

В.В. Чигиринский, д-р техн.наук, проф., А.Я. Качан, д-р техн.наук, проф.,  
А.Н. Бень, инж.  
Запорожский национальный технический университет, г.Запорожье, Украина

## ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ. МОДЕЛЬ СЛОЖНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

*Отримано замкнене рішення плошкої задачі узагальненої теорії пластичності. Теоретично визначено модель складного пластичного середовища. Показано рішення з використанням деформаційної теорії і теорії пластичного плину. Проведено аналіз рішення задачі для простого середовища, що зміцнюється.*

*It is received closed decision of the flat problem generalized theories of plasticity. Theoretically model of the complex plastic ambience is determined. Decisions are shown with use strain theories and theories of the plastic current. The organized analysis of the decision of the problem for simple hardening ambiences.*

**Введение.** На базе замкнутого решения плоской задачи теории пластичности предложен новый метод, который отличает упрощение анализа напряженно-деформированного состояния среды и получение теоретического выхода на ее механические характеристики через параметры процесса.

**Постановка задачи.** Известно замкнутое решение плоской задачи теории пластичности в аналитическом виде для упрочняющейся среды [1]. Показана сложная модель упрочняющейся пластической среды, базирующейся на том, что сопротивление пластической деформации на сдвиг  $k$  есть функция координат очага деформации. В связи с этим появляется возможность анализа новых подходов к решению задач, включая разработку обобщенной теории пластичности. Помимо исходных уравнений, уравнений равновесия, условия пластичности, уравнения несжимаемости для скоростей деформаций и деформаций, уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций, постановка задачи включает:

-уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

-условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2;$$

-уравнения связи для скоростей деформаций и деформаций

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F_1; \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = F_2; \quad (1)$$

-уравнения несжимаемости для скоростей деформаций и деформаций

$$\xi_x + \xi_y = 0; \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0;$$

-уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x};$$

-уравнение теплопроводности

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Модель сложной пластической среды

$$T_i = \chi \cdot (H_i)^{m_1} \cdot (\Gamma_i)^{m_2} \cdot (T)^{m_3}. \quad (2)$$

В систему (1) включены уравнения деформационной теории пластичности и теории течения. Кроме этого добавлено уравнение теплопроводности [2]. Модель (2) - это реальная упрочняющаяся среда.

Границные условия для напряжений [3]

$$\tau_n = -T_i \cdot \sin[A\Phi - 2\alpha], \quad T_i = k$$

$$\text{или } \tau_n = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \right). \quad (3)$$

Дополнительные условия заданы контактными удельными силами трения (3), изменяющимися по синусоидальному закону с деформационным и скоростным упрочнением. Все интенсивности и температура зависят от координат очага деформации.

**Решение задачи.** Для получения модели (2) рассмотрим три уравнения второго порядка в частных производных, неоднородных, гиперболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}, \\ \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{1}{F_1} \cdot \xi_x, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} &= 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_x \end{aligned} \quad (4)$$

Границным условиям вида (3) соответствует подстановка вида  $\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi$ . Рассматривается сложная зависимость от координат, т.е.  $k = f(\Gamma_i, H_i, T, x, y)$ . При этом  $k = C_\sigma \cdot \exp \theta'$ , где  $\theta' = f(\Gamma_i, H_i, T, x, y)$ ,  $\Gamma_i, H_i, T$  – интенсивности деформаций, скоростей деформаций и температур.

Производные в данном случае необходимо брать как от сложной функции [4] и после подстановки в первое уравнение (3) получим

$$\begin{aligned} &\left\{ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_e \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x)_x + \left[ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_e \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x) + A\Phi_y \right]^2 - (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y)_y - \right. \\ &\left. - \left[ (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y) - A\Phi_x \right]^2 + 2A\Phi_{xy} \right\} \cdot \sin(A\Phi) + \left\{ 2 \cdot \left[ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_e \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x) + A\Phi_y \right] \right. \\ &\left. - 2 \cdot \left[ (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y) - A\Phi_x \right] \right\} \cdot \cos(A\Phi) \end{aligned}$$

