

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ЛЕКЦІЇ З ФІЗИКИ

(Окремі розділи)

Для студентів комп'ютерної спеціальності
121 «Інженерія програмного забезпечення»
денної форми навчання

ЗАПОРІЖЖЯ
2019

Лекції з фізики (Окремі розділи). Для студентів комп'ютерної спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» денної форми навчання./Укладач: В.К.Манько.- Запоріжжя: ЗНТУ, 2019.- 119 с.

Укладач:
доцент кафедри фізики

В.К.Манько

Рецензент: Швець Юлій Олександрович зав. кафедри інформатики та інформаційних технологій в освіті, КЗ "ЗОППО" ЗОР, доцент, к.ф.- м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
фізики

Протокол № 5 від 26 березня 2019 р.

Рекомендовано до видання
НМК КНТ - факультету.

Протокол № 6 від 28 лютого 2019 р.

ЗМІСТ **ГІПЕР-ЗМІСТ**

| | |
|---|----|
| 1 ВСТУП | 7 |
| 1.1 Предмет і задачі фізики..... | 7 |
| 2 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА | 7 |
| 2.1 Основні поняття і задача кінематики..... | 7 |
| 2.2 Класифікація механічного руху..... | 8 |
| 2.3 Способи задавання руху точки у просторі..... | 8 |
| 2.4 Швидкість при криволінійному русі..... | 9 |
| 2.5 Прискорення при криволінійному русі. Дотична та нормальна складові прискорення..... | 10 |
| 2.6 Рух тіла по колу. Кутова швидкість та кутове прискорення. Аналогія поступального і обертального рухів..... | 12 |
| 3 ДИНАМІКА | 14 |
| 3.1 Закони Ньютона. Маса. Сила..... | 14 |
| 3.2 Імпульс. Загальне формулювання 2-го закону Ньютона. Закон збереження імпульсу..... | 16 |
| 3.3 Сили пружності. Закон Гука для деформації розтягування (стискування)..... | 16 |
| 3.4 Закон Гука для деформації зсуву..... | 18 |
| 3.5 Сили тертя. Сухе тертя. Сили тертя спокою, ковзання, кочення... 19 | 19 |
| 3.6 Сила тяжіння. Закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційне поле та його напруженість..... | 21 |
| 4. РОБОТА. ЕНЕРГІЯ. ІМПУЛЬС. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ | 22 |
| 4.1 Механічна робота. Потужність..... | 22 |
| 4.2 Поняття про енергію. Кінетична та потенціальна енергії..... | 23 |
| 4.3 Закон збереження механічної енергії..... | 25 |
| 5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ | 26 |
| 5.1 Обертальний рух твердих тіл. Абсолютно тверде тіло. Момент сили. Пара сил..... | 26 |
| 5.2 Основне рівняння динаміки обертального руху..... | 27 |
| 5.3 Аналогія величин і рівнянь поступального і обертального руху. Кінетична енергія обертання тіла..... | 29 |
| 5.4 Розрахунок моментів інерції деяких тіл. Теорема Штейнера..... | 30 |
| 6 ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА | 33 |
| 6.1 Поняття про заряд. Закон збереження заряду. Взаємодія зарядів. Закон Кулона. Силкові характеристики поля..... | 33 |

| | | |
|------|---|----|
| 6.2 | Принцип суперпозиції та його застосування до розрахунку електростатичного поля..... | 35 |
| 6.3 | Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування до розрахунку електростатичного поля заряджених тіл..... | 38 |
| 6.4 | Робота в електростатичному полі. Різниця потенціалів. Потенціал. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля..... | 42 |
| 6.5 | Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля..... | 44 |
| 6.6 | Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів..... | 45 |
| 6.7 | Енергія та густина енергії електростатичного поля..... | 47 |
| 7 | ЗАКони ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ | 47 |
| 7.1 | Закон Ома..... | 48 |
| 7.2 | Закони Кірхгофа для розгалужених електричних кіл..... | 48 |
| 7.3 | Закон Джоуля-Ленца..... | 49 |
| 8 | ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ | 49 |
| 8.1 | Магнітне поле рухомих зарядів. Індукція магнітного поля. Закон Ампера..... | 49 |
| 8.2 | Закон Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції для магнітного поля..... | 51 |
| 8.3 | Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля на осі колового струму.. | 52 |
| 8.4 | Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника із струмом..... | 54 |
| 8.5 | Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму та його застосування для розрахунку магнітного поля..... | 55 |
| 8.6 | Дія магнітного поля на рухомий заряд (сила Лоренца). Рух заряду в магнітному полі..... | 57 |
| 8.7 | Магнітний потік. Механічна робота в магнітному полі..... | 60 |
| 8.8 | Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца..... | 62 |
| 8.9 | Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність соленоїда... | 61 |
| 8.10 | Енергія та густина енергії магнітного поля..... | 63 |
| 9 | КОЛИВАННЯ | 64 |
| 9.1 | Комплексні числа та дії з ними..... | 64 |
| 9.2 | Порядок розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами..... | 65 |

| | |
|--|-----------|
| 9.3 Вільні незатухаючі гармонічні коливання. Диференціальне рівняння цих коливань (пружинний маятник, коливальний контур)..... | 66 |
| 9.4 Розв'язок диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань..... | 70 |
| 9.5 Характеристики гармонічних коливань. Фазові співвідношення.. | 71 |
| 9.6 Енергія гармонічних коливань..... | 74 |
| 9.7 Фізичний та математичний маятники..... | 75 |
| 9.8 Додавання гармонічних коливань одного напрямку рівних частот..... | 76 |
| 9.9 Додавання гармонічних коливань одного напрямку близьких частот (биття коливань)..... | 79 |
| 9.10 Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань (Фігури Ліссажу) | 80 |
| 9.11 Затухаючі коливання. Диференціальне рівняння затухаючих коливань та його розв'язок..... | 83 |
| 9.12 Характеристики затухаючих коливань та їх фізичний зміст..... | 85 |
| 9.13 Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок..... | 87 |
| 9.14 Резонанс напруг у коливальному контурі. Резонансні криві..... | 88 |
| 9.15 Резонанс струмів у коливальному контурі..... | 90 |
| 9.16 Векторні діаграми..... | 91 |
| 10 ЕЛЕМЕНТИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ..... | 94 |
| 10.1 Узагальнення електронів у кристалі. Принцип Паулі. Утворення енергетичних зон..... | 94 |
| 10.2 Заповнення зон електронами. Провідники, діелектрики, напівпровідники..... | 95 |
| 11 ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ ТВЕРДИХ ТІЛ..... | 98 |
| 11.1 Дрейф носіїв струму в електричному полі. Рухливість носіїв струму. Питома електропровідність. Ефективна маса..... | 98 |
| 11.2 Залежність рухливості носіїв заряду від температури..... | 101 |
| 11.3 Електропровідність чистих металів і сплавів. Температурний коефіцієнт опору..... | 101 |
| 11.4 Концентрація вільних носіїв заряду в напівпровідниках | 103 |
| 11.5 Температурна залежність електропровідності власних Напівпровідників..... | 105 |

| | |
|--|------------|
| 11.6 Електропровідність домішкових напівпровідників..... | 106 |
| 12 КОНТАКТ НАПІВПРОВІДНИКІВ З РІЗНИМ | |
| ТИПОМ ПРОВІДНОСТІ. p-n-перехід..... | 108 |
| 12.1 Рівноважний стан p-n-переходу..... | 108 |
| 12.2 Запираюче (зворотне) ввімкнення p-n-переходу | 109 |
| 12.3 Пряме ввімкнення p-n-переходу..... | 110 |
| 12.4 p-n- перехід і його випрямляючі властивості | 111 |
| Література..... | 112 |
| Гіпер-зміст..... | 114 |

1 ВСТУП

1.1 Предмет і задачі фізики

Предметом вивчення фізики являється оточуючий нас матеріальний світ.

