральної формули Коші може бути корисною ***теорема*****:**

Нехай область D – багатозв'язна, обмежена додатно орієнтовним контуром C, та декількома внутрішніми додатно орієнтовними контурами C_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Область $\overline{D}$ – внутрішня частина області D. Якщо функція $f(z)$ – аналітична в $\overline{D}$, то $\oint\limits_C f(z)dz = \sum\limits_{i=1}^{n} \oint\limits_{C_i} f(z)dz$ **.**

Задача 9. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$;

б) $\int\limits_{L}\left(2\bar{z}+\operatorname{Im}z^2\right)dz$, де L – парабола $y=2x^2$ від точки $z_1=0$, до $z_2=1+2i$;

в) $\int\limits_{L}\left(2i+3z+2\bar{z}\right)dz$, де L – дуга кола $|z|=2$ і $0\le\arg z\le\pi$;

г) $\int\limits_{L}\frac{dz}{z-4}$, де L– еліпс: $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$;

д) $\int\limits_{|z-2|=3/2}\frac{e^z}{z(z-3)}dz$;

е) $\int\limits_{|z-3|=4}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$;

ж) $\int\limits_{|z|=2}\frac{chz}{(z+1)^3}dz$

Розв'язування.

а) $\int\limits_{-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$. Підінтегральна функція $f(z)=3z^2+2z$ є аналітичною. Інтеграл від неї не залежить від лінії, яка сполучає точки $z_0=1-i$ та $z_1=2+i$.

Справедлива формула Ньютона-Лейбніца. Для знаходження первісної застосовуємо табличні інтеграли.

$$\int\limits_{-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz=(z^3+z^2)\Big|_{-i}^{2+i}=(2+i)^3+(2+i)^2-(-i)^3-(-i)^2=$$

$$=8+12i+6i^2+i^3+4+4i+i^2+i^3-i^2=12+16i+6i^2+2i^3=12+16i-6-2i=6+14i.$$

б) $\int\limits_L \left(2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2\right)dz$. Підінтегральна функція $f(z) = 2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2$ не є аналітичною. Вилучимо дійсну та уявну частини функції $f(z)$:

$$2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2 = 2(x - iy) + \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2x - i2y + 2xy .$$

Маємо $u(xy) = 2x(1 + y), \quad v(x, y) = -2y$.

За формулою $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C vdx + udy$ матимемо

$$I = \int\limits_L (2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2)\, dz = \int\limits_L 2x(1 + y)dx + 2ydy + i\int\limits_L -2ydx + 2x(1 + y)dy$$

Інтегруємо вздовж параболи $y = 2x^2$ від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + 2i$. Маємо $0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 2$. З рівняння параболи знаходимо $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$. Інтеграл матиме вигляд:

$$I = \int\limits_0^1 2x(1 + 2x^2)dx + \int\limits_0^2 2ydy - i\int\limits_0^1 2 \cdot 2x^2 dx + i\int\limits_0^2 2\sqrt{\frac{y}{2}}(1 + y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x + 4x^3)\, dx + 2\int\limits_0^2 ydy - i\,4\int\limits_0^1 x^2 dx + i \cdot 2\int\limits_0^2 \left(\sqrt{\frac{y}{2}} + y\sqrt{\frac{y}{2}}\right)dy =$$

$$= (x^2 + x^4)\Big|_0^1 + y^2\Big|_0^2 - i \cdot 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + i \cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2 + 4 - i \cdot \frac{4}{3} + i\left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}}\right) = 6 + i\left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \frac{16}{5}\right) = 6 + \frac{68}{15}i$$

в) $\int\limits_L \left(2i + 3z + 2\bar{z}\right)dz$. Для точок півкола $|z| = 2$ і $0 \le \arg z \le \pi$ маємо $z = 2e^{i\varphi}$. Тоді $dz = z'd\varphi = 2i\,e^{i\varphi}d\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$. Підінтегральна функція має вигляд

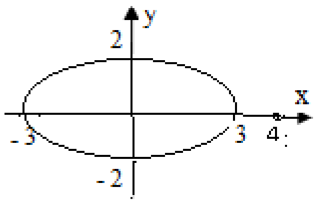
$$f(z) = 2i + 3z + 2\bar{z} = 2i + 3 \cdot 2e^{i\varphi} + 2 \cdot 2e^{-i\varphi} = 2i + 6e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi} .$$

Тоді $\int\limits_L (2i + 6z + 4\bar{z})\, dz = \int\limits_0^{\pi} (2i + 6e^{i\varphi} + 4e^{-i\varphi}) \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi =$

$= \int\limits_0^{\pi} (-4e^{i\varphi} + 12ie^{i2\varphi} + 8i) d\varphi = (-\frac{4}{i} e^{i\varphi} + \frac{12i}{2i} e^{i2\varphi} + 8\varphi i)\Big|_0^{\pi} =$

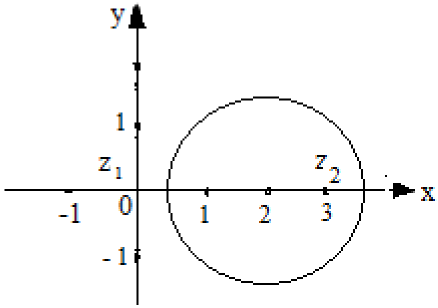
$= 4ie^{i\pi} + 6e^{i2\pi} + 8\pi i - 4i - 6 = 4i(\cos\pi + i\sin\pi) + 6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) +$
$+ 8\pi i - 4i - 6 = -4i + 6 + 8\pi i - 4i - 6 = -8i + 8\pi i = 8(\pi - 1)i$.

г) $\int\limits_L \frac{dz}{z-4}$. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{1}{z-4}$ є аналітичною в області, обмеженою еліпсом $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$. Особлива точка $z = 4$ не належить внутрішній частині еліпса:



За теоремою Коші $\int\limits_L \frac{dz}{z-4} = 0$.

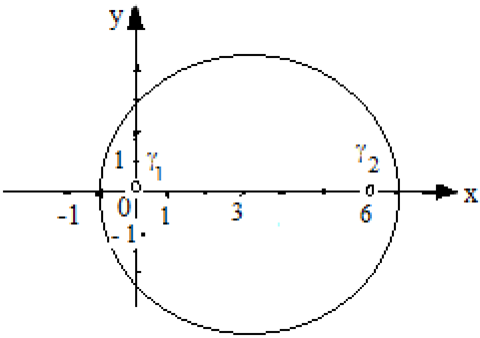
д) $\int\limits_{|z-2|=3/2} \frac{e^z}{z(z-3)} dz$. Підінтегральна функція $\frac{e^z}{z(z-3)}$ не визначена в точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 3$. Область інтегрування обмежена колом радіуса $\frac{3}{2}$ з центром в точці $z_0 = 2$. Області інтегрування належить точка $z_2 = 3$.



Функція $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ є аналітичною в крузі $|z-2|=\dfrac{3}{2}$. За інтегральною формулою Коші матимемо

$$\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}}\frac{e^z dz}{z(z-3)}=\int\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{e^z}{z}}{z-3}dz=2\pi i\left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=3}=2\pi i\,\frac{e^3}{3}=\frac{2}{3}\pi e^3 i\,.$$

е) Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ не визначена у точках $z_1=0$ і $z_2=6$, які належать області інтегрування, що обмежена колом $|z-3|=4$. Можна розкласти підінтегральну функцію на суму простих дробів із знаменниками z і $z-6$, або розглянути область інтегрування, як тризв′язну. Обмежимо точки z_1 і z_2 колами γ_1 і γ_2 відповідно. Тоді заданий інтеграл є сумою інтегралів по області γ_1 і області γ_2.

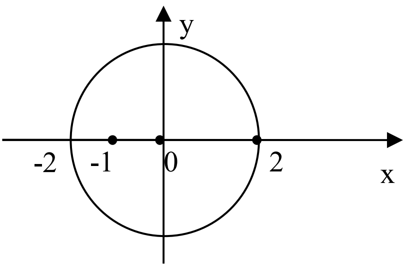


В області інтегрування γ_1 функція $\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ є аналітичною, а в області γ_2 аналітичною є функція $\dfrac{e^z}{z}$. Враховуючи це, матимемо:

$$\int\limits_{|z-3|=4} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{z^2}}{z}}{z-6}dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6}\Bigg|_{z=0} + 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z}\Bigg|_{z=6} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{6} + \frac{2\pi i}{6}e^{36} = \frac{\pi i}{3}e^{36} - \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi i}{3}(e^{36}-1).$$

ж) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{chz}{(z+1)^3}dz$. Підінтегральна функція $\dfrac{chz}{(z+1)^3}$ є аналітичною в області $|z| \le 2$ всюди, крім точки $z_0 = -1$.



Виділимо під знаком інтеграла функцію $f(z)$, яка є аналітичною в крузі $|z| \le 2$: $f(z) = ch\, z$. Застосуємо інтегральну формулу Коші для похідної 2-го порядку:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{chz}{(z+1)^3}dz = \int\limits_{|z|=2} \frac{chz}{(z+1)^{2+1}}dz = \begin{bmatrix} n=2 \\ f(z)=chz \end{bmatrix} = \frac{2\pi i}{2!}\cdot (chz)''\Big|_{z=-1} =$$

$$= \left[(chz)' = shz;\ (ch\,z)'' = (shz)' = chz\right] = \pi i\, chz\Big|_{z=-1} = \pi i\, ch(-1) = \pi\, i\, ch1.$$

1.6 Степеневі ряди функції комплексної змінної. Ряд Лорана.

Ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

де z – комплексна змінна; $c_0, c_1, \ldots, c_n$ – сталі комплексні числа (***коефіцієнти ряду***); z_0 – комплексне число (***центр ряду***), називається ***степеневим***. Ті значення z, при яких ряд збігається, називають ***точками збіжності***. Множина точок збіжності утворює ***область збіжності*** степеневого ряду.