$$\cdot \left[ A\Phi_x - (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y) \right] + A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy} - 2 \cdot (\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_{ne} \cdot H_{xy} + \theta'_{et} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_{et} \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_{tt} \cdot T_{xy}) \} \cdot \cos(A\Phi) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) тождественно равно нулю, если выражения, стоящие в квадратных скобках равны нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \theta'_n \cdot H_x + \theta'_e \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x &= -A\Phi_y, \quad \theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y = A\Phi_x, \\ (\theta'_n \cdot H_x + \theta'_e \cdot \Gamma_x + \theta'_t \cdot T_x)_x &= -A\Phi_{yx}, \quad (\theta'_n \cdot H_y + \theta'_e \cdot \Gamma_y + \theta'_t \cdot T_y)_y = A\Phi_{xy}, \\ A\Phi_{yy} &= -(\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_{ne} \cdot H_{xy} + \theta'_{et} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_{et} \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_{tt} \cdot T_{xy}), \\ A\Phi_{xx} &= (\theta'_{nn} \cdot H_x \cdot H_y + \theta'_{ne} \cdot H_{xy} + \theta'_{et} \cdot \Gamma_x \cdot \Gamma_y + \theta'_{et} \cdot \Gamma_{xy} + \theta'_{tt} \cdot T_x \cdot T_y + \theta'_{tt} \cdot T_{xy}), \end{aligned}$$

Операции над сложной функцией позволяют показатель экспоненты определить как сумму трех функций, учитывающую влияние степени, скорости деформации и температуры, действительно

$$\theta' = -A\theta = \theta'_1 + \theta'_2 + \theta'_3 = -(A_1'\theta + A_2'\theta + A_3'\theta).$$

Сопротивление сдвигу и составляющие тензора напряжений

$$\begin{aligned} \kappa &= C_\sigma \cdot \exp(-A_1'\theta) \cdot \exp(-A_2'\theta) \cdot \exp(-A_3'\theta), \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp(-A_1'\theta) \cdot \exp(-A_2'\theta) \cdot \exp(-A_3'\theta) \cdot \sin(A\Phi), \quad (6) \\ \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(-A_1'\theta) \cdot \exp(-A_2'\theta) \cdot \exp(-A_3'\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(-A_1'\theta) \cdot \exp(-A_2'\theta) \cdot \exp(-A_3'\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C \\ \text{при } \theta'_x &= (\theta'_1)_x + (\theta'_2)_x + (\theta'_3)_x = -A\Phi_y, \\ \theta'_y &= (\theta'_1)_y + (\theta'_2)_y + (\theta'_3)_y = A\Phi_x. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение связи значения напряжений, получим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = ctg A\Phi; \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = ctg B_1\Phi$$

$$ctg A\Phi = ctg B_1\Phi = F_1,$$

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = ctg B_2\Phi,$$

$$ctg A\Phi = ctg B_2\Phi = F_2.$$

Это, позволяет установить связь между сдвигами и линейными показателями скоростей деформаций и деформаций. С учетом уравнений несжимаемости имеем

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \xi_x = 2 \cdot \xi_x \cdot \operatorname{tg} B_1 \Phi, \quad \gamma_{xy} = 2 \cdot \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_x = 2 \cdot \varepsilon_x \cdot \operatorname{tg} B_2 \Phi$$

С целью упрощений имеем

$$\xi_x = C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi; \quad \varepsilon_x = C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi.$$

Подставляя последние соотношения в уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций (1) или (4) получаем

$$\begin{aligned} & \left[ -\theta_{1xx}'' - (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_y)^2 + \theta_{1yy}'' + (\theta_{1y}'' - B_1 \Phi_x) \right] \cdot \sin B_1 \Phi + \left[ 2 \cdot (B_1 \Phi_x - \theta_{1y}'') \cdot (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_y) + \right. \\ & \left. + (B_1 \Phi_{xx} - B_1 \Phi_{yy}) \right] \cdot \cos B_1 \Phi = 2 \cdot B_1 \Phi_{xy} \cdot \sin B_1 \Phi + 2 \cdot \theta_{1xy}'' \cdot \cos B_1 \Phi, \end{aligned} \quad (7)$$

