представляющей ее в Украине, создан научно – инновационный центр по разработке и исследованию адаптивных систем управления. Кроме этого на базе центра производится изучение процессов технологического программирования фрезерной и токарной 3, 4, 5-осевой обработки деталей на станках с современными системами ЧПУ, а также изучение наладки, настройки, диагностики систем ЧПУ с системами измерения.

УДК 539.374.001.8

Чигиринский В.В., Бень А.Н.

(Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина)

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЛОЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основное количество известных решений в механике деформированного тела не позволяют рассматривать комплексное решение, связанного с определением одновременно как напряженного, так и деформированного состояния металла. Рассматриваются решения только для определения напряженного или деформированного состояния и при этом поля напряжений и деформаций чаще всего не связаны друг с другом. Это не позволяет получать аналитическим путем математическую модель пластической среды. Возникают проблемы, которые не позволяют получить однозначную связь полей напряжений и деформаций.

В этом плане ценным является то, что предложенные решения расширяют возможность удовлетворения граничных и очевидных условий, как по напряжениям, так и по деформациям в очаге деформации.

Вложенные гармонические функции определяют более общее решение задачи теории пластичности в напряжениях и в деформациях. Решая замкнутую плоскую задачу теории пластичности, имеем два уравнения равновесия, условие пластичности, условие несжимаемости, условие неразрывности скоростей деформаций, уравнения связи и граничные условия в напряжениях или в деформациях.

Представляет интерес решение задачи с вложенными гармоническими функциями для скоростей деформаций. Для этого используются условия неразрывности скоростей деформаций и условия несжимаемости.

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\gamma'_{xy}\right) \qquad (1)$$

$$\xi_x+\xi_y=0$$

Используя подстановку вида

$\gamma'_{xy}=C_\xi \cdot \exp\theta \cdot \sin B\Phi$,

где θ – показатель экспоненциальной функции, определяющий поле скоростей деформаций, $B\Phi$ – аргумент тригонометрической функции, определяющий поле скоростей деформаций.

получаем $$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\xi_x \cdot tgB\Phi\right),$$

где $$\xi_x=C_\xi \cdot \exp\theta \cdot \cos B\Phi .$$

Подставляя последние соотношения в уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций (1) получаем

$$\cos B\Phi \cdot \left[-\left(\theta_x+B\Phi_y\right)^2+\left(\theta_y-B\Phi_x\right)^2+\theta_{yy}-\theta_{xx}-2\cdot B\Phi_{xy}\right]+$$
$$+\sin B\Phi \cdot \left[2\cdot\left(B\Phi_y+\theta_x\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(B\Phi_x-\theta_y\right)+B\Phi_{xx}-B\Phi_{yy}-2\cdot\theta_{xy}\right]=0 \qquad (2)$$

Используя гармонические функции, появляется два условия Коши-Римана $\theta_{xx}+\theta_{yy}=0$, $B\Phi_{xx}+B\Phi_{yy}=0$, которые превращают обобщенное уравнение неразрывности скоростей деформаций в тождество.

Результат можно обобщить, рассматривая решения дифференциального уравнения (2) в более общем виде

$$\theta=\left[C_1\cdot\exp\theta'-C_2\cdot\exp\left(-\theta'\right)\right]\cdot\left[C_3\cdot\cos B\Phi'-C_4\cdot\sin B\Phi'\right]$$

$$B\Phi=\left[C_1\cdot\exp\theta'+C_2\cdot\exp\left(-\theta'\right)\right]\cdot\left[C_3\cdot\cos B\Phi'+C_4\cdot\sin B\Phi'\right]$$

После подстановки производных функций $B\Phi$ и θ по x и y дифференциальное уравнение (2) принимает вид:

$$
\cos B\Phi\cdot\Big\{-\big[L_1\cdot R_2\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)+L_2\cdot R_1\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)\big]^2+\big[L_1\cdot R_2\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)-
$$

$$
-L_2\cdot R_1\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)\big]^2+L_2\cdot R_2\cdot\left[\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)^2-\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)^2\right]-2\cdot L_1\cdot R_1\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)\cdot
$$

$$
\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)+L_1\cdot R_2\cdot\left(\theta'_{yy}-\theta'_{xx}-2\cdot B\Phi'_{xy}\right)+L_2\cdot R_1\cdot\left(B\Phi'_{xx}-B\Phi'_{yy}-2\cdot\theta'_{xy}\right)\Big\}+
$$

$$
+\sin B\Phi\cdot\Big\{2\cdot\big[L_2\cdot R_1\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)+L_1\cdot R_2\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)\big]\cdot\big[L_2\cdot R_1\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)-
$$

$$
-L_1\cdot R_2\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)\big]+L_1\cdot R_1\cdot\left[\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)^2-\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)^2\right]-2\cdot L_2\cdot R_2\cdot\left(\theta'_x+B\Phi'_y\right)\cdot
$$

$$
\cdot\left(\theta'_y-B\Phi'_x\right)+L_1\cdot R_2\cdot\left(B\Phi'_{xx}-B\Phi'_{yy}-2\cdot\theta'_{xy}\right)+
$$

$$
+L_2\cdot R_1\cdot\left(\theta'_{xx}-\theta'_{yy}+2\cdot B\Phi'_{xy}\right)\Big\}=0\,, \tag{3}
$$

где $L_1=C_1\cdot\exp\theta'+C_2\cdot\exp\left(-\theta'\right)$ $\qquad L_2=C_1\cdot\exp\theta'-C_2\cdot\exp\left(-\theta'\right)$

$R_1=C_3\cdot\cos B\Phi'+C_4\cdot\sin B\Phi'$ $\qquad R_2=C_3\cdot\cos B\Phi'-C_4\cdot\sin B\Phi'$

Преобразованное обобщенное уравнение равновесия (3) удовлетворяется при условии:

$$
\theta'_x=-B\Phi'_y \qquad \theta'_y=B\Phi'_x
$$

$$
\theta'_{xx}=-B\Phi'_{xy} \qquad \theta'_{yy}=B\Phi'_{xy} \tag{4}
$$

Соотношения (4) превращают операторы в круглых скобках в выражении (3) равными нулю, т.е. уравнение равновесия тождественно удовлетворено.

В случае использования вложенных гармонических функций расширяется диапазон применения аналитических решений при удовлетворении граничных и очевидных условий в очаге деформации.

Таким образом, получено частное решение плоской задачи теории пластичности в деформациях, которые находятся в соответствии с решениями в напряжениях за счет использования вложенных гармонических функций. Результат в этом случае является более приемлемым для удовлетворения граничных и очевидных условий очага деформации различных процессов ОМД. Аргументы экспоненциальной и тригонометрической функций θ и $A\Phi$ могут использовать построения вида $\exp\theta'\cdot\cos A\Phi'$ и $\exp\theta'\cdot\sin A\Phi'$.