Область $|z-z_0| < R \; (R > 0)$, у кожній точці якої степеневий ряд збігається, а зовні її – розбігається, називають його ***кругом збіжності*** з центром у точці z_0, а число R – ***радіусом збіжності*** цього ряду. На межі круга ряд може як збігатися, так і розбігатися. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

якщо границі існують. Коли $R = 0$ ряд збігається в єдиній точці $z = z_0$, а для $R = \infty$ – ряд збігається в усій комплексній площині.

Степеневий ряд всередині круга збіжності збігається до аналітичної функції, яка є сумою ряду. Степеневий ряд всередині круга збіжності можна почлено інтегрувати і диференціювати довільне число раз, причому радіус збіжності одержаних рядів дорівнює радіусові збіжності початкового ряду.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в середині круга $|z-z_0| < R$, то вона може бути розвинена в цьому крузі в збіжний степеневий ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

причому коефіцієнти цього ряду визначаються однозначно за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (n = 0,1,2,3,\cdots),$$

де C – довільний замкнений контур всередині круга аналітичності, що містить точку z_0. Степеневий ряд називається ***рядом Тейлора*** функції $f(z)$.

Будь-яку аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R \le +\infty)$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому кільці в ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, коефіцієнти якого визначаються за формулами $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \dfrac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, де C – довільне коло з центром у точці z_0, яке лежить всередині заданого кільця. Цей ряд називають *Лорановим рядом* функції $f(z)$ з центром у точці z_0. Ряд Лорана для функції $f(z)$ складається з двох частин:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

При цьому ряд $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається в крузі $|z - z_0| < R$ і називається ***правильною частиною*** ряду Лорана, а ряд $f_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ збігається при $|z - z_0| > r$ і називається ***головною частиною*** ряду Лорана.

Вередині кільця $r < |z - z_0| < R$ ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається до аналітичної функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z = +\infty$ буде ряд $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, який збігається в кільці $r < |z| < \infty$. У цьому випадку головною частиною ряду Лорана є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, а правильною – ряд $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$.

Задача 10. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} e^{(i+2)n} z^n$.

Розв'язування.

Радіус збіжності знаходимо за формулою

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},\text{ де } c_n=e^{(i+2)n},\qquad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{(i+2)n}\right|}}=$$

$$=\frac{1}{\left|e^{i+2}\right|}=\frac{1}{\left|e^2(\cos 1+i\sin 1)\right|}=\frac{1}{\sqrt{(e^2\cos 1)^2+(e^2\sin 1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{e^4}}=\frac{1}{e^2}.$$

Задача 11. Розвинути функції у ряд Тейлора по степенях z, використовуючи відомі формули:

а) $f(z)=\ln(4+z)$; б) $f(z)=ch^2\dfrac{z}{2}$

Розв`язування.

а) Застосуємо розвинення в ряд функції $\ln(1+z)$ (Таблиця 3.1):

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\text{ де } |z|<1.$$

Перетворимо задану функцію наступним чином:

$$\ln(4+z)=\ln 4\left(1+\frac{z}{4}\right)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{z}{4}\right)=\ln 4+\frac{z}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{4}\right)^3-...$$

Маємо: $f(z)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{z^n}{n\cdot 4^n}$, де $\left|\dfrac{z}{4}\right|<1\Rightarrow |z|<4$.

б) Переходимо від гіперболічної функції до тригонометричної функції: $ch^2\dfrac{z}{2}=\cos^2\dfrac{iz}{2}=\dfrac{1+\cos iz}{2}$. Застосуємо розвинення в ряд

$\cos z$ (Таблиця 3.1): $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Тоді матимемо:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} - ...\right) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Задача 12. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2}$ по степенях z.

Розв'язування.

Задана функція є аналітичною в усіх точках, крім $z = 2$ та $z = -1$, в яких знаменник обертається в нуль. Розглянемо розвинення функції в ряд Лорана: а) крузі $|z| < 1$, б) кільці $1 < |z| < 2$, в) $2 < |z| < +\infty$.

Розкладемо функцію $f(z)$ на суму простих дробів, а саме

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 2} = \frac{3z}{(z-2)(z+1)} = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}.$$

а) Отримаємо розвинення $f(z)$ в крузі $|z| < 1$.

Застосуємо формулу $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$. Зробимо перетворення для дробів:

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{-2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \frac{-1}{1 - \frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n, \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n, \quad |z| < 1.$$

Тоді $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, |z| < 1$.

б) Отримаємо розвинення $f(z)$ в кільці $1 < |z| < 2$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ для функції $\frac{2}{z-2}$ є збіжним у цьому кільці, так як $|z|<2$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ для функції $\frac{1}{z+1}$ є розбіжним для $|z|>1$, тому зробимо перетворення для функції

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1.$$

Тоді $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$ в кільці $1<|z|<2$.

в) Отримаємо розвинення $f(z)$ для $|z|>2$.

Для функції $\frac{2}{z-2}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ є розбіжним для $|z|>2$. Зробимо перетворення функції

$$\frac{2}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{2}{1-\frac{2}{z}}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n,\quad\left|\frac{2}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>2.$$

Для функції $\frac{1}{z+1}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$ є збіжним для $|z|>1$. Тому він є збіжним і для $|z|>2$. Тоді задана функція $f(z)$ для $|z|>2$ має розвинення

$$f(z)=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}.$$

1.7 Класифікація нулів та ізольованих особливих точок функції комплексної змінної

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і $f(z_0)=0, z_0 \in D$, то точка z_0 називається ***нулем функції*** $f(z)$. Розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд в околі нуля функції – точки z_0 має вигляд:
$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$, $c_0=0$.

У випадку коли $c_1=c_2=\ldots=c_{m-1}=0, c_m\neq 0,$ тобто розвинення в ряд має вид: $f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots, c_m\neq 0,$ то точка z_0 називається ***нулем*** m ***-го порядку*** для функції $f(z)$. Якщо $m=1$, то нуль називається ***простим***, якщо ж $m>1$ – **кратним**. Також справедливо, що точка z_0 є нулем функції $f(z)$ порядку m, якщо виконуються умови: $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0,\ldots,$ $f^{(m-1)}(z_0)=0$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. Для того, щоб точка z_0 була нулем m-го порядку аналітичності в точці z_0 функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі цієї точки виконувалась рівність $f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точки, в яких порушуються умови аналітичності, називаються ***особливими***. Точку z_0 називають ***ізольованою особливою точкою функції*** $f(z)$, якщо існує проколений окіл точки z_0 – кільце $0<|z-z_0|<R$ у якому функція $f(z)$ однозначна й аналітична. У самій точці z_0 функція не означена, або не є однозначною і аналітичною.

Існують три типи ізольованих особливих точок: ***усувна особлива точка***, ***полюс*** та ***істотно особлива точка***. Кваліфікуються вони або за виглядом ряду Лорана: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, або за поведінкою функції в околі особливої точки z_0.

1) Точка z_0 – ***усувна особлива точка***, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C, \ (C - const)$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки не містить головної частини: $f(z) = f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $c_{-n} = 0 \ \left(n = \overline{1, \infty}\right)$.

2) Точка z_0 – ***полюс***, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить скінчену кількість членів головної частини. Точка z_0 – ***полюс*** m***-го порядку***, якщо $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \varphi(z_0) \neq 0$ або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить m членів головної частини: $f(z) = f_1(z) + \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, $c_{-m} \neq 0$, $c_{-n} = 0 \ \left(n = \overline{m+1, \infty}\right)$.

.

Якщо $m = 1$, то маємо ***полюс першого порядку***, або ***простий полюс***.

Зв`язок між нулем і полюсом: якщо точка z_0 – полюс m-го порядку функції $f(z)$, то для функції $\dfrac{1}{f(z)}$ ця точка є нулем m-го порядку.

3) Точка z_0 – ***істотно особлива точка***, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує (і не дорівнює нескінченності) або, коли Лоранове розвинення функції $f(z)$ у проколеному околі цієї точки містить нескінчену кількість членів головної частини: $f(z) = f_1(z) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

Задача 13. З′ясувати характер особливих точок:

а) $f(z)=\dfrac{e^{z-1}-1}{(z-1)^3}$, б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Розв’язування.

а) $f(z)=\dfrac{e^{z-1}-1}{(z-1)^3}$. Задана функція має особливу точку $z=1$. Запишемо розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі цієї точки. Для цього застосуємо розвинення в ряд функції e^z: $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4}+...,$ в якому замінюємо z на $z-1$.

Матимемо $e^{z-1}=1+(z-1)+\dfrac{(z-1)^2}{2!}+\dfrac{(z-1)^3}{3!}+\dfrac{(z-1)^4}{4}+...$

Тоді $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}\left[1+(z-1)+\dfrac{(z-1)^2}{2!}+\dfrac{(z-1)^3}{3!}+\dfrac{(z-1)^4}{4}+...-1\right]=$

$=\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{1}{2!(z-1)}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z-1}{4!}+...$

Розвинення в ряд Лорана має скінчену кількість членів головної частини. З цього випливає, що точка $z=1$ є полюсом. Головна частина має два члени, що відповідає полюсу другого порядку.

б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Задана функція має особливу точку $z=0$.

Знайдемо границю функції в цій точці: $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$.

Границя дорівнює const, тому точка $z=0$ є усувною особливою точкою.

в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}$.

Задана функція має особливу точку $z=2$. Запишемо розвинення функції в ряд Лорана в околі цієї точки. Для цього в розвиненні в ряд функції $\cos z$ (Таблиця 3.1): $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-...$ замінимо z на $\dfrac{1}{z-2}$

$$\cos\frac{1}{z-2}=1-\frac{1}{(z-2)^2\cdot 2!}+\frac{1}{(z-2)^4\cdot 4!}-\ldots$$

Головна частина ряду Лорана має нескінчену кількість членів, тому точка $z=2$ є істотно особливою точкою.