также

$$\begin{aligned} & \left[ -\theta_{2xx}'' - (\theta_{2x}'' + B_2 \Phi_y)^2 + \theta_{2yy}'' + (\theta_{2y}'' - B_2 \Phi_x) \right] \cdot \sin B_2 \Phi + \left[ 2 \cdot (B_2 \Phi_x - \theta_{2y}'') \cdot (\theta_{2x}'' + B_2 \Phi_y) + \right. \\ & \left. + (B_2 \Phi_{xx} - B_2 \Phi_{yy}) \right] \cdot \cos B_2 \Phi = 2 \cdot B_2 \Phi_{xy} \cdot \sin B_2 \Phi + 2 \cdot \theta_{2xy}'' \cdot \cos B_2 \Phi, \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнениях (7) и (8), появляются аналогичные скобки, как и в (5). При условии

$$(\theta_1'')_x = -B_1 \Phi_y, \quad (\theta_1'')_y = -B_1 \Phi_x, \quad (\theta_2'')_x = -B_2 \Phi_y, \quad (\theta_2'')_y = B_2 \Phi_x,$$

уравнения превращаются в тождества, где  $\theta_1'' = -B_1 \theta$ ,  $\theta_2'' = -B_2 \theta$  – показатели экспонент функций, определяющих поля скоростей деформаций и деформаций,  $B_1 \Phi$  и  $B_2 \Phi$  – аргументы тригонометрических функций, определяющие поля скоростей деформаций и деформации.

Выражения для скоростей деформаций и деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_x = -\xi_y &= C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta) \cdot \cos B_1 \Phi, \\ \gamma_{xy} &= C_\xi \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1 \Phi = C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta) \cdot \sin B_1 \Phi, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} H_i &= 2 \cdot C_\xi \cdot \exp \theta_1'' = 2 \cdot C_\xi \cdot \exp(-B_1 \theta) \\ \varepsilon_x = -\varepsilon_y &= C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta) \cdot \cos B_2 \Phi, \\ \gamma_{xy} &= C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi = C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta) \cdot \sin B_2 \Phi, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Gamma_i = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp \theta_2'' = 2 \cdot C_\varepsilon \cdot \exp(-B_2 \theta)$$

$$\text{при } (\theta_1'')_y = B_1 \Phi_x, \quad (\theta_1'')_x = -B_1 \Phi_y, \quad (\theta_2'')_y = B_2 \Phi_x, \quad (\theta_2'')_x = -B_2 \Phi_y.$$

Сопоставляя формулы (9), (10) и (7), убеждаемся, что во всех выражениях присутствуют функциональные зависимости от координат  $\theta$  и  $\Phi$  (показатели экспонент и аргументы тригонометрических функций).

Представляет интерес получение в решении для поля температур аналогичных зависимостей, что позволило бы замкнуть эту задачу теоретически. Рассмотрим дифференциальное уравнение для стационарного температурного поля

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае решение ищем в виде

$$T = C_T \cdot \exp(\theta_3'') \cdot (\sin B_3 \Phi + \cos B_3 \Phi), \quad (11)$$

при  $(\theta_3'')_x = -B_3 \Phi_y$ ,  $(\theta_3'')_y = B_3 \Phi_x$ .

Покажем, что выражение (11) является решением уравнения Лапласа. Подставив производные от (11) в уравнение теплопроводности, после упрощений, получим

$$\begin{aligned} & \left[ (\theta_3'')_{xx} + [(\theta_3'')_x + B_3 \Phi_y] \cdot [(\theta_3'')_x - B_3 \Phi_y] + (\theta_3'')_{yy} + [(\theta_3'')_y + B_3 \Phi_x] \cdot [(\theta_3'')_y - B_3 \Phi_x] \right] \cdot (\sin B_3 \Phi + \\ & + \cos B_3 \Phi) + \left[ 2 \cdot (\theta_3'')_x \cdot B_3 \Phi_x + B_3 \Phi_{xx} + 2 \cdot (\theta_3'')_y \cdot B_3 \Phi_y + B_3 \Phi_{yy} \right] \cdot \\ & \cdot (\cos B_3 \Phi - \sin B_3 \Phi) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Скобки  $[(\theta_3'')_x + B_3 \Phi_y]$ ,  $[(\theta_3'')_y - B_3 \Phi_x]$  в уравнении (12) при их равенстве нулю устанавливают связь вида