Фізика вивчає:

- а) загальні закони руху (зміни) матерії, які не вивчають інші природничі науки. Наприклад, закон збереження імпульсу, закон збереження енергії. Вона вивчає такі види руху матерії: механічний, тепловий, електромагнітний, оптичний, атомний і ядерний;
- б) внутрішню будову тіл і зв'язок властивостей тіл з їх внутрішньою структурою. Наприклад, електропровідність, твердість, магнітні властивості і т.д. Цими питаннями займається молекулярна фізика, атомна і ядерна фізика, фізика твердого тіла;
- 3) можливості практичного використання явищ, законів, властивостей тіл. Це технічна фізика.

2 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

Механіка – це розділ фізики, який вивчає різні види механічного руху тіл, не виявляючи його причини (кінематика); причину руху тіл (динаміка); умови відносного спокою (статика).

2.1 Основні поняття і задача кінематики

Механічний рух – переміщення тіла у просторі й часі відносно інших тіл, які вважаються нерухомими.

Система відліку – це сукупність тіл і зв'язана з ними система координат, відносно яких вивчається рух тіл.

Початок відліку – момент часу, з якого вивчається рух тіл.

Матеріальна точка – тіло, розмірами якого можна знехтувати порівняно з відстанню, яке воно проходить при своєму русі, а всю масу тіла вважати сконцентрованою в його центрі мас.

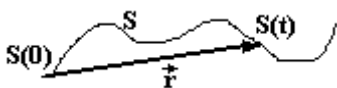


Рисунок 2.1.

Траскторія – сукупність точок простору, які послідовно проходить тіло

при своєму русі, або простіше це слід тіла у просторі (рис.2.1).

Шлях (S) – відстань між початковим і кінцевим положенням тіла, виміряна по траєкторії, тобто це довжина траєкторії. Шлях – величина скалярна.

Переміщення (\vec{r}) – відрізок прямої, який з'єднує початкове і кінцеве положення тіла. Це векторна величина, яка вказує напрямок руху тіла і співпадає із шляхом тільки у випадку прямолінійної траєкторії.

Задача кінематики – визначити положення тіла (його координати) і швидкість руху в будь-який момент часу.

2.2 Класифікація механічного руху

По формі траєкторії механічний рух буває прямолінійний і криволінійний, по швидкості – рівномірний і нерівномірний. Для тіл, які не можна вважати матеріальними точками, рух буває поступальний і обертальний. При поступальному русі будь-яка пряма, проведена через дві точки тіла, залишається паралельною сама собі. При обертальному русі всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання.

2.3 Способи задавання руху точки у просторі

Є три способи задавання положення і руху точки у просторі: звичайний, векторний і координатний.

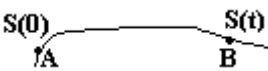


Рисунок 2.2

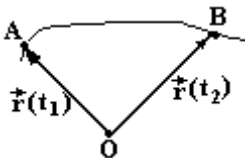


Рисунок 2.3

При **звичайному (траєкторному)** способі (рис.2.2) повинно бути відомо: 1) траєкторія; 2) початкове положення, тобто дугова координата $S(0)$ точки A в початковий момент часу; 3) напрямок руху по траєкторії від початкового положення; 4) дугова координата $S(t)$ точки B, яка вимірюється довжиною траєкторії від початкової точки до положення тіла в будь-який момент часу, тобто повинна бути відома функція $S = S(t)$. Наприклад,

$$S(t) = 10 + 2t - 3t^2 + 5t^3 \text{ (м)}. \quad (2.1)$$

При **векторному** способі (рис.2.3) положення точки задається кінцем радіус-вектора $\vec{r}(t)$, проведеним із деякого центра (полюса) O . Повинно бути відомо: 1) положення полюса O ; 2) векторна функція часу $\vec{r}(t)$, яка називається векторним законом руху тіла. Наприклад,

$$\vec{r}(t) = 4t \cdot \vec{i} - 7t^2 \cdot \vec{j} + 2t^3 \cdot \vec{k}, \quad (2.2)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} - одиничні вектори (орти) вздовж координатних осей X , Y , Z відповідно.

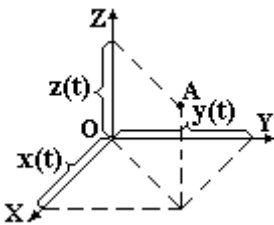


Рисунок 2.4

При **координатному** способі (рис.2.4) повинні бути задані: 1) система координат X , Y , Z ; 2) функції часу: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Наприклад,
 $x(t) = 4t$ (м); $y(t) = -7t^2$ (м); $z(t) = 2t^3$ (м). (2.3)

Всі способи взаємозв'язані. Найпростішим є зв'язок двох останніх. Якщо помножити координатні функції на відповідні орти і додати, одержимо векторну функцію (2.2).

2.4 Швидкість при криволінійному русі

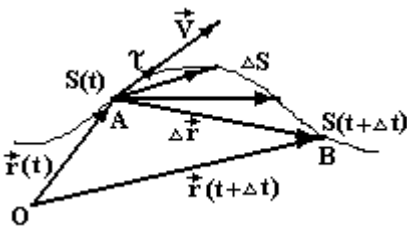


Рисунок 2.5

Нехай точка рухається вздовж деякої кривої лінії(рис. 2.5). Положення точки будемо задавати звичайним і векторним способами. В момент часу t точка знаходиться в положенні A . Її криволінійна координата $S(t)$, а радіус-вектор $\vec{r}(t)$. В момент часу $(t + \Delta t)$ точка займе положення B з криволінійною координатою $S(t + \Delta t)$ і радіусом-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$. Шлях ΔS , який пройшла точка за час Δt дорівнює різниці криволінійних координат: $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, а переміщення

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. За означенням, модуль миттєвої швидкості, тобто в даний момент часу, є границя відношення шляху ΔS до

проміжку часу Δt , за який цей шлях пройдено, при умові, що проміжок часу зменшується до нуля, тобто дорівнює першій похідній від криволінійної координати за часом.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (2.4)$$

Швидкість величина векторна. Напрямок швидкості співпадає з граничним положенням вектора переміщення $\Delta \vec{r}$. Як видно з рис.2.5, при зменшенні часу Δt до нуля точка В наближається до точки А, а вектор переміщення $\Delta \vec{r}$ повертається навколо точки А і в граничний момент співпадає з дотичною до траєкторії. Вектор швидкості

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора положення точки. Вводячи одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$, можна записати

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V \cdot \vec{\tau} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau}. \quad (2.6)$$

В інтернаціональній системі одиниць (СІ) швидкість вимірюється в м/с.