1.8 Лишки та їх застосування

Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається число, що позначається символом $res\, f(z_0)$ або $res\left[f(z), z_0\right]$ і визначається рівністю: $res\ f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz$, де C – деякий замкнений контур, що містить всередині тільки одну особливу точку z_0 і лежить в області аналітичної функції $f(z)$.

Лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в розвиненні функції $f(z)$ в околі точки z_0 в ряд Лорана: $res\ f(z_0)=c_{-1}$.

Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулеві: $res\ f(z_0)=0$.

Якщо точка z_0 – ***полюс першого порядку*** функції $f(z)$, то лишок обчислюється за формулою:

$$res\ f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)\right].$$

Якщо точка z_0 – ***полюс m - го порядку*** функції $f(z)$, то

$$res\ f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^m\right].$$

У випадку, коли функція $f(z)$ в околі точки z_0 зображується як частка двох аналітичних функцій $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0,$ тобто точка z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$res\, f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Якщо точка z_0 – істотно особлива точка, то для знаходження лишку функції $f(z)$, знаходять коефіцієнт c_{-1} з розвинення цієї функції в ряд Лорана в околі точки z_0.

Якщо точка $z=\infty$ – особлива точка функції $f(z)$ і ця функція аналітична в околі $|z|>r$, то $res\, f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz=-c_{-1}$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична на всій комплексній площині, окрім точок $z_k\ \left(k=\overline{1,N}\right)$, тоді

$$\sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k)+res(\infty)=0.$$

Звідси $res\, f(\infty)=-\sum\limits_{k=1}^{n} res\, f(z_k)$, де $z_k\left(k=\overline{1,n}\right)$ – особливі точки функції $f(z)$.

При застосуванні лишків до обчислення контурних інтегралів використовують **основну теорему про лишки**.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в деякій області D, окрім скінченої множини особливих точок $z_k\ \left(k=\overline{1,N}\right)$, а C – простий замкнений контур з цієї області (додатно зорієнтований) і охоплює точки z_k. Тоді справедлива рівність

$$\oint\limits_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k).$$

Якщо дробово-раціональна функція $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неперервна на всій дійсній осі $\left(Q_m(x)\neq 0\right)$ і $m\geq n+2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k),\ \left(\operatorname{Im} z_k>0\right),$$

де лишки обчислюють за особливими точками підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в усіх точках напівплощини $\operatorname{Im} z \geq 0,$ окрім точок $z_k\left(k = \overline{1, N}\right)$ і задовольняє умові $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $M > 0,$ $\delta > 0,$ коли $|z| \geq R$ (R - достатньо велике), тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\, f(z_k).$$

Задача 14. Знайти лишки функцій в особливих точках:

а) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$; б) $f(z) = z^2 \sin\frac{2}{z}$; в) $f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}$.

Розв'язування.

а) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. Функція має три особливі точки: $z_1 = 0$ – полюс другого порядку, $z_{2,3} = \pm 3i$ – полюси першого порядку. Знайдемо лишки в цих точках:

$$res\, f(z_1) = res\, f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} \cdot z^2\right] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right) =$$

$$= \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z^2+9}\right) = \frac{e^z(z^2+9) - 2z \cdot e^z}{(z^2+9)^2}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{e^z(z^2+9) - 2ze^z}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.$$

$$res\, f(z_2) = res\, f(3i) = \lim_{z \to 3i}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}(z-3i)\right] = \lim_{z \to 3i} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} =$$

$$= \frac{e^{3i}}{(3i)^2 \cdot 6i} = -\frac{e^{3i}}{54i} = \frac{1}{54} i e^{3i}.$$

$$res\, f(z_3) = res\, f(-3i) = \lim_{z \to -3i}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}(z+3i)\right] = \lim_{z \to -3i} \frac{e^z}{z^2(z-3i)}$$

$$= \frac{e^{-3i}}{(-3i)^2(-3i-3i)} = \frac{e^{-3i}}{54i} = -\frac{1}{54} i e^{-3i}.$$

б) $f(z)=z^2\sin\frac{2}{z}$. Особлива точка функції $z=0$. Розвинемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі особливої точки:

$$f(z)=z^2\left(\frac{2}{z}-\frac{8}{z^3 3!}+\frac{32}{z^5 5!}-\cdots\right)=2z-\frac{4}{3z}+\frac{4}{15z^3}-\cdots$$

Розвинення має нескінчену кількість членів головної частини. Точка $z=0$ є істотно особлива ізольована точка.

Лишок функції в цій точці $res\,f(0)=C_{-1}=-\frac{4}{3}$.

в) $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}=\dfrac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$. Особливі точки функції: $z_1=0$ i $z_2=\frac{\pi}{4}$. Знайдемо границю функції в цих точках:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}\ .$$

$z_1=0$ є усувною особливою точкою. $res\,f(z_1)=res\,f(0)=0$.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\ \frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=\infty\ .$$

$z_2=\frac{\pi}{4}$ є простий полюс або полюс першого порядку.

$$res\,f(z_2)=res\,f\left(\frac{\pi}{4}\right)==\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=$$

$$=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}\ .$$

Задача 15. Обчислити інтеграли за допомогою лишків:

а) $\int\limits_{|z|=1} \frac{ctg\, z}{4z-\pi} dz,$,   б) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz$,   в) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$.

Розв'язування.

а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ctg\, z}{4z-\pi} dz = I$.

Область інтегрування $|z|=1$ – це коло з центром в точці O радіуса $R=1$, яке обходимо проти руху стрілки годинника.

Знаменник функції $f(z)=\frac{ctgz}{4z-\pi}=\frac{\cos z}{(4z-\pi)\sin z}$ обертається в нуль в точках: $(4z-\pi)\sin z=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4z-\pi=0 \\ \sin z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{\pi}{4} \\ z=n\pi, n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \end{array}\right.$.

Тільки дві з цих точок: $z_1=\frac{\pi}{4}$ і $z_2=0$ знаходяться всередині кола $|z|=1$. Ці точки є полюси першого порядку. Знайдемо лишки функції $f(z)$ в цих точках: $res\, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{ctgz}{4z-\pi}\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$=\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} ctgz = \frac{1}{4}$.

$$res\, f(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{(4z-\pi)\sin z}\cdot z\right]=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{4z-\pi}=-\frac{1}{\pi} .$$

Маємо $I=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)$.

б) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz = I$.

Область інтегрування $|z|=\frac{1}{2}$ – це коло радіуса $R=\frac{1}{2}$ з центром в точці O, яке обходимо проти руху стрілки годинника. Підінтегральна функція $f(z)=(z+1)\cdot e^{\frac{1}{z}}$ має особливу точку $z=0$, яка належить колу і є істотно особливою точкою.

Знайдемо лишок функції $f(z)$ в цій точці. Для цього розвинемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z=0$:

$$(z+1)\cdot e^{\frac{1}{z}}=(z+1)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\ldots\right)=$$

$$=z+1+\frac{1}{z\cdot 2!}+\frac{1}{z^2\cdot 3!}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\ldots$$

$res\, f(o)=C_{-1}=\frac{1}{2!}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. Маємо $I=2\pi i\cdot\frac{3}{2}=3\,\pi i$.

в) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^4}=I$.

Область інтегрування $|z|=2$ – це коло радіуса $R=2$ з центром в точці O, яке обходимо проти руху стрілки годинника. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ має чотири особливі точки, які є коренями рівняння $z^4=-1$ і лежать всередині кола $|z|=2$. Враховуючи, що $\sum_{k=1}^{4} res\, f(z_k)+resf(\infty)=0$, матимемо $I=2\pi i\sum_{k=1}^{4} f(z_k)=-2\pi i\, resf(\infty)$.

Знайдемо лишок функції $f(z)$ при $z=\infty$. Запишемо розвинення в ряд функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^4}\right)^n=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{12}}-\cdots$$

Доданок з z^{-1} в розвиненні відсутній, тому $c_{-1}=0$. Маємо $res\, f(\infty)=C_{-1}=0$. Тоді $I=-2\pi i\cdot 0=0$.

1.9 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Задані комплексні числа z_1, z_2, z_3. Знайти: а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 - z_2$, в) $z_1 \cdot z_2$, г) $\frac{z_1}{z_2}$. Представити z_2 у тригонометричній формі, а z_3 у показниковій формі.

Варіант	z_1	z_2	z_3
1.	$-3+2i$	$2-3i$	$-3+3i$
2.	$2+3i$	$1+4i$	$-3+\sqrt{3}i$
3.	$-5+2i$	$4+i$	$-\sqrt{3}-3i$
4.	$5-3i$	$3-i$	$-4+4i$
5.	$-1+3i$	$5-2i$	$-1+i$
6.	$-4-3i$	$2+5i$	$-3\sqrt{3}+3i$
7.	$4+5i$	$5-i$	$-3-3\sqrt{3}i$
8.	$4-i$	$5+3i$	$-1-i$
9.	$5+i$	$3+4i$	$-4-4i$
10.	$-6+i$	$5+2i$	$-\sqrt{3}-i$

Завдання 2. Записати в алгебраїчній формі комплексне число.