$$(\theta_3'')_{xx} = -B_3 \Phi_{yx}, \quad (\theta_3'')_{yy} = B_3 \Phi_{xy}, \quad B_3 \Phi_{xx} = (\theta_3'')_{yx}, \quad B_3 \Phi_{yy} = (\theta_3'')_{xy}.$$

Последние соотношения соответствуют условию Коши-Римана. Они являются теми функциями, которые определяются уравнением Лапласа, что и соответствует (11).

Сопоставляя решения (7)...(11) (условия, накладываемые на функции) приходим к выводу, что  $\theta_3'' = -B_3 \theta$  для напряженного и деформированного состояний и поля температур. Из этого можно определить общую параметрическую функцию, которая входит в поля напряжений, деформаций, скоростей деформаций и температур, и математически выразить друг через друга. Таким образом,

$$\exp(-\theta) = \left( \frac{H_i}{2 \cdot C_\xi} \right)^{\frac{1}{B_1}} = \left( \frac{\Gamma_i}{2 \cdot C_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{B_2}} = \left( \frac{T}{C_T \cdot (\sin B_3 \Phi + \cos B_3 \Phi)} \right)^{\frac{1}{B_3}}.$$

Подставляя в выражение для сопротивления деформации, получим

$$T_i = \chi \cdot (H_i)^{\frac{A_1}{B_1}} \cdot (\Gamma_i)^{\frac{A_2}{B_2}} \cdot (T'')^{\frac{A_3}{B_3}}. \quad (13)$$

Выражение (13) по своей форме соответствует зависимости напряжения текучести от скорости, степени деформации и температуры, представленной в работах [1].

**Анализ полученных результатов.** Для анализа полученного результата использовали выражения (6) для изучения напряженного состояния пластической среды при плоской осадке на шероховатых плитах.

Если задачу привести к более простой математической модели ( $A_2 = A_3 = 0$ ), то выражения (6) соответствуют решениям [5]

$$\begin{aligned}\kappa &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta), \\ \tau_{xy} &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \sin(A\Phi), \\ \sigma_x &= C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_\sigma \cdot \exp(-A'_1\theta) \cdot \cos(A\Phi) + \sigma_0 + f(x) + C,\end{aligned}\quad (14)$$

Из условия пластичности  $\sigma_0 = -2 \cdot k \cdot \cos A\Phi$ ,  $C = k_0$ . Функции  $A\Phi$  и  $\theta$  гармонические. Из уравнения Лапласа и соотношений Коши-Римана получили выражения для определения указанных функций в виде координатного полинома.

$$\begin{aligned}A\Phi &= AA_6 \cdot x \cdot y - AA_{13} \cdot x \cdot y \cdot (x^2 - y^2), \\ \theta' &= -\left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) - AA_{13} \cdot [0.25 \cdot (x^4 + y^4) - 1.5 \cdot x^2 \cdot y^2] \right\}.\end{aligned}$$

В выражениях постоянные величины определялись из реальных граничных условий

$$\begin{aligned}AA_6 &= 4 \cdot \frac{\psi_0}{l \cdot h}, \quad AA_{13} = 16 \cdot \psi_1 \cdot \frac{l - 2 \cdot h}{l^3 \cdot h \cdot (l + h)}, \\ \psi_0 &= \operatorname{arctg}[2 \cdot f \cdot (1 - f)], \quad \psi_1 = \operatorname{arctg}[1.7 \cdot f \cdot (1 - f)],\end{aligned}$$

где  $l$  и  $h$  – длина, и высота очага деформации при осадке полосы,

$f$  – коэффициент трения,

$k_0$  – сопротивление сдвигу в начале очага деформации на контакте.