2.5 Прискорення при криволінійному русі. Дотична та нормальна складові прискорення

У загальному випадку при криволінійному русі змінюється як величина швидкості так і її напрямок. Мірою зміни швидкості з часом є прискорення \vec{a} . Це границя відношення вектора зміни швидкості $\Delta \vec{V}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна відбулася, при умові зменшення Δt до нуля

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (2.7)$$

тобто це перша похідна від вектора швидкості, або друга похідна від радіус-вектора за часом. Прискорення – це швидкість зміни швидкості. Одиницею вимірювання прискорення є м/с².

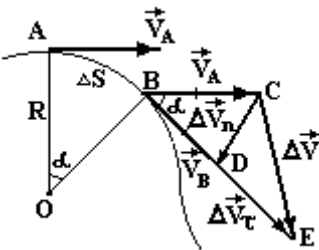


Рисунок 2.6

Нехай тіло за час Δt перемістилось із т.А в т.В (рис.2.6). Вектор зміни швидкості $\Delta \vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ розкладемо на дві складові $\Delta \vec{V}_n$ і $\Delta \vec{V}_\tau$ так, щоб величина $\Delta V_\tau = V_B - V_A = DE$. Із рис.2.6 видно, що $\Delta \vec{V} = \Delta \vec{V}_n + \Delta \vec{V}_\tau$, причому $\Delta \vec{V}_n$ відображає зміну напрямку швидкості, а $\Delta \vec{V}_\tau$ зміну її модуля. Таким чином, прискорення

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad (2.8)$$

теж буде мати дві складові: нормальне прискорення \vec{a}_n і тангенціальне (дотичне) \vec{a}_τ .

Знайдемо величину нормального прискорення. При досить малому проміжку часу Δt дугу $AB = \Delta S$ можна вважати хордою. Тоді із подібності трикутників $\triangle AOB \sim \triangle DBC$ (вони обидва рівнобедрені з однаковим кутом α , що лежить проти основ) запишемо відношення відповідних сторін, і знайдемо ΔV_n

$$\frac{CD}{AB} = \frac{BC}{AO}, \text{ або } \frac{\Delta V_n}{\Delta S} = \frac{V_A}{R} \Rightarrow \Delta V_n = \frac{V_A}{R} \cdot \Delta S.$$

Тоді величина нормального прискорення

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_n}{\Delta t} = \frac{V_A}{R} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_A^2}{R}. \quad (2.9)$$

При зменшенні Δt до нуля кут α теж зменшується до нуля, а тому кут $\angle CDE \rightarrow 90^\circ$. Отже нормальне і тангенціальне прискорення взаємно перпендикулярні. Тангенціальне прискорення направлене по дотичній до траєкторії, тому його ще називають дотичним прискоренням, а нормальне перпендикулярне до нього і направлене вздовж радіуса кривизни R до центра, тому його ще називають доцентровим прискоренням.

Величина дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (2.10)$$

і характеризує зміну величини швидкості.

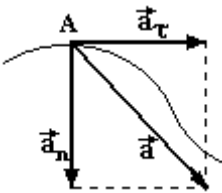


Рисунок 2.7

Величина повного прискорення, як видно із рис.2.7, знаходиться за теоремою Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} . \quad (2.11)$$

2.6 Рух тіла по колу. Кутова швидкість та кутове прискорення. Аналогія поступального і обертального рухів

При вивченні обертального руху зручніше характеризувати його не лінійними параметрами (шлях, швидкість, лінійне прискорення), а кутовими: кутом повороту, кутовою швидкістю, кутовим прискоренням. Зручність зумовлена тим, що для різних точок тіла кутові характеристики однакові, а лінійні різні. Наприклад, швидкість більша для більш віддалених від центра точок, а кутова швидкість однакова..

Дамо означення кутовим характеристикам обертального руху.

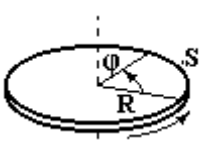


Рисунок 2.8

Кут повороту φ – це кут, на який повертається радіус-вектор будь-якої точки тіла (рис.2.8). Вимірюється в радіанах. Довжина дуги (шлях S) зв'язана з кутом повороту φ (кутовою координатою) через радіус R

$$S = \varphi \cdot R . \quad (2.12)$$

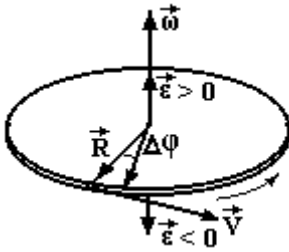


Рисунок 2.9

Кутова швидкість ω - це границя відношення кута повороту $\Delta\varphi$ до проміжку часу Δt , за який цей поворот здійснений, при умові, що Δt зменшується до нуля, тобто це перша похідна від кута повороту за часом

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} . \quad (2.13)$$

Не дивлячись, що кут повороту величина скалярна, кутову швидкість прийнято вважати вектором (рис.2.9), направленим вздовж осі обертання у відповідності з правилом правого гвинта: якщо обертати гвинт з правою різьбою разом з тілом, то поступальний рух гвинта вкаже напрямок вектора кутової швидкості. З

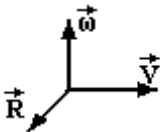


Рисунок 2.10

кінця цього вектора обертання тіла видно направленим проти годинникової стрілки. Вимірюється кутова швидкість в $1/c$.

Встановимо зв'язок між кутовою та лінійною швидкостями, скориставшись означеннями швидкостей (2.4), (2.13) і співвідношенням (2.12).

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d(\varphi \cdot \mathbf{R})}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \mathbf{R} = \omega \cdot \mathbf{R} \quad (2.14)$$

Вектори $\vec{\mathbf{V}}$, $\vec{\omega}$ і $\vec{\mathbf{R}}$, як видно із рис.2.9 і рис.2.10, взаємно-перпендикулярні. Тому рівняння (2.14) записують у векторній формі через векторний добуток

$$\vec{\mathbf{V}} = [\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{R}}]. \quad (2.15)$$

Кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ - це границя відношення зміни кутової швидкості $\Delta\vec{\omega}$ до проміжку часу Δt , за який ця зміна відбулася, при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$, тобто це перша похідна від кутової швидкості за часом.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.16)$$

Так як вектор $\vec{\omega}$ направлений по осі обертання, то і вектор $\Delta\vec{\omega}$, а отже і вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ теж направлений вздовж осі обертання (див. рис.2.9). У випадку прискореного руху він співпадає з напрямком кутової швидкості і протилежний їй при сповільненому русі. Вимірюється кутове прискорення в $1/c^2$.

Встановимо зв'язок між лінійним та кутовим прискореннями, скориставшись (2.7), (2.15), (2.16) і (2.5). Одержуємо

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d[\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{R}}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{R}} \right] + \left[\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{R}}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\mathbf{R}}] + [\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{V}}] = \vec{\mathbf{a}}_{\tau} + \vec{\mathbf{a}}_n. \quad (2.17).$$

$$\text{Тут} \quad \vec{\mathbf{a}}_{\tau} = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\mathbf{R}}], \quad (2.18)$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n = [\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{V}}] \quad (2.19)$$

відомі нам дотичне і нормальне прискорення.