1. $\left(\frac{1+i^{13}}{1+i^{11}}\right)^{11}$

2. $\frac{(1-2i)^3}{i^{17}} - 2i^{16}$

3. $\frac{(1+i)^3}{1+i^{15}} + \frac{1}{i^{10}}$

4. $\frac{(3+2i^{15})^2}{1-4i^{16}} - 4i^9$

5. $\frac{(1+2i)^3}{11i^2 - 2i^5} + 2i^6$

6 $\frac{i^{13}-i^{14}}{1+i^{15}} + i^{10}$

7. $\frac{(1+i^7)^3}{1+i^{17}} + 2i^4$

8. $\frac{(2+i)^3}{2-11i^7} - \frac{1}{i^{14}}$

9. $\frac{(1+2i)^3}{11+2i^5} - i^{15}$

10. $\frac{3-2i^5}{2-i^7} + 1{,}4i^9$

Завдання 3. Обчислити (відповідь записати в алгебраїчній формі)

1.	а)	$(1-i)^8$	б)	$\sqrt[4]{-1}$
2.	а)	$\left(1-\sqrt{3}i\right)^{12}$	б)	$\sqrt[3]{-64i}$
3.	а)	$\left(\sqrt{3}-i\right)^{24}$	б)	$\sqrt[3]{8i}$
4.	а)	$(-1+i)^{20}$	б)	$\sqrt[3]{-27i}$
5.	а)	$\left(-1-\sqrt{3}\,i\right)^{18}$	б)	$\sqrt[4]{-16}$
6.	а)	$\left(-\sqrt{3}-i\right)^{6}$	б)	$\sqrt[4]{-81}$
7.	а)	$(-1-i)^6$	б)	$\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$
8.	а)	$\left(\sqrt{3}+3i\right)^{5}$	б)	$\sqrt[3]{-1}$
9.	а)	$(1+i)^5$	б)	$\sqrt{1-\sqrt{3}i}$
10.	а)	$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{6}$	б)	$\sqrt[3]{8}$

Завдання 4. Визначити та побудувати лінії, задані наступними рівняннями

1.	$\operatorname{Re}(2z+3)=\lvert z\rvert^2$	2.	$\operatorname{Im}\left(z^2+z\right)=2-\operatorname{Im}\bar{z}$
3.	$\operatorname{Re}(1-z)=\lvert z\rvert^2$	4.	$\lvert \mathrm{z}\rvert^2+2\operatorname{Im}\mathrm{z}=0$
5.	$z\cdot\bar{z}=2\operatorname{Re}\bar{z}$	6.	$(\mathrm{z}+1)(\bar{\mathrm{z}}\text{-}1)=2i\cdot\operatorname{Im}\bar{z}$
7.	$\lvert \mathrm{z}\rvert=3+\operatorname{Im}\bar{z}$	8.	$\operatorname{Re}\mathrm{z}^2+z\cdot\bar{z}=\operatorname{Im}z$
9.	$\lvert z-2\rvert=\sqrt{1-8\operatorname{Re}z}$	10.	$\operatorname{Im}\left(\dfrac{2}{z}\right)=1$

Завдання 5. Знайти та побудувати множину точок комплексної площини задану умовами:

1. $\begin{cases} 2 \le |z+2| < 3 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2 < |z+i| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2 < |z-1| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2 \le |z-2i| < 3 \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z \le \pi \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2 \le |z+1| < 3 \\ -\dfrac{\pi}{6} < \arg z \le \pi \end{cases}$

6. $\begin{cases} 1 < |z+3i| \le 2 \\ -\dfrac{7\pi}{12} < \arg z < -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} 1 < |z-2| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{12} \end{cases}$

8. $\begin{cases} 1 \le |z-3i| < 2 \\ \dfrac{5\pi}{12} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

9. $\begin{cases} 1 \le |z+2| < 3 \\ \dfrac{3\pi}{4} < \arg z \le \pi \end{cases}$

10. $\begin{cases} 1 < |z-i| \le 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Завдання 6. Обчислити задані функції, а для б) тільки головне значення

1.	а)	$\cos(2+4i)$	б)	$(1-i)^{i}$
2.	а)	$ch(4-i)$	б)	$(-1)^{(2-i)}$
3.	а)	$sh(5-2i)$	б)	$i^{(-1-i)}$
4.	а)	$\sin(5-3i)$	б)	$(1-i)^{2i}$
5.	а)	$\cos(3-5i)$	б)	$(-1)^{(1-2i)}$
6.	а)	$ch(5+3i)$	б)	$(-i)^{(2+i)}$
7.	а)	$sh(3+5i)$	б)	$(-1+i)^{3i}$
8.	а)	$\sin(6+i)$	б)	$(-1)^{1+2i}$
9.	а)	$\cos(1-6i)$	б)	$(-i)^{3i}$

10. а) $ch(1+6i)$ б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{i}$

Завдання 7. З′ясувати які з наведених функцій є аналітичними і в якій області.

1. а) $w=e^{\overline{z}}$ б) $w=\cos\left(z^2\right)$
2. а) $w=(1+2i)z^2$ б) $w=\overline{z}\,\mathrm{Im}\,z$
3. а) $w=|z|\cdot\overline{z}$ б) $w=e^{z^2}$
4. а) $w=z\cdot e^{z}$ б) $w=z\cdot\mathrm{Re}\,z$
5. а) $w=sh\overline{z}$ б) $w=(z-i)^2$
6. а) $w=z\cdot\mathrm{Im}\,\overline{z}$ б) $w=\dfrac{z-3}{1+i}$
7. а) $w=(z+3)^3$ б) $w=\dfrac{z}{|z|}$
8. а) $w=|z|\,\mathrm{Im}\,z$ б) $w=\sin(2z+i)$
9. а) $w=(2-i)z^3$ б) $w=\cos\overline{z}$
10. а) $w=\sin\overline{z}$ б) $w=e^{3z}$

Завдання 8. Поновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по відомій уявній або дійсній частині.

1. $v=x^2-y^2+2x-7$
2. $u=x^3-3xy^2-y+2$
3. $v=x^2-y^2+2x$
4. $u=x^3-3xy^2+1$
5. $v=3x^2y-y^3$
6. $u=x^3-3xy^2+2$
7. $v=y^2-x^2-y$
8. $u=x^2-y^2-2y$
9. $v=x+y+x^2-y^2$
10. $u=y^2-x^2+2y-7$

Завдання 9. Обчислити інтеграли

1. а) $\int\limits_L 5\overline{z}^{-2}\,dz$ де L: $y=x^2,\ 0\le x\le 2$

б) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}$ в) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{\cos z + z^2}{z^3} dz$

2. а) $\int\limits_L \left(2\bar{z} + \operatorname{Im} z^2\right) dz$ де L: $y = 3x,\ 0 \le x \le 1$

б) $\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz$ в) $\oint\limits_{|z-3|=3} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$

3. а) $\int\limits_L \left(z + \bar{z}\right) dz$ де L: $x = y^2,\ -1 \le y \le 1$

б) $\oint\limits_{|z-2i|=2,5} \frac{dz}{z(z^2+4)}$ в) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{1+\sin z}{z^2} dz$

4. а) $\int\limits_L \left(2\bar{z} + 1\right) dz$ де L: $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$

б) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos z dz}{z^2 - 4z}$ в) $\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}} dz}{(z+2i)^2}$

5. а) $\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$ де L: $y = -x,\ 0 \le y \le \pi$

б) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{zdz}{(z-4i)(z-i)}$ в) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz} dz}{(z-i)^2}$

6. а) $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz$ де L: $y = x^2,\ 0 \le y \le 2$

б) $\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{\ln z dz}{(z-4i)(z-i)}$ в) $\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{zdz}{(z-2i)^2(z+3i)}$

7. а) $\int\limits_L \left(1 + i + \bar{z}\right) dz$ де L: $y = x,\ 0 \le y \le 2$

б) $\oint\limits_{|z-3i|=1,5} \frac{\cos z dz}{(z-2i)(z-i)}$ в) $\oint\limits_{|z+2|=2} \frac{(z+1) dz}{(z+2)^3(z-3)}$

8. а) $\int\limits_L \left(\operatorname{Re} z - \bar{z}\right) dz$ де L: $y = x^2,\ 0 \le y \le 1$

б) $\oint\limits_{|z-i|=4} \frac{sh\frac{\pi z}{2}\,dz}{(z+4i)(z+i)}$ в) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{(z+1)dz}{(z-2)^3(z+4)}$

9. а) $\int\limits_L \left(\operatorname{Im} z^2 - \operatorname{Re}^2 z\right) dz$ де L: $y = \frac{1}{x},\ 1 \le x \le 3$

б) $\oint\limits_{|z-2i|=1,5} \frac{\ln\frac{z}{2}\,dz}{(z-2i)(z-i)}$ в) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{(z-1)dz}{(z-3)^3(z+3)}$

10. а) $\int\limits_L \left(\operatorname{Im}^2 z - z - \bar{z}\right) dz$ де L: $x = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right),\ -1 \le y \le 1$

б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{z^2+1}$ в) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos^2 z}{(z-2i)^3} dz$

Завдання 10. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{(i-2)n} \cdot z^n$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(4-3i)^{2n}}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2i) \cdot z^n$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (i-1)^n \cdot z^n$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n+3i)}$

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3+2i)^n \cdot z^n$

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\cos in) \cdot z^n$

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n}$

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sin(i\,n)}$

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{(3-i)\cdot n} z^n$

Завдання 11. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(z)$ по степенях z, використовуючи відомі розкладання функцій в ряд Тейлора.