При этом коэффициент

$$\begin{aligned}C_\sigma &= \frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp(-\theta'_0), \\ A\Phi_0 &= AA_6 \cdot \frac{l \cdot h}{4} - AA_{13} \cdot \frac{l \cdot h}{4} \cdot \left( \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right), \\ \theta'_0 &= -A\theta_0 = -\left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot \left( \frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) - AA_{13} \cdot \left[ 0.25 \cdot \left( \frac{l^4}{16} + \frac{h^4}{16} \right) - 1.5 \cdot \frac{l^2 \cdot h^2}{16} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Подставляя в (14) компоненты тензора напряжений, имеем

$$\sigma_x = -k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \cos A\Phi + k_0,$$

$$\sigma_y = -3 \cdot k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \cos A\Phi + k_0, \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \sin A\Phi.$$

Результаты расчета по формулам (15) приведены на рис 1...4.

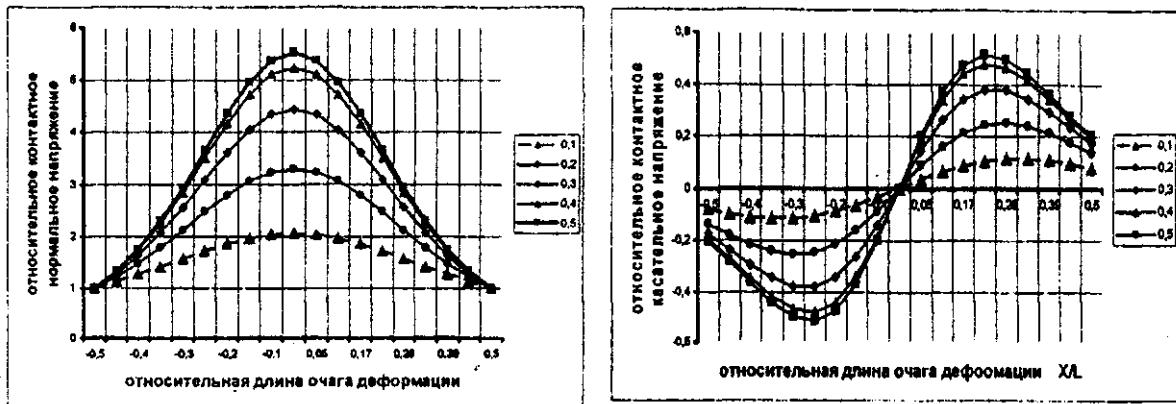


Рис.1. Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках  $\frac{l}{h} = 8$ ,  $f = 0,1 \dots 0,5$

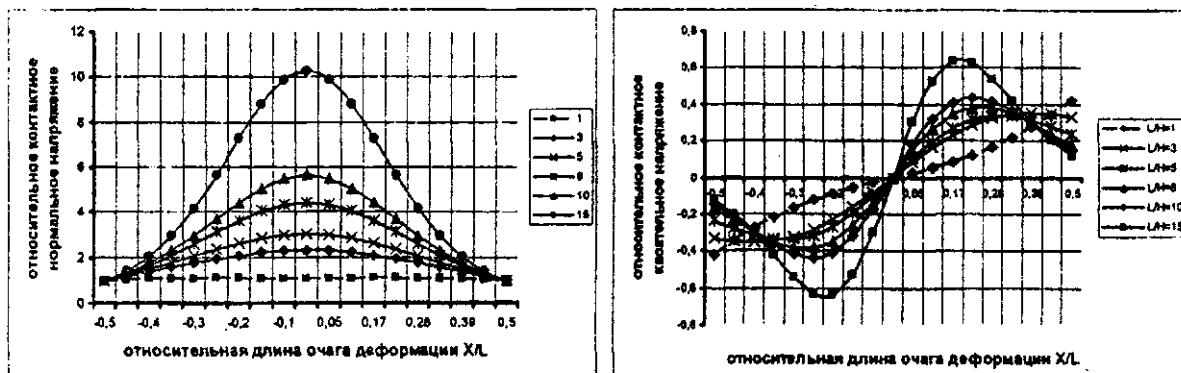


Рис.2. Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках  $f = 0,3$ ,  $\frac{l}{h} = 1 \dots 15$