Приклад. Одержати рівняння рівно-змінного обертального руху. Для нього $\mathbf{a}_{\tau} = \pm \text{const}$; $\mathbf{R} = \text{const}$. Це еквівалентно

співвідношенням $\varepsilon = \pm \text{const}$, $R = \text{const}$, тобто $\frac{d\omega}{dt} = \pm \varepsilon$.

Інтегруємо останнє рівняння з початковими умовами: при $t = 0$ $\omega = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$. Одержуємо рівняння руху

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t \quad (2.20)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad (2.21)$$

які аналогічні рівняннями прямолінійного рівно-змінного руху

$$V = V_0 \pm a_\tau \cdot t \quad S = S_0 + V_0 \cdot t \pm \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}.$$

Таким чином, між поступальним і обертальним рухами існує аналогія величин $S \rightarrow \varphi$; $V \rightarrow \omega$; $a_\tau \rightarrow \varepsilon$ і формул. Так у поступальному русі відома формула $V^2 - V_0^2 = \pm 2 \cdot a_\tau \cdot S$. Замінивши відповідні величини, одержуємо для рівно-змінного обертального руху

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2 \cdot \varepsilon \cdot \varphi.$$

3 ДИНАМІКА

Динаміка вивчає причину руху тіл. Вона поділяється на три розділи:

- класична динаміка вивчає рух тіл великої маси (набагато більшої, ніж маса атомів) з малими швидкостями (набагато меншими, ніж швидкість світла $3 \cdot 10^8$ м/с). Вона базується на законах Ньютона;
- релятивістська динаміка вивчає рух тіл із швидкостями, близькими до швидкості світла;
- квантова механіка вивчає рух мікрочастинок.

Ми будемо розглядати спочатку класичну механіку.

3.1 Закони Ньютона. Маса. Сила

1-й закон Ньютона (закон інерції). Всяке тіло зберігає стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія інших тіл не виведуть його із цього стану. Властивість тіл зберігати набутий стан (спокою, чи руху) називається його інертністю. Мірою

інертності тіл є маса (m), яка в СІ вимірюється в кг. Маса одиниці об'єму (V) тіла називається густиною ρ

$$\rho = \frac{m}{V}, \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]. \quad (3.1)$$

Є й інша редакція цього закону інерції, а саме: системи відліку, в яких тіла, що не зазнають дії інших тіл, знаходяться у стані відносного спокою, або рівномірного прямолінійного руху, називаються інерціальними. Всі системи відліку, які рухаються відносно інерціальних рівномірно і прямолінійно, або знаходяться у стані спокою, теж являються інерціальними. Всі інші системи неінерціальні. Закони Ньютона справедливі для інерціальних систем відліку.

Сила (F) – це міра дії одного тіла на інше, яка проявляється у виникненні прискорення тіла, або в його деформації (зміні розмірів і форми).

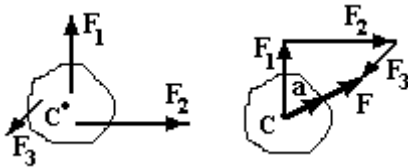


Рисунок 3.1

2-й закон Ньютона.

Прискорення (\vec{a}), з яким рухається центр маси тіла C (рис.3.1), прямо пропорційне векторній сумі сил, що діють на нього (рівнодіючій), обернено пропорційне масі тіла, направлене в сторону рівнодіючої

і прикладене в центр маси тіла

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.2)$$

Якщо хоч одна із сил змінюється за часом, формула (3.2) дає миттєве значення прискорення, тобто в даний момент часу. З цього

закону визначається одиниця сили Ньютон $F = m \cdot a \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н} \right]$.

3-й закон Ньютона.



Два тіла (рис. 3.2) взаємодіють з силами F_1 і F_2 , однаковими за величиною і протилежними за напрямком, тобто $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Вони не

Рисунок 3.2

зрівноважують одна одну, так як прикладені до різних тіл .

3.2 Імпульс. Загальне формулювання 2-го закону Ньютона. Закон збереження імпульсу

Враховуючи (2.7), що прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, формула (3.2)

2-го закону Ньютона набуває виду

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} . \quad (3.3)$$

Добуток маси тіла на швидкість його руху називається **імпульсом** $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$. Це векторна фізична величина. Швидкість його зміни за часом дає силу. Змінити ж імпульс тіла можна не тільки за рахунок зміни швидкості, а і за рахунок зміни його маси. Тому формула (3.3) 2-го закону Ньютона є більш загальною. Таке формулювання дає можливість вивчати рух тіл змінної маси, наприклад, рух ракет.

Ізольованою (замкнутою) називається система тіл, на які не діють зовнішні сили, або їхня рівнодіюча дорівнює нулю. Тобто тіла взаємодіють тільки між собою з внутрішніми силами.

При $\vec{F} = 0$ формула (3.3) дає $d\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$. Одержали, що векторна сума імпульсів усіх тіл ізольованої (замкнутої) системи залишається сталим. В цьому полягає суть закону збереження імпульсу. Якщо ж система незамкнута, то у відповідності за другим законом Ньютона (3.3) зміна імпульсу системи дорівнює імпульсу зовнішніх сил $d\vec{P} = \vec{F} dt$.

Задасмоь запитанням: чи можуть швидкості усіх тіл замкнутої системи одночасно збільшуватись? Можуть, так як це **векторний закон**. Наприклад, при розриві тіла на дві частини швидкість кожної зростає, але векторна сума протилежних імпульсів залишається попередньою.

3.3 Сили пружності. Закон Гука для деформації розтягування (стискування)

Деформацією називається зміна форми, або розмірів тіла під дією зовнішніх сил. Розрізняють два ідеальних види деформацій: абсолютно пружну і абсолютно пластичну. При абсолютно пружній деформації форма і розміри тіла повністю відтворюються після припинення дії зовнішньої сили. При абсолютно пластичній, навпаки, форма і розмір тіла після припинення дії сили повністю зберігають набутий при деформації стан.

Сили, які виникають при пружних деформаціях, називаються пружними силами. Деформації бувають: розтягування (стискування); згинання; закручування; зсуву. Різні види деформацій можна звести до двох основних: розтягування (стискування) і зсув.

Розглянемо спочатку деформацію розтягування (стискування). Англійський фізик Р.Гук у 1660 році експериментально встановив закон, який носить його ім'я: **при малих пружних деформаціях сила пружності пропорційна величині деформації**

$$F = -k\Delta\ell, \quad (3.4)$$

k – коефіцієнт жорсткості, $\Delta\ell$ - величина деформації. Знак (-) мінус вказує, що сила пружності направлена в сторону, протилежну деформації, тобто має такий напрямок, щоб зменшити деформацію.