1. $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$
2. $f(z)=\ln(2-z)$
3. $f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}$
4. $f(z)=\sin^2\dfrac{iz}{2}$
5. $f(z)=\ln(3+z)$
6. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$
7. $f(z)=\sin^2\dfrac{1}{z}$
8. $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$
9. $f(z)=\dfrac{z}{z^3-i}$
10. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$

Завдання 12. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степенях z в заданому кільці

1. $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-1)\cdot(z+2)}$ $\quad 1<|z|<2$
2. $f(z)=\dfrac{z-4}{(z-2)\cdot(z-3)}$ $\quad 2<|z|<3$
3. $f(z)=\dfrac{z-7}{(z+1)\cdot(z-3)}$ $\quad 1<|z|<3$
4. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ $\quad 0<|z|<1$
5. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$ $\quad 1<|z|<2$
6. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ $\quad 1<|z|<2$
7. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+9z}$ $\quad 0<|z|<3$

8.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}$	$2<\lvert z\rvert<3$
9.	$f(z)=\dfrac{3z-5}{(z+1)\cdot(z-3)}$	$1<\lvert z\rvert<3$
10.	$f(z)=\dfrac{3z-4}{(z+2)\cdot(z-3)}$	$2<\lvert z\rvert<3$

Завдання 13. З′ясувати характер особливих точок функції $f(z)$ і знайти лишки в цих точках

1.	а)	$\dfrac{e^{z-1}-1}{z-1}$	б)	$\dfrac{z^2+2}{z^3+z^2}$	в)	$z\cdot\cos\dfrac{1}{z}$
2.	а)	$\dfrac{\ln(1-z)}{z}$	б)	$\dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$	в)	$e^{\frac{1}{z+2}}$
3.	а)	$\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}$	б)	$\dfrac{z}{(z+1)^2(z-1)}$	в)	$z^3 ch\dfrac{1}{z}$
4.	а)	$\dfrac{1-e^{z^2}}{z^2}$	б)	$\dfrac{z-2}{z^3+3z^2}$	в)	$z^2 sh\dfrac{1}{z}$
5.	а)	$\dfrac{1-\cos z}{z^2}$	б)	$\dfrac{z+1}{(z-2)^2(z-1)}$	в)	$z\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$
6.	а)	$\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$	б)	$\dfrac{z+2}{z^3+4z^2}$	в)	$z^2\sin\dfrac{1}{z}$
7.	а)	$\dfrac{\sin^2 z}{z}$	б)	$\dfrac{z}{(z+1)\cdot(z+2)^2}$	в)	$(z-1)^3\cos\dfrac{1}{z-1}$
8.	а)	$\dfrac{sh(z+2)}{z+2}$	б)	$\dfrac{1}{(z-i)(z+1)^2}$	в)	$(z-2)^2 e^{-\frac{1}{z-2}}$
9.	а)	$\dfrac{\sin(2z+2)}{z+1}$	б)	$\dfrac{1}{z^3+2z^2}$	в)	$(z+i)^2\sin\dfrac{1}{z+i}$
10.	а)	$\dfrac{\ln(2+z)}{z+1}$	б)	$\dfrac{z+1}{(z-3)^2\cdot(z+2)}$	в)	$z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$

Завдання 14. Обчислити інтеграли за допомогою лишків

1. а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$ б) $\oint\limits_{|z-1|=1} (z-1)^2 \sin\frac{1}{z-1}\,dz$

2. а) $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{e^z dz}{(z+1)^4}$ б) $\oint\limits_{|z+1|=2} (z+2)^3 \cos\frac{1}{z+2}\,dz$

3. а) $\oint\limits_{|z-2i|=4} \frac{z^2 dz}{z^2+25}$ б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}\,dz$

4. а) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{e^{2z} dz}{z^2-1}$ б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}\,dz$

5. а) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{\sin \pi z}{z^2-z}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}\,dz$

6. а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z^2-z}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z+i|=2} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}\,dz$

7. а) $\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\sin(z+2)}{z^2+2z}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z-i|=1} (z-i)^3\, ch\frac{1}{z-i}\,dz$

8. а) $\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{1-\cos z}{z^3+2z^2}\,dz$ б) $\oint\limits_{|z|=3} (z+2i)e^{\frac{1}{(z+2i)^2}}\,dz$

9. а) $\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{z\,dz}{(z+2)^2(z-1)}$ б) $\oint\limits_{|z|=2} (z+i)^2 \sin\frac{1}{z+i}\,dz$

10. а) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\,dz}{z^2+4}$ б) $\oint\limits_{|z-1|=2} (z-1)^5 \sin\frac{1}{(z-1)^2}\,dz$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА
ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

2. ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ «ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ»

2.1 Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал

Оригіналом називається комплексна функція $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ дійсної змінної t, що задовольняє умовам:

1) $f(t)$– однозначна, кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними n-го порядку в інтервалі $(0;\infty)$;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

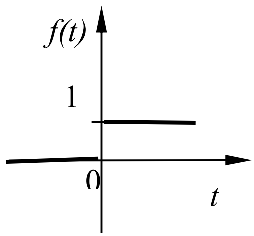
3) існують такі додатні числа M, s_0, що $|f(t)|\le M\,e^{s_0 t}$ для всіх $t>0$, тобто функція $f(t)$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція.

Число s_0, для якого умова 3) виконана при будь-якому $s=s_0+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ і не виконується при $s=s_0-\varepsilon$ (s_0 – точна нижня межа чисел s) називається ***показником зростання функції*** $f(t)$. Функції, які при $t\to 0$ є обмеженими, або задовольняють умові 3) називаються ***функціями експоненціального типу***.

Функції, що задовольняють умовам 1) – 3), утворюють ***клас оригіналів*** D.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хевісайда:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



Якщо довільна функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 1) і 3), то функція $\varphi(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ задовольняє всім умовам оригіналу.

Зображенням функції-оригіналу $f(t) \in D$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається інтегралом (***інтегральним перетворенням***) Лапласа:

$$F(p) == \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt .$$

Інтеграл існує і рівномірно збігається, якщо $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Співвідношення між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ символічно записується: $f(t) \doteqdot F(p)$ $f(t) \risingdotseq F(p)$.

2.2 Властивості перетворення Лапласа. Теореми.

Теорема єдності. Якщо $F(p)$ і $\Phi(p)$ – два зображення і вони співпадають, то будуть співпадати і їх оригінали в усіх точках їх неперервності.

Теорема про аналітичність зображення. Якщо $f(t) \in D$ **і** $f(t) \doteqdot F(p)$, то $F(p)$ **-** аналітична функція в області $\operatorname{Re} p > s_0$.

Лінійність. Якщо $f_1(t), f_2(t) \in D$ і $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \doteqdot \alpha F_1(p) + \beta F_2(p),$$

де α, β – будь-які комплексні сталі.

Диференціювання оригіналу. Якщо $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t) \in D$ і $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0), \quad f''(t) \doteqdot p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0) .$$

Інтегрування оригіналу. Якщо $f(t) \in D$ і $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p} .$$

Диференціювання зображення (множення оригіналу на аргумент). Якщо $f(t)\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$, то $t\cdot f(t)\doteqdot -\dfrac{dF(p)}{dp}$.

Наслідки:

$$1)\ t^n\cdot f(t)\doteqdot(-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n},$$

$$2)\ t^n\doteqdot\frac{n!}{p^{n+1}}\Leftrightarrow\frac{1}{p^n}\doteqdot\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}.$$

Інтегрування зображення (ділення оригіналу на аргумент). Якщо $\dfrac{f(t)}{t}\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$, то $\dfrac{f(t)}{t}\doteqdot\int\limits_p^{\infty}F(p)dp$.

Терема подібності (про зміну масштабу). Якщо $f(t)\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$, то для $\forall\alpha>0$

$$f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\doteqdot\alpha F(\alpha p)\text{ або } f(at)\doteqdot\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Теорема запізнення. Якщо $f(t)\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$ ($\alpha>0$), то

$$f(t-\alpha)\doteqdot e^{-\alpha p}F(p).$$

Теорема випередження. Якщо $f(t)\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$ ($\alpha>0$), то

$$f(t+\alpha)\doteqdot e^{\alpha p}\left[F(p)-\int\limits_0^{\alpha}f(t)e^{-pt}dt\right].$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t)\in D$ і $f(t)\doteqdot F(p)$, то

$$e^{-\alpha t}f(t)\doteqdot F(p+\alpha).$$

Теорема множення (теорема про згортку): Вираз $\int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau=f_1*f_2$ називають ***згорткою*** двох функцій. Якщо $f_1(t), f_2(t)\in D$ і $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$, $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$, то

$$f_1*f_2\doteqdot F_1(p)\cdot F_2(p).$$

***Наслідок (інтеграл Дюамеля)*:**

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteqdot f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= f_2(t) \cdot f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1'(t-\tau)\,d\tau .$$

Задача 16. Для заданої функції $f(t)$ знайти зображення $F(p)$ функції $f(t) \cdot \eta(t)$ за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

$$f(t) = 3 - te^t + \sin 2t .$$

Розв`язування.

За означенням

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(3 - te^t + \sin 2t\right) e^{-pt} dt =$$

$$= 3\int_0^\infty e^{-pdt} - \int_0^\infty t \cdot e^{(1-p)t} dt + \int_0^\infty e^{-pt} \sin 2t dt .$$

Обчислимо інтеграли:

а) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} \lim_{A\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^A = \frac{1}{p}$;

б) $\displaystyle\int_0^\infty te^{(1-p)} dt = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{t}{1-p} e^{(1-p)t}\Big|_0^A - \frac{1}{1-p} \int_0^A e^{(1-p)t} dt \right] =$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{t}{1-p} e^{(1-p)t}\Big|_0^A - \frac{1}{(1-p)^2} e^{(1-p)t}\Big|_0^A = \frac{1}{(p-1)^2} \right];$$

в) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-pt} \sin 2t dt = I$. Застосувавши формулу інтегрування частинами два рази, отримаємо:

$$I=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{p^2+4}\cdot e^{-pt}\left(p\sin 2t+2\cos 2t\right)\Big|_0^A\right)=\frac{2}{p^2+4}.$$

Отже: $F(p)=\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{(p-1)^2}+\dfrac{2}{p^2+4}$.

За таблицею: $3\cdot\eta(t)\doteqdot\dfrac{3}{p}$, $t\cdot e^t\eta(t)\doteqdot\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $\sin 2t\cdot\eta(t)\doteqdot\dfrac{2}{p^2+4}$.

Шукане зображення: $F(p)=\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{(p-1)^2}+\dfrac{2}{p^2+4}$.