Показано, что распределение контактных напряжений реагирует на фактор формы очага деформации  $\frac{l}{h}$  и коэффициент трения  $f$ . Относительные нормальные напряжения  $\sigma_y/2k_0$ , относительные касательные напряжения  $\tau_{xy}/k_0$ . Результаты расчетов совпадают с реальными эпюрами контактных напряжений [6]. Следует подчеркнуть, что выражения (15) едины для всего очага деформации и нет необходимости разбивать его на отдельные зоны контактного трения [7]. На рис.5, 6 представлено распределение напряжений в очаге деформации, которые также реагируют на фактор формы и коэффициент трения.

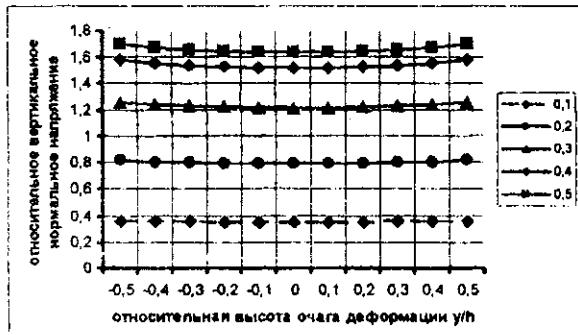


Рис.3. Распределение нормальных напряжений по высоте полосы при осадке на шероховатых бойках  $l/h = 8$ ,  $f = 0,1 \dots 0,5$

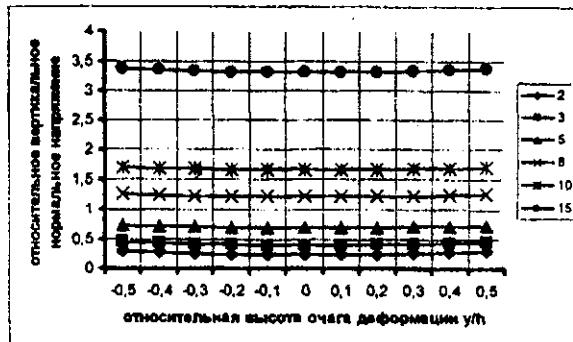


Рис.4. Распределение нормальных напряжений по высоте полосы при осадке на шероховатых бойках  $f = 0,3$ ,  $l/h = 1 \dots 15$

Полученные результаты качественно и количественно отражают общие закономерности распределения полей тензора напряжений по всему очагу деформации. В полной мере удовлетворяют граничным условиям. Предложенная методика и, в частности выражения (15) могут быть рекомендованы для расчетов разнообразных прикладных задач.

Показано, что предложенная сложная модель пластической среды, базирующаяся на замкнутом решении, может служить некоторым обобщением для создания теории пластичности, соединяющей деформационную теорию и теорию пластического течения.

#### Список литературы

1. Chygryns'kyj, V.V. Analysis of the State of Stress of a Medium under Conditions of Inhomogeneous Plastic Flow [Текст] / V.V. Chygryns'kyj, I. Mamuzic, G.V. Bergeman // Metalurgija. Zagreb. - 2004. - vol. 43, br. 2. - P. 87 - 93.
2. Тихонюк, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонюк, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. -735 с
3. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н. Малинин. - М.: Машиностроение, 1975. - 399 с.
4. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов. - М.: Наука, 1969. - 419 с.
5. Аркулис, Г.Э. Теория пластичности [Текст] / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид. - М.: Металлургия, 1987. -251 с.
6. Чекмарев, А.П. Экспериментальное исследование удельных давлений на контактной поверхности при прокатке в калибрах [Текст] / А.П. Чекмарев, П.Л. Клименко // Обработка металлов давлением: Сб. тр. Днепропетровского металлургического ин-та. - Харьков - М., 1960. - Вып. 39.
7. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением [Текст] / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. - М.: Машиностроение, 1977. - 422 с.