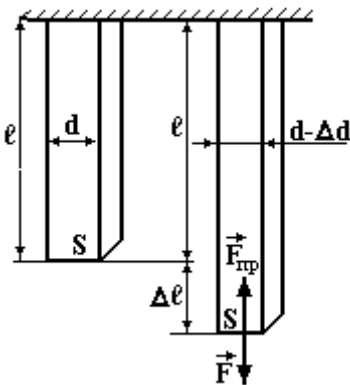


Рисунок 3.3

перерізу S , тобто

Нехай стержень довжиною ℓ площею перерізу S і поперечним розміром d закріплений за один кінець, а до другого прикладена розтягуюча зовнішня сила \vec{F} (рис.3.3). Внаслідок цього довжина стержня збільшується на величину $\Delta\ell$, а поперечний розмір зменшується на Δd . Виникає пружна сила $\vec{F}_{\text{пр}} = -\vec{F}$. Експерименти показують, що абсолютне видовження $\Delta\ell$ прямо пропорційне силі \vec{F} , довжині стержня ℓ і обернено пропорційне площі

$$\Delta\ell = -\frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot \ell}{S}. \quad (3.5)$$

E – модуль пружності, або модуль Юнга, вимірюється в Н/м^2 . Він характеризує пружні властивості матеріалу і являється величиною сталою для кожного матеріалу. Перепишемо рівняння (3.5) так

$$\frac{F}{S} = -E \cdot \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (3.6)$$

Відношення абсолютної деформації $\Delta \ell$ до початкового розміру називається **відносною деформацією** $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$, величина безрозмірна.

Відношення сили F до площі поперечного перерізу S називається **механічною напругою** $\sigma = \frac{F}{S}$, вимірюється в Н/м^2 .

Рівняння (3.6) закону Гука приймає вид

$$\sigma = -E\varepsilon. \quad (3.7)$$

Механічна напруга пропорційна відносній деформації.

З'ясуємо фізичний зміст модуля Юнга E . При $\varepsilon = 1$, тобто коли $\Delta \ell = \ell$, $E = \sigma$. Отже, модуль Юнга, це така механічна напруга, при якій довжина стержня подвоїться. Значення модуля Юнга можна знайти в довідникових таблицях.

Відношення зміни поперечного розміру Δd до початкового значення d , тобто відносна зміна поперечного розміру, називається

коефіцієнтом поперечного стискування $\varepsilon_{\Pi} = \frac{\Delta d}{d}$.

Відношення коефіцієнта поперечного стискування ε_{Π} до відносного видовження ε називається **коефіцієнтом Пуассона**

$\mu = \frac{\varepsilon_{\Pi}}{\varepsilon}$. Він також являється величиною сталою для кожного матеріалу і разом з модулем Юнга повністю характеризує пружні властивості речовини.

3.4 Закон Гука для деформації зсуву

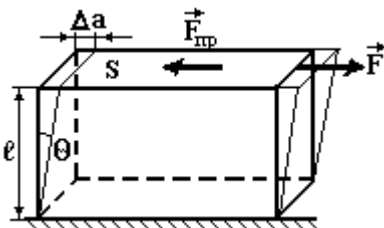


Рисунок 3.4

Деформація зсуву виникає під дією сколюючої зовнішньої сили F , яка паралельна закріпленій площині (рис.3.4). Виникає пружна сила $F_{\text{пр}}$, яка паралельна площинам

зсув і протилежна зовнішній силі. Експерименти показують, що абсолютний зсув Δa прямо пропорційний зовнішній силі F , відстані ℓ між площинами ковзання і обернено пропорційний площі S площин ковзання

$$\Delta a = -\frac{1}{G} \cdot \frac{F \cdot \ell}{S}. \quad (3.8)$$

G – модуль зсуву. Перепишемо рівняння (3.8) так

$$\frac{F}{S} = -G \cdot \frac{\Delta a}{\ell} \quad (3.9)$$

Відношення сколюючої сили до площі називається сколюючою механічною напругою $\sigma_\tau = \frac{F}{S}$, відношення абсолютного зсуву до відстані між площинами ковзання називається **відносним зсувом** $\gamma = \frac{\Delta a}{\ell}$. Отже, **закон Гука** для деформації зсуву набуває виду

$$\sigma_\tau = -G\gamma. \quad (3.10)$$

Сколююча напруга пропорційна відносному зсуву.

Модуль зсуву G – це така сколююча механічна напруга, при якій відносний зсув дорівнює 1, тобто $\gamma = \frac{\Delta a}{\ell} = \text{tg}\theta = 1$. Це означає, що кут зсуву $\theta = 45^\circ$. Модуль зсуву зв'язаний з модулем Юнга і коефіцієнтом Пуассона співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)}. \quad (3.11)$$

3.5 Сили тертя. Сухе тертя. Сили тертя спокою, ковзання, кочення

Сили, що виникають при контакті поверхні одного тіла з поверхнею другого, називаються силами зовнішнього тертя, а сили, які виникають при відносному русі шарів речовини, називаються силами внутрішнього тертя. Будемо спочатку розглядати зовнішнє сухе тертя (без змащування рідиною контактуючих



Рисунок 3. 5

поверхонь). Воно буває трьох видів: тертя спокою; тертя ковзання; тертя кочення.

Сила тертя спокою виникає між контактуючими поверхнями тіл без їх відносного руху. Вона виникає за рахунок сил міжмолекулярної взаємодії і за рахунок зачеплення мікро-нерівностей (рис.3.5) і їх деформації. Мікро-нерівності зазнають деформації згинання. При цьому виникають пружні сили, рівнодіюча яких $\vec{F}_{сп}$ зрівноважує зовнішню, паралельну до

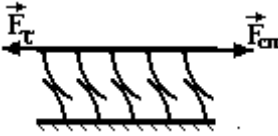


Рисунок 3.6

поверхонь силу \vec{F}_τ . Наглядно картину контакту поверхонь моделюють дві щітки, вставлені ворсом одна в іншу (рис 3.6). За першим законом Ньютона тіло не рухається, коли рівнодіюча сил дорівнює нулю. Тому в загальному випадку сила тертя спокою дорівнює зовнішній силі, яка направлена паралельно контактуючим поверхням і протилежна їй за напрямком,

$$\vec{F}_{сп} = -\vec{F}_\tau. \quad (3.12)$$

При збільшенні зовнішньої сили \vec{F}_τ зростає і сила тертя спокою. Але сила тертя спокою не може зростати до нескінченності. В деякий момент тіло прийде в рух. В момент перед початком руху сила тертя спокою досягає свого максимального значення яке дорівнює добутку коефіцієнта тертя спокою $k_{сп}$ і сили нормального тиску N

$$F_{сп.макс} = k_{сп} \cdot N. \quad (3.13)$$

Вести мову про силу тертя спокою втрачає сенс. Виникає сила тертя ковзання.

Сила тертя ковзання має таку ж природу, як і сила тертя спокою. Але при відносному русі нерівності не встигають глибоко зачепитись між собою, а як би пролітають одна над іншою. Тому сила тертя ковзання спочатку при малих швидкостях менша від максимальної сили тертя спокою (рис.3.7).

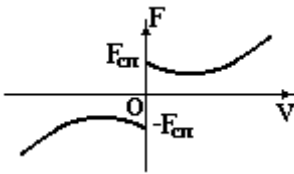


Рисунок 3.7

При великих швидкостях відносного руху нерівності починають руйнуватись, на що необхідно затратити певну енергію. Тому сила тертя ковзання зростає, і може навіть

стати більшою, ніж максимальна сила тертя спокою (рис.3.7). Сила тертя ковзання завжди дорівнює добутковій коефіцієнта тертя ковзання k і сили нормального тиску N

$$F_{\text{ковз}} = k_{\text{ковз}} \cdot N. \quad (3.14)$$

Сила тертя кочення має іншу природу, ніж дві попередні.

Коли колесо не рухається, картина деформації поверхонь симетрична відносно вертикального діаметра (рис.3.8,а). Рівнодіюча сила реакції

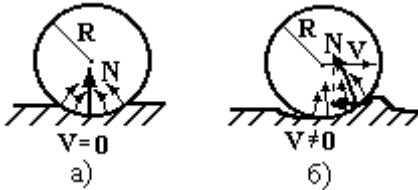


Рисунок 3.8

N проходить через центр колеса. Тому її момент дорівнює нулю. При рухові колеса попереду виникає деформаційний горб, а за колесом поверхня не встигає миттєво відновити свою форму (рис.3.7,б). Це явище називається явищем пружної післядії: для відтворення форми після деформації необхідний деякий час. Рівнодіюча сила реакції N проходить попереду центра колеса. Виникає момент цієї сили, який і гальмує рух колеса. Горизонтальна складова сили реакції і є сила тертя кочення, яка обернено пропорційна радіусу колеса

$$F_{\text{коч.}} = k_{\text{коч.}} \cdot \frac{N}{R}. \quad (3.15)$$

3.6 Сила тяжіння. Закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційне поле та його напруженість

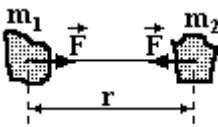


Рисунок 3.9

Одним із фундаментальних видів взаємодії в природі є гравітаційна взаємодія. **Закон гравітаційної взаємодії** був сформульований І. Ньютоном у 1686 році: сила, з якою притягуються два тіла прямо пропорційна добуткові мас m_1 і m_2 цих тіл, обернено пропорційна квадрату відстані r між їх

центрами мас і направлена по лінії, яка з'єднує центри мас тіл (рис.3.9)

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.16)$$

Тут $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ - гравітаційна стала. Її вперше виміряв англ. фізик Г.Кавендіш у 1798 році. Така взаємодія тіл відбувається через одну із форм матерії – гравітаційне поле. Кожна маса утворює навколо себе гравітаційне поле, яке потім діє на іншу масу, поміщену в це поле. Силовою характеристикою гравітаційного поля є його напруженість \vec{G} . Це векторна величина, яка дорівнює силі, що діє з боку поля на тіло одиничної маси m_0 .

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} = \gamma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.17)$$

Вимірюється напруженість $[G] = \text{Н} / \text{кг} = (\text{кг} \cdot \text{м}) / (\text{с}^2 \cdot \text{кг}) = \text{м} / \text{с}^2$ в одиницях прискорення. Дійсно, якщо знехтувати добовим обертанням Землі, гравітаційну силу можна прирівняти силі тяжіння mg . Одержуємо

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_0} = \frac{m_0 \vec{g}}{m_0} = \vec{g} = \gamma \frac{M_3}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (3.18)$$

Отже, напруженість гравітаційного поля Землі дорівнює прискоренню вільного падіння.

4. РОБОТА. ЕНЕРГІЯ. ІМПУЛЬС. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

4.1 Механічна робота. Потужність

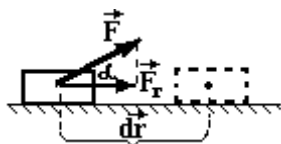


Рисунок 4.1

Поняття механічної роботи пов'язане з переміщенням. Якщо під дією сили \vec{F} тіло переміщується на відстань $d\vec{r}$ (рис.4.1), то елементарна механічна робота

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_x \cdot dr \quad (4.1)$$

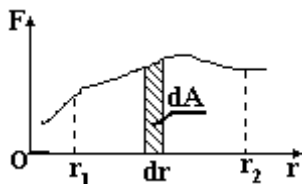


Рисунок 4.2

дорівнює скалярному добутку сили на переміщення. На графіку залежності сили від переміщення (рис.4.2) вона відповідає площі заштрихованої

області. Вся робота змінної сили знаходиться як інтеграл

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dr = \int_{r_1}^{r_2} F_r \cdot dr \quad (4.2)$$

і чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями r_1 , r_2 , віссю Ox абсцис і кривою $F(r)$. Вимірюється робота в джоулях $[A]=H \cdot m = Дж$.

Потужність – це швидкість виконання роботи, тобто це робота, виконана за одиницю часу

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad (4.3)$$

і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість. Потужність вимірюється у ватах $[P] = Дж/с = Вт$. Позасистемною одиницею потужності є кінська сила $1к.с. = 735 Вт$.

4.2 Поняття про енергію. Кінетична та потенціальна енергії

Фізична величина, яка характеризує здатність тіла виконувати роботу, називається **енергією** і вимірюється тією роботою, яку може виконати тіло. До механічної енергії відносяться два види енергії у відповідності з тим, за рахунок чого може бути виконана робота; 1) **кінетична** енергія, коли робота може бути виконана за рахунок руху тіла; 2) **потенціальна** енергія, коли робота може бути виконана за рахунок положення тіл, або взаємного положення частин тіла (за рахунок деформації). Вимірюється енергія в одиницях роботи, в Дж.

Знайдемо вираз для кінетичної енергії, яка дорівнює роботі тіла за рахунок руху до зупинки. Враховуючи (4.2) і (3,3), одержуємо

$$A = \int_v^0 \vec{F} d\vec{r} = \int_v^0 m \frac{d\vec{V}}{dt} d\vec{r} = \int_v^0 m d\vec{V} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_v^0 m \cdot d\vec{V} \cdot \vec{V} = \int_v^0 m V \cdot dV = -\frac{mV^2}{2} \quad (4.4)$$

Знак (-) мінус показує, що кінетична енергія

$$E_k = \frac{mV^2}{2} \quad (4.5)$$

при виконанні роботи зменшується. Звертає на себе увагу, що кінетична енергія не може бути від'ємною, тобто $E_k \geq 0$.

Потенціальна енергія (енергія положення) вимірюється роботою, яку необхідно виконати зовнішнім силам, щоб перевести систему без зміни її кінетичної енергії із одного стану в інший.

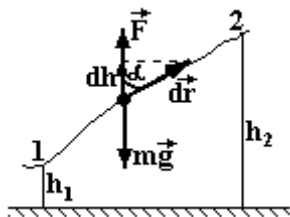


Рисунок 4.3

Знайдемо потенціальну енергію тіла масою m в гравітаційному полі тяжіння Землі. Початкове і кінцеве положення тіла будемо задавати його висотами h_1 і h_2 над поверхнею Землі (рис.4.3). Для переміщення тіла без зміни його кінетичної енергії (без зміни швидкості), тобто для рівномірного переміщення із положення 1 в положення 2, до нього, у відповідності з

першим законом Ньютона, необхідно прикласти силу $\vec{F} = -m\vec{g}$.

Робота цієї сили

$$A = \int_{h_1}^{h_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \cdot \cos\alpha = \int_{h_1}^{h_2} mg \cdot dh = mgh_2 - mgh_1 = E_{п2} - E_{п1}. \quad (4.6)$$

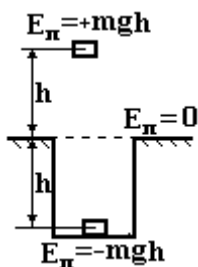


Рисунок 4.4

Одержали, що робота дорівнює зміні потенціальної енергії $\Delta E_{п} = mg\Delta h$, а не самій потенціальній енергії. На відміну від кінетичної, для потенціальної енергії необхідно задати її нульовий рівень, причому цей рівень задається довільно. Якщо потенціальна енергія на поверхні Землі дорівнює нулю (рис.4.4), то на висоті h вона буде позитивною і становити

$$E_{п} = mgh. \quad (4.7)$$

В колодязі ж глибиною h потенціальна енергія при такому ж виборі нульового рівня від'ємна

$$E_{п} = -mgh. \quad (4.8)$$

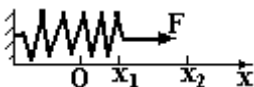


Рисунок 4.5

Знайдемо потенціальну енергію деформованої пружини. Для цього розрахуємо роботу по, наприклад, розтягуванню пружини жорсткістю k від x_1 до x_2 (рис.4.5). Сила

пружності $F = -kx$.

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = E_{п1} - E_{п2} \quad (4.9)$$

Прийнявши за нульовий рівень потенціальної енергії стан недеформованої пружини, одержуємо потенціальну енергію деформації

$$E_{п} = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.10)$$

4.3 Закон збереження механічної енергії

Консервативною називається система, в якій діють сили, робота яких не залежить від форми траєкторії тіла. Такі сили називаються потенціальними. В таких системах не відбувається перетворення механічної енергії (кінетичної чи потенціальної) в немеханічні види, наприклад, в тепло. Це системи, в яких відсутні сили тертя. Прикладом потенціальних (консервативних) сил можуть бути сили гравітації, сили тяжіння, кулонівські сили. Інші системи, в яких механічна енергія перетворюється в немеханічну, називаються дисипативними. В них відбувається дисипація (розсіювання) механічної енергії. Є ще замкнуті (ізолювані) і незамкнуті системи. Таким чином можливі чотири типи систем:

а) **-З** - консервативні, замкнуті системи. В таких системах повна механічна енергія залишається незмінною. $E = E_{к} + E_{п} = \text{const}$, або $\Delta E = 0$;

б) **З** - консервативні незамкнуті системи. В них зміна механічної енергії дорівнює роботі зовнішніх сил $\Delta E = \Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{\text{зовн.сил}}$;

в) **Д-З** - дисипативні замкнуті системи. Зміна механічної енергії дорівнює роботі сил тертя $\Delta E = \Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{\text{тертя}}$;

г) **Д-НЗ** - дисипативні незамкнуті системи. Зміна механічної енергії дорівнює алгебраїчній сумі роботи зовнішніх сил і сил тертя

$$\Delta E = \Delta E_{к} + \Delta E_{п} = A_{\text{тертя}} + A_{\text{зовн.сил}}.$$

5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

5.1 Обертальний рух твердих тіл. Абсолютно тверде тіло. Момент сили. Пара сил

При вивченні обертального руху тіл зручно ввести таку ідеалізацію, як абсолютно тверде тіло. Це такі тіла, в яких не виникають деформації, які б сили на нього не діяли. Зручність полягає в тому, що радіус обертання для таких тіл не змінюється, а отже і зв'язок між кутowymi і лінійними характеристиками буде однозначним (як відомо з розділу 2.6, він здійснюється через радіус). Тому для вивчення обертального руху тіла досить знайти кутові характеристики однієї його точки.

В загальному випадку сила \vec{F} і вісь обертання є мимобіжними

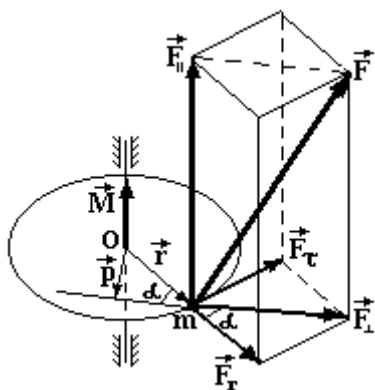


Рисунок 5.1

(рис.5.1). Розкладемо силу \vec{F} на складові. Спочатку на силу \vec{F}_{\parallel} паралельну осі і силу \vec{F}_{\perp} , яка лежить в перпендикулярній до осі площині. Останню ж розкладемо на силу \vec{F}_r направлену по радіусу \vec{r} і на силу \vec{F}_t перпендикулярну до радіуса,

а значить дотичну до траєкторії руху тіла. Результат дії мимобіжної з віссю обертання сили \vec{F} на тіло, яке має нерухому вісь обертання, залежить не тільки від величини сили, а і від точки її прикладання та напрямку дії. Дійсно, сила паралельна осі обертання (рис.5.1) намагається зсунути його вздовж осі, а не повернути. Сила, яка перетинає вісь, намагається її зігнути і теж не

приводить тіло в обертальний рух. Ці сили урівноважуються силами реакції опори осі. Сила ж, яка не проходить через вісь обертання і не паралельна їй приводить тіло в обертальний рух. Тому мірою дії сили на обертальний рух тіла є не сама сила, а її момент.

Моментом \vec{M} сили \vec{F} називається векторний добуток радіус-вектора \vec{r} точки прикладення сили (рис.5.1) і сили \vec{F}_\perp , проекції сили \vec{F} на площину, перпендикулярну до осі обертання

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}_\perp] \quad (5.1).$$

Вектор моменту направлений вздовж осі обертання у відповідності з **правилом правого гвинта**: при обертанні правого гвинта разом з тілом напрямком вектора \vec{M} співпадає з поступальним рухом гвинта, в нашому випадку вгору. Розкриємо векторний добуток в (5.1) враховуючи, що $F_\perp \cdot \sin \alpha = F_\tau$, або $r \cdot \sin \alpha = p$, одержуємо

$$M = r \cdot F_\perp \cdot \sin \alpha = r \cdot F_\tau = F_\perp \cdot p. \quad (5.2)$$

Остаточно для моменту сили маємо співвідношення у векторній формі

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}_\perp] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_\tau] = [p \cdot \vec{F}_\perp]. \quad (5.3)$$

Тут p – плече сили – це довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрямок дії сили \vec{F}_\perp .

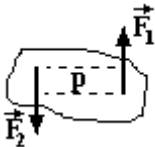


Рисунок 5.2

Парою сил називають дві паралельні протилежно направлені однакові за величиною сили.

Моментом пари сил називають добуток однієї з сил на плече пари, тобто на відстань p між лініям дії сил (рис.5.2). Момент пари сил не залежить від положення осі обертання та навіть від її наявності чи відсутності. Дійсно, враховуючи, що моменти сил F_1 і F_2 протилежно направлені (рис.5.3) і $F_1 = F_2 = F$, результуючий момент буде дорівнювати

$$M = F_1 \cdot (p + x) - F_2 \cdot x = F \cdot p. \quad (5.4)$$

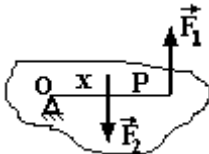


Рисунок 5.3

5.2 Основне рівняння динаміки обертального руху

Це рівняння аналогічне рівнянню другого закону Ньютона(3.2), яке зв'язує кутове прискорення з моментом сил.

Нехай деяке тіло може обертатись навколо закріпленої осі. Виділимо елемент Δm_i цього тіла, положення якого задається радіус-вектором \vec{r}_i (рис.5.4). На цей елемент діють

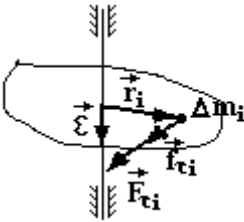


Рисунок 5.4

зовнішні сили \vec{F}_i і внутрішні сили \vec{f}_i , тангенціальні складові яких \vec{F}_{ti} і \vec{f}_{ti} надають йому дотичного прискорення \vec{a}_{ti} .

Запишемо другий закон Ньютона для цього елемента

$$\vec{F}_{ti} + \vec{f}_{ti} = \Delta m_i \cdot \vec{a}_{ti}$$

(5.5)

Щоб перейти до моментів сил рівняння (5.5) векторно помножимо на радіус-вектор \vec{r}_i

$$[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{a}_{ti}]. \quad \text{Так як } \vec{a}_{ti} = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i] \text{ (див. розділ 2.7 формула (2.18)), маємо } [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i [\vec{r}_i \cdot [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i]] \quad (5.6)$$

Звернемо увагу, що кутове прискорення не має індексу (i) так як воно для всіх точок тіла однакове.

Скориставшись математичною формулою подвійного векторного добутку

$$[\vec{a} \cdot [\vec{b} \cdot \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}), \text{ спростимо праву частину (5.6)}$$

$$[\vec{r}_i \cdot [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_i]] = \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}). \text{ Рівняння (5.6) набуває виду}$$

$$[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \Delta m_i \cdot \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}). \quad (5.7)$$

Тут $\Delta m_i \cdot \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = \Delta m_i \cdot r_i^2$, $\Delta m_i \cdot \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}) = 0$ так як радіус-вектор і кутове прискорення взаємно перпендикулярні. Візьмемо суму по всьому об'єму тіла.

$$\sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}] + \sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_V \Delta m_i r_i^2$$

Тут перший доданок є векторна сума моментів зовнішніх сил, які діють на тіло $\vec{M} = \sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ti}]$, другий доданок – це векторна сума

моментів внутрішніх сил. Вона дорівнює нулю, так як в протилежному випадку елемент Δm_i рухався б відносно інших елементів. А це означало б можливість деформації тіла, що ми виключили, ввівши поняття абсолютно твердого тіла. Отже $\sum_V [\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ti}] = 0$.

$$\text{Вираз} \quad \sum_V \Delta m_i r_i^2 = J, \text{ або } \iiint_V r^2 dm = J \quad (5.8)$$

залежить від розподілу маси тіла відносно осі обертання і називається моментом інерції тіла. Це міра інертності тіла в обертальному русі, аналог маси в поступальному русі. Вимірюється момент інерції в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$. Таким чином, основне рівняння динаміки обертального руху набуває виду

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (5.9)$$

Враховуючи, що $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (див.(2.16)), рівняння (5.9) приймає вид

$$\vec{M} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (5.10)$$

Величина $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$, яка дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутову швидкість, називається **моментом імпульсу** (аналог імпульсу $\vec{P} = m\vec{V}$ в поступальному русі).

Якщо система замкнута, тобто сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю, то момент імпульсу системи не змінюється (зберігається). Це є закон збереження моменту імпульсу, який аналогічний закону збереження імпульсу в поступальному русі.

5.3 Аналогія величин і рівнянь поступального і обертального руху. Кінетична енергія обертання тіла

Таблиця 5.1

| Поступальний рух | Обертальний рух |
|-----------------------------|------------------------------------|
| S - шлях | φ – кут повороту |
| a_t – дотичне прискорення | ε – кутове прискорення |

| | |
|--|---|
| m - маса | J – момент інерції |
| F - сила | M – момент |
| $P=mV$ - імпульс | $L=J\omega$ – момент імпульсу |
| $A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - робота | $A = \int M \cdot d\phi$ - робота |
| $N = \vec{F} \cdot \vec{V}$ - потужність | $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ - потужність |
| $\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$ - 2-й з-н Ньютона | $\vec{M} = \frac{d(J \cdot \vec{\omega})}{dt}$ - осн. рівн-ня дин. оберт. руху. |
| $E_k = \frac{m \cdot V^2}{2}$ - кінетична енергія поступального руху | $E_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}$ - кінетична енергія обертання тіла |

Доведемо останню формулу. Кінетична енергія ΔE_{ki} елемента тіла Δm_i дорівнює $\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i \cdot V_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}$. Ми врахували зв'язок лінійної і кутової швидкостей $V_i = \omega \cdot r_i$. Кінетичну енергію обертання всього тіла знайдемо як суму кінетичних енергій усіх його елементів. Врахувавши (5.8), одержуємо

$$E_k = \sum_V \Delta E_{ki} = \frac{\omega^2}{2} \sum_V \Delta m_i \cdot r_i^2 = \frac{J \cdot \omega^2}{2}. \quad (5.11)$$

Якщо тіло не тільки обертається, а ще і його центр маси рухається поступально з швидкістю V , наприклад, котиться колесо, то кінетична енергія дорівнює сумі поступальної і обертальної складових

$$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}. \quad (5.12)$$

5.4 Розрахунок моментів інерції деяких тіл. Теорема Штейнера

Як уже відмічалось, момент інерції тіла залежить не тільки від маси тіла, а і від її розподілу відносно осі обертання. Тому одне і теж тіло має різні моменти інерції відносно різних осей обертання. Розглянемо ряд прикладів розрахунку моменту інерції, користуючись його означенням (5.8).

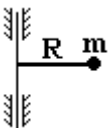


Рисунок 5.5

Приклад 1. Момент інерції матеріальної точки. Точкове тіло масою m може обертатись навколо осі, знаходячись від неї на відстані R – радіус обертання (рис.5.5). Знайти J .

За означенням (5.8) момент інерції $J = \iiint_V r^2 dm$.

В нашому випадку $r = R = \text{const}$ виносимо за інтеграл

$$\text{Тому } J = R^2 \iiint_V dm = mR^2. \quad (5.13)$$

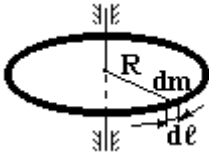


Рисунок 5.6

Приклад 2. Момент інерції обруча (труби) відносно осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна площині обруча. Задана маса m і радіус обруча R (рис.5.6). Знайти J .

. Аналогічно попередньому