Задача 17. Знайти зображення функції, користуючись теоремами про зображення та оригінали:

а) $sh(t+3)\cdot\eta(t+3)$, б) $t\cos 3t$, в) $\dfrac{ch2t-cht}{t}$, г) $e^{3t}\sin 2t$, д) $\int\limits_0^t \sin 2\tau d\tau$

Розв'язування.

а) $f(t)=sh(t+3)\cdot\eta(t+3)$. За таблицею $sh\,t\doteqdot\dfrac{1}{p^2-1}$.

Користуючись теоремою випередження, матимемо:

$$sh(t+3)\doteqdot e^{3p}\left(\frac{1}{p^2-1}-\int\limits_0^3 sh\,t\cdot e^{-pt}dt\right)=$$

$$=e^{3p}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(e^{(1-p)z}-e^{-(1+p)t}\right)dt\right)=$$

$$=e^{3p}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(1-p)t}}{1-p}+\frac{e^{-(1+p)t}}{1+p}\right)\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}\left(\frac{e^3}{p-1}-\frac{e^{-3}}{p+1}\right).$$

б) $f(t)=t\cdot\cos 3t$. За таблицею $\cos 3t\doteqdot\dfrac{p}{p^2+9}$. Згідно з теоремою про диференціювання зображення

$$t\cdot\cos 3t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+9}\right)=-\frac{p^2+9-2p^2}{\left(p^2+9\right)^2}=\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}\ .$$

в) $f(t)=\dfrac{ch\,2t-ch\,t}{t}$. Користуючись таблицею та властивістю лінійності знаходимо $ch\,2t-ch\,t \doteqdot \dfrac{p}{p^2-4}-\dfrac{p}{p^2-1}$. Отже за теоремою про інтегрування зображення маємо

$$\frac{ch\,2t-cht}{t}\doteqdot\int_0^{\infty}\left(\frac{p}{p^2-4}-\frac{p}{p^2-1}\right)dp=\frac{1}{2}\ln\left|p^2-4\right|\Big|_p^{\infty}-\frac{1}{2}\ln\left|p^2-1\right|\Big|_p^{\infty}=$$

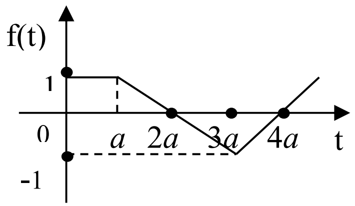
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{p^2-4}{p^2-1}\right|\Bigg|_p^{\infty}=\ln\sqrt{\frac{p^2-4}{p^2-1}}\ .$$

г) $f(t)=e^{3t}\cdot\sin 2t$ За таблицею $\sin 2t\doteqdot\dfrac{2}{p^2+4}$. Отже за теоремою зсуву $e^{3t}\sin 2\,t\doteqdot\dfrac{2}{(p-3)^2+4}$.

д) Для $\int\limits_0^t \sin 2\tau\, d\tau$ маємо $f(\tau)=\sin 2\tau$

За таблицею $\sin 2t\doteqdot\dfrac{2}{p^2+4}$, а за теоремою про інтегрування оригінала $\int\limits_0^t\sin 2\tau\,d\tau\doteqdot\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}$.

Задача 18. Знайти зображення кусково-неперервної функції, яка задана графічно



Розв’язування.
Задану функцію аналітично можна записати так:

$$f(t)=\begin{cases}0,\ t<0\\ 1,\ 0\le t<a\\ 1-\dfrac{t-a}{a},\ a\le t<3a\\ -1+\dfrac{t-3a}{a},\ t\ge 3a\end{cases}$$

За допомогою функції Хевісайда задана функція записується у вигляді

$$f(t)=[\eta(t)-\eta(t-a)]+\left(1-\frac{t-a}{a}\right)\cdot[\eta(t-a)-\eta(t-3a)]+\left(-1+\frac{t-3a}{a}\right)$$

$$\eta(t-3a)=\eta(t)+\left(-1+1-\frac{t-a}{a}\right)\eta(t-a)+\left(-1+\frac{t-a}{a}-1+\frac{t-3a}{a}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\eta(t-3a)=\eta(t)-\frac{t-a}{a}\eta(t-a)+\ 2\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a).$$

Користуючись теоремою запізнення, отримаємо функцію $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{p^2}e^{-ap}+\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{1}{p^2}e^{-3ap}$, яка є зображенням заданої функції $f(t)$.

2.3 Знаходження оригіналу по зображенню

Для знаходження оригіналу по зображенню у простих випадках необхідно скористатись таблицею зображень основних елементарних функцій.

Якщо $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то його розкладають на суму простих дробів і для кожного із них знаходять оригінали. В більш складних випадках користуються:

1) ***Формула Меліна.*** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $F(p)\to 0$ коли $|p|\to\infty$ рівномірно відносно аргументу p, та виконується умова: $\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|F(p)|dp < M$. Тоді

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\,dt.$$

2) ***Перша теорема розвинення.*** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в околі точки $p=\infty$ і $F(\infty)=0$. Розвинення функції $F(p)$ в ряд Лорана має вигляд: $F(p)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha_n}{p^{n+1}}$. Тоді її оригінал

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cdot\frac{t^n}{n!}.$$

3) ***Друга теорема розвинення.*** Нехай функція $F(p)$ є аналітичною в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $\lim\limits_{|p|\to\infty}F(p)=0$. Окрім того, $F(p)$ – дробово-раціональна функція, яка має полюси в точках $p_i\left(i=\overline{1,n}\right)$. Тоді її оригінал

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\underset{p=p_i}{res}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Зокрема, якщо всі p_i – прості полюси, а $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ і функції $A(p)$ і $B(p)$ не мають спільних нулів, то

$$F(p) \doteqdot f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot e^{p_i t}.$$

Задача 19. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$: а) $F(p) = \dfrac{2p+5}{p^2-2p+10}$; б) $F(p) = \dfrac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Розв`язування.

а) $F(p) = \dfrac{2p+5}{p^2-2p+10}$.

Застосуємо елементарні перетворення для розкладання цього дробу на суму простих дробів, оригінали яких відомі: виділимо повний квадрат у знаменнику дробу, а чисельник перетворимо згідно формул 11 і 12 (Таблиця 3.2):

$$\frac{2p+5}{p^2-2p+10} = \frac{2p+5}{(p-1)^2+3^2} = 2\frac{p+\frac{5}{2}-1+1}{(p-1)^2+3^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} + 2\frac{\frac{7}{2}}{(p-1)^2+3^2}.$$

За таблицею знаходимо

$$2\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2} \doteqdot 2e^t\cos 3t, \quad \frac{7}{(p-1)^2+3^2} \doteqdot \frac{7}{3}e^t \sin 2t.$$

Оригінал для заданої функції: $f(t) = e^t\left(2\cos 3t - \dfrac{7}{3}\sin 3t\right)$.

б) $F(p) = \dfrac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Розкладемо функцію $F(p)$ на суму простих дробів:

$$\frac{2p^2+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{A(p^2+1)+(Bp+c)(p-1)}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Коефіцієнти *A, B, C* знаходимо з тотожності:

$$2p^2+1 = A(p^2+1) + (Bp+C)(p-1).$$

$$\begin{array}{r|l} p=1 & 3=2A \Rightarrow A=3/2 \\ p^2 & 2=A+B \Rightarrow B=1/2 \\ p & 0=C-B \Rightarrow C=1/2 \end{array}$$

Тоді $F(p)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{p^2+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2+1}$.

За Таблицею 3.2 для кожного доданку знаходимо:

$$\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^t,\ \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t,\ \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$$

Оригінал для заданої функції: $f(t)=\frac{3}{2}e^t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$.

2.4 Розв`язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Необхідно розв’язати задачу Коші методом операційного числення: знайти частинний розв’язок диференціального рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_n=f(t)$$

при заданих початкових умовах

$$y(0)=y_0;\ y'(0)=y_{1,\ldots,}y^{(n-1)}(0)=y_{n-1},$$

де a_i – дійсні числа, $i=1,2,...,n$; y_j – дійсні числа, $j=0,1,...,n-1$.

Припустимо, що шукана функція $y(t)$, всі її похідні і функція $f(t)$ є оригіналами.

Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосовуємо теорему диференціювання оригінала.

$y(t) \risingdotseq Y(p)$,

$y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-y_0$,

$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-py_0-y_1$,

... … … … … … … … … … … … …

$y^{(n)}(t) \risingdotseq p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-\cdots-y^{(n-1)}=p^nY(p)-p^{n-1}y_0-\cdots-y_{n-1}$.

Для функції $f(t)$ зображення знаходимо за таблицею: $f(t) \risingdotseq F(p)$. Застосовуючи властивість лінійності зображення, переходимо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно невідомого зображення $Y(p)$. Матимемо

$$Q_n(p)\cdot Y(p)=F(p)+R_{n-1}(p),$$

де $Q_n(p)$ і $R_{n-1}(p)$ – алгебраїчні многочлени від p степеня n і $(n-1)$ відповідно:

$$Q_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_np,$$

$$R_{n-1}(p)=\left(p^{n-1}\cdot y_0+p^{n-2}y_1+\cdots+y_{n-1}\right)+$$

$$+a_1\left(p^{n-2}y_0+p^{n-3}y_1+\ldots+y_{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}y_0.$$

Розв’язуємо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p)=\frac{F(p)+R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

Оригінал $y(t)$, для якого $Y(p)$ є зображенням, і буде розв’язком заданого диференціального рівняння з початковими умовами.

Розглянемо цей метод для розв’язування задачі Коші ЛНДР–2. Маємо $y''+a_1y'+a_2y=f(t)$, де $a_1,a_2-const$, $f(t)$ – функція-оригінал, $y=y(t)$– невідома функція-оригінал. Необхідно знайти розв\`язок рівняння, який задовольняє початковим умовам: $y(0)=y_0, y'(0)=y'_0$.

Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$, $f(t)\doteqdot F(p)$. Для знаходження зображень похідних функції $y(t)$ застосуємо теорему диференціювання оригіналу:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=PY(p)-y_0,$$

$$y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-py_0-y'_0.$$

Перейдемо від диференціального рівняння оригіналів до алгебраїчного рівняння відносно зображення $Y(p)$:

$$p^2Y(p)-py_0-y'_0+a_1(pY(p)-y_0)+a_2Y(p)=F(p).$$

Розв\`яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно $Y(p)$:

$$Y(p)\left(p^2+a_1p+a_2\right)=F(p)+py_0+y'_0+a_1y_0;$$

$$Y(p)=\frac{F(p)+py_0+y'_0+a_1y_0}{p^2+a_1p+a_2}.$$

Отримали операторний розв`язок рівняння. По зображенню $Y(p)$ знаходимо оригінал $y(t)$, який є розв`язком задачі Коші.

Аналогічно розв’язуються системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і заданими початковими умовами.

Задача 20. Користуючись методом операційного числення, знайти розв’язок диференційного рівняння, який задовольняє початковим умовам:

а) $y'' + 2y' + 2y = te^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

б) $y'' + 4y = \sin 2t + 1$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

Розв’язування.

а) $y'' + 2y' + y = te^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Нехай розв’язок диференціального рівняння $y(t)$ має зображення $Y(p)$. Тоді, згідно з теоремою про зображення похідних матимемо:

$y(t) \doteqdot Y(p)$,

$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$,

$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1$.

Для функції $f(t) = te^t$ зображення знаходимо за таблицею:

$te^t \doteqdot \dfrac{1}{(p-1)^2}$. Отже зображення нашого диференціального рівняння буде наступне алгебраїчне рівняння:

$$p^2Y(p) - p + 1 + 2pY(p) - 2 + y(p) = \frac{1}{(p-1)^2},$$

розв’язавши яке, отримаємо зображення розв’язку диференціального рівняння.

$$Y(p)\cdot\left(p^2 + 2p + 1\right) = \frac{1}{(p-1)^2} + p + 1 \Rightarrow$$

$$Y(p)\cdot\left(p^2 + 2p + 1\right) = \frac{1 + (p-1)^2\cdot(p+1)}{(p-1)^2}.$$

$$Y(p)=\frac{1+\left(p^2-2p+1\right)\cdot(p+1)}{(p-1)^2\cdot(p+1)^2}=\frac{p^3-p^2-p+2}{(p-1)^2\cdot(p+1)^2}.$$

Розкладемо $Y(p)$ на суму простих дробів, виконавши дії аналогічні діям прикладу 19 б), отримаємо:

$$Y(p)=\frac{\frac{1}{4}}{(p-1)^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{p-1}+\frac{\frac{1}{4}}{(p+1)^2}+\frac{\frac{5}{4}}{p+1}$$

Користуючись Таблицею 3.2, отримаємо оригінали для кожного дробу. Застосовуючи властивість лінійності, отримаємо оригінал для $Y(p)$, який є розв'язком заданого диференціального рівняння:

$$y(t)=\frac{1}{4}te^t-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}te^{-t}+\frac{5}{4}e^{-t}.$$

б) $y''+4y=\sin 2t+1$, $y(0)=\frac{1}{4}$, $y'(0)=0$.

Розв'язуємо аналогічно прикладу а), а саме:

$$y(t)\doteqdot Y(p),$$

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)-y'(0)=pY(p)-\frac{1}{4},$$

$$y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-\frac{1}{4}p,$$

$$\sin 2t+1\doteqdot\frac{2}{p^2+4}+\frac{1}{p}=\frac{p^2+2p+4}{p\left(p^2+4\right)}.$$

Зображенням заданого диференціального рівняння є алгебраїчне рівняння

$$p^2Y(p)-\frac{1}{4}p+4Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p\left(p^2+4\right)},$$

$$Y(p)\left(p^2+4\right)=\frac{p^2+2p+4}{p\left(p^2+4\right)}+\frac{1}{4}p \quad \text{або}$$

$$Y(p)=\frac{p^4+8p^2+8p+16}{4p\left(p^2+4\right)^2}.$$

Розкладемо $Y(p)$ на суму простих дробів. Матимемо:

$$Y(p)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{8}{\left(p^2+4\right)^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{2}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

Користуючись Таблицею 3.2 і властивістю лінійності, отримаємо:

$$y(t)=\frac{1}{4}+\frac{\sin 2t-2t\cos 2t}{8}.$$

$y(t)$ є розв'язком заданого диференціального рівняння.

Задача 21. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x'=-x+3y \\ y'=x+y+e^{2t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=1 \end{cases}.$$

Розв'язування.

Нехай розв'язки систем $x(t)$ *і* $y(t)$ мають зображення $X(p)$ та $Y(p)$ відповідно. Тоді $x'(t)\doteqdot pX(p)-x'(0)=pX(p)-1$,

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y'(0)=pY(p)-1.$$

За таблицею $e^{2t}\doteqdot\dfrac{1}{p-2}$. Записуємо задану систему в зображеннях:

$$\begin{cases} pX(p)-1=-X(p)+3Y(p) \\ pY(p)-1=X(p)+Y(p)+\dfrac{1}{p-2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} pX(p)+X(p)-3Y(p)=1 \\ -X(p)+pY(p)-Y(p)=1+\dfrac{1}{p-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)\cdot(p+1)-3Y(p)=1 \\ -X(p)+Y(p)\cdot(p-1)=\dfrac{p-1}{p-2} \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему відносно $X(p)$ і $Y(p)$:

$$X(p)=\frac{p^2-1}{(p-2)^2\cdot(p+2)};\ Y(p)=\frac{p^2}{(p-2)^2(p+2)}.$$

Знайдемо оригінали для $X(p)$ і $Y(p)$, розкладаючи їх на суму простих дробів і застосовуючи таблицю та властивість лінійності. Матимемо

$$X(p)=\frac{\frac{3}{4}}{(p-2)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{p-2}+\frac{\frac{3}{4}}{p+2},\ Y(p)=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{p-2}+\frac{\frac{1}{4}}{p+2}$$

Розв’язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=\frac{3}{4}te^{2t}+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t} \\ y(t)=te^{2t}+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t} \end{cases}.$$

2.5 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Для заданої функції $f(t)$ знайти зображення $F(p)$ функції $f(t)\cdot\eta(t)$ за означенням (інтеграл Лапласа) та користуючись таблицею зображень, де $\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

1.	$f(t)=2e^{-t}+t$	2.	$f(t)=\cos 2t$
3.	$f(t)=2+3t$	4.	$f(t)=t\cdot e^{-2t}$
5.	$f(t)=t^2+2$	6.	$f(t)=2t+e^t$
7.	$f(t)=\sin 2t$	8.	$f(t)=t+1$
9.	$f(t)=2\cos t$	10.	$f(t)=t\cdot e^{-t}$

Завдання 2. Знайти зображення функцій, користуючись теоремами про зображення та оригінали.

1.	а)	$\sin(t-3)\cdot\eta(t-3)$	б)	$t\cdot ch\,2t$
	в)	$\frac{1-\cos t}{t}$	г)	$e^{2t}\cdot\sin t$
	д)	$\int_0^t \cos\tau\,d\tau$		
2.	а)	$(t-2)^3\cdot\eta(t-2)$	б)	$t\cdot\cos 2t$

в) $\dfrac{e^t - t}{t}$ г) $e^{-3t} \cdot ch2t$

д) $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$

3. а) $sh(t-4) \cdot \eta(t-4)$ б) $t \cdot \sin 3t$

в) $\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ г) $e^{3t} \cdot \cos t$

д) $\int_0^t ch2\tau \, d\tau$

4. а) $\cos(3t-3) \cdot \eta(t-1)$ б) $t \cdot sh4t$

в) $\dfrac{ch2t - cht}{t}$ г) $e^{-t} \cdot \sin 2t$

д) $\int_0^t \tau \cdot e^{-2\tau} d\tau$

5. а) $sh(5t-5) \cdot \eta(t-1)$ б) $t \cdot \cos 5t$

в) $\dfrac{sh2t - sht}{t}$ г) $e^{-2t} \cdot sh\,t$

д) $\int_0^t \sin 2\tau \, d\tau$

6. а) $(t-1)^2 \cdot \eta(t-1)$ б) $t \cdot \sin 5t$

в) $\dfrac{\cos 2t - \cos t}{t}$ г) $e^{-2t} \cdot t^2$

д) $\int_0^t \tau^3 d\tau$

7. а) $\cos(2t-4) \cdot \eta(t-2)$ б) $t \cdot \sin \dfrac{t}{2}$

в) $\dfrac{sh3t}{t}$ г) $e^{2t} \cdot ch2t$

д) $\int_0^t sh 8\tau \, d\tau$

8. а) $(t-3)^2 \cdot \eta(t-3)$ б) $t \cdot \cos 6t$

в) $\dfrac{e^{-3t} - t}{t}$ г) $e^{-4t} \cdot \sin 2t$

д) $\int_0^t \tau e^{-3\tau} d\tau$

9. а) $ch(2t-4) \cdot \eta(t-2)$ б) $t \cdot sh7t$

в) $\dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{t}$ г) $e^{-3t} \cdot t^3$

д) $\int_0^t \tau \sin 2\tau \, d\tau$

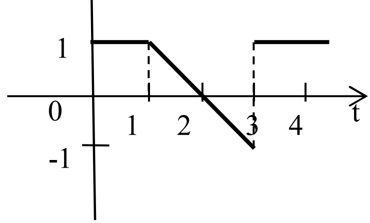
10. а) $(t-3)^2 \cdot \eta(t-3)$ б) $t \cdot \cos \dfrac{t}{2}$

в) $\dfrac{\sin 2t}{t}$ г) $e^{5t} \cdot t^4$

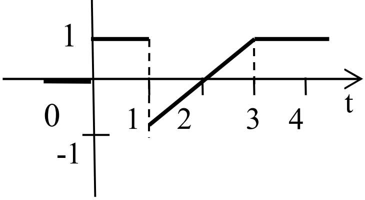
д) $\int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau \, d\tau$

Завдання 3. Знайти зображення кусково-неперервної функції, яка задана графічно.

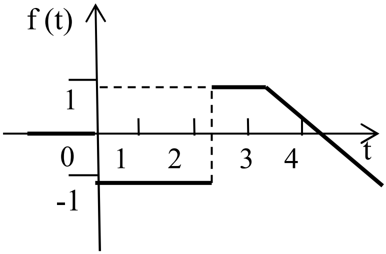
1



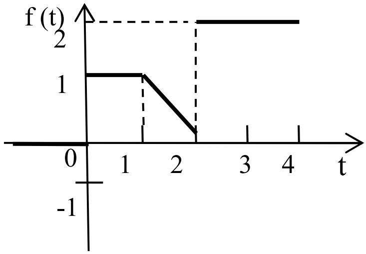
2



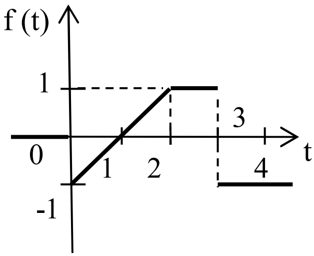
3


f (t)
1
0
1
2
3
4
t
-1

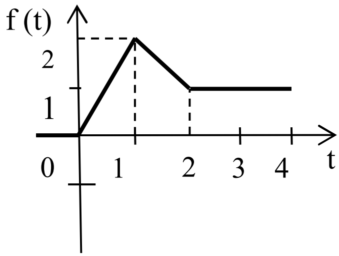
4


f (t)
2
1
0
1
2
3
4
t
-1

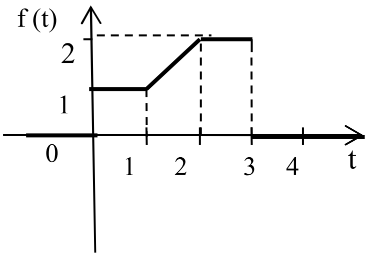
5


f (t)
1
3
0
1
2
4
t
-1

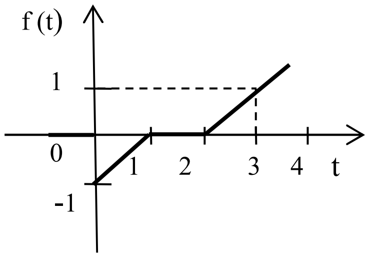
6


f (t)
2
1
0
1
2
3
4
t

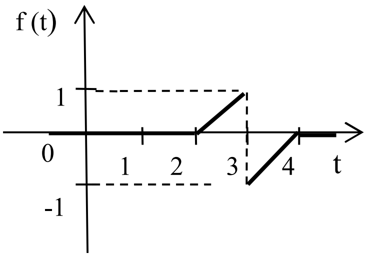
7


f (t)
2
1
0
1
2
3
4
t

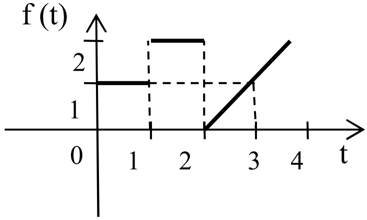
8


f (t)
1
0
1
2
3
4
t
-1

9


f (t)
1
0
1
2
3
4
t
-1

10


f (t)
2
1
0
1
2
3
4
t

Завдання 4. Знайти оригінал функції $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$.

1.	а)	$\dfrac{2p+3}{p^2+4p+13}$	б)	$\dfrac{25p}{(p+1)\cdot(p-4)^2}$
2.	а)	$\dfrac{p+3}{p^2+2p+3}$	б)	$\dfrac{p+2}{(p-2)^2\cdot(p^2-1)}$
3.	а)	$\dfrac{p+5}{p^2-2p+5}$	б)	$\dfrac{3p+64}{(p-8)^2p^3}$
4.	а)	$\dfrac{3p+2}{p^2-4p+13}$	б)	$\dfrac{2}{p^2(p^2+1)}$
5.	а)	$\dfrac{2p-3}{p^2+4p+8}$	б)	$\dfrac{p+1}{p^3-p^2-6p}$
6.	а)	$\dfrac{3p-1}{p^2-6p+13}$	б)	$\dfrac{2p-1}{p^3-4p^2+3p}$
7.	а)	$\dfrac{2p+5}{p^2+6p+13}$	б)	$\dfrac{2p+4}{(p-2)\cdot(p^2+4)}$
8.	а)	$\dfrac{3p-5}{p^2-4p+8}$	б)	$\dfrac{p+3}{(p-6)^2\cdot(p-1)^2}$
9.	а)	$\dfrac{2p+1}{p^2-6p+25}$	б)	$\dfrac{p+2}{(p^2+4)\cdot(p-5)}$
10.	а)	$\dfrac{2p-1}{p^2+6p+25}$	б)	$\dfrac{p+1}{(p^2+9)\cdot(p-4)^2}$

Завдання 5. Користуючись методом операційного числення, знайти розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам

1. $y'' + y' = t^2 + 2t$

   $y(0)=4\,;\ y'(0)=-2$

2. $y'' - 2y' - 3y = 2t$

   $y(0)=y'(0)=1$

3. $y'' + y = 6e^{-t}$

$y(0)=3$, $y'(0)=1$

4. $y'' + y' - 2y = -2(-t+1)$

$y(0)= \; y'(0)=1$

5. $y'' + 2y' = 2 + e^{t}$

$y(0)=1$, $y'(0)=2$

6. $y'' - 2y' - 3y = 2t$

$y(0)= \; y'(0)=1$

7. $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$

$y(0)=1$, $y'(0)=2$

8. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$

$y(0)=2$, $y'(0)=6$

9. $y'' - y = \cos 3t$

$y(0)= \; y'(0)=1$

10. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$

$y(0)=-3,\; y'(0)=2$

Завдання 6. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

1. а) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ $x(0)=3$, $y(0)=1$

б) $\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=0$

2. а) $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$ $x(0)=6$, $y(0)=0$

б) $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ $x(0)=1$, $y(0)=0$

3. а) $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=2$

б) $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t} \\ y' = y - 2x \end{cases}$ $x(0)=0$, $y(0)=0$

4. а) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=0$

б) $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 3y + 3e^{t} \end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=0$

5. а) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$ $x(0)=4$, $y(0)=4$

б) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y'(0)=0$

6. а) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$

		$x(0)=3\,,y(0)=2$		$x(0)=1\,,y(0)=2$
7.	а)	$\begin{cases} x'=5x+4y \\ y'=4x+5y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x'=y+t \\ y'=x+e^t \end{cases}$
		$x(0)=2,\,y(0)=0$		$x(0)=1\,,y(0)=0$
8.	а)	$\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x+3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x'=x+y-e^t \\ y'=3x-y \end{cases}$
		$x(0)=0\,,y(0)=-3$		$x(0)=0\,,y(0)=0$
9.	а)	$\begin{cases} x'=x+4y \\ y'=x+y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x'=y+e^t \\ y'=x+1 \end{cases}$
		$x(0)=4\,,y(0)=0$		$x(0)=1\,,y(0)=2$
10.	а)	$\begin{cases} x'=3x-2y \\ y'=2x+8y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x'=x+y+t \\ y'=-4x-3y+2t \end{cases}$
		$x(0)=1\,,y(0)=1$		$x(0)=0\,,y(0)=0$

3. Довідковий матеріал

Таблиця 3.1 – *Розвинення деяких функцій в ряд Тейлора з центром у точці* $z_0=0$.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\,,|z|<\infty;\,;$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!};\ |z|<\infty\,;$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |z|<\infty;$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1\,;$$

$$arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1;$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \ldots,\ |z|<1;$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1;$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|<1;$$

$$sh\,z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |z|<\infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!};\ |z|<\infty$$

Таблиця 3.2 – *Основні оригінали і їх зображення.*

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$	12.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
2.	$t^n\,(n=1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13.	$e^{\lambda t}sh\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
3.	$t^{\alpha}\,(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	14.	$e^{\lambda t}ch\,\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\omega^2}$
4.	$e^{\lambda t}\,(\lambda=a+bi)$	$\frac{1}{p-\lambda}$	15.	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
5.	$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	16.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$	№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
6.	$t^{\alpha}e^{\lambda t}(\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	17.	$t\, sh\,\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
7.	$\sin\omega t(\omega > 0)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	18.	$tch\,\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
8.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	19.	$\sin(t-\tau)$ $(\tau > 0)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p^2+1}$
9.	$sh\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	20.	$\cos(t-\tau)$	$\frac{pe^{-\tau p}}{p^2+1}$
10	$ch\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	21.	$t^n\sin\omega t$	$\frac{\mathrm{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$
11	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$	22.	$t^n\cos\omega t$	$\frac{\mathrm{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}n!$
23	$\frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3} \div \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$				

Література.

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн.: Кн. 2 Спеціальні розділи – 2-ге вид., перероб. і доп. / Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; За ред. Г. Л. Кулініча – К.: Либідь, 2003. – 368 с.
2. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 352 с. — ISBN 978-5-354-01425-5.
3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : Учеб. пособие для вузов: В 2-х ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М. : ОНИКС 21 век; Мир и Образование, 2002. — 416с. — ISBN 5-329-00327-X,5-94666-009-8 : 22.92.
4. Дубовик, В. П. Вища математика : Навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ : Вид-во А.С.К., 2003. — 648 с.
5. Краєвський В.О., Функції комплексної змінної: Навчальний посібник- Вінниця : ВНТУ, 2013.- 143 с.
6. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Учебное пособие. - М.: «Наука», 1981. -302 с.
7. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П.П. Овчинникова. - К.: Техніка, 2004. – 792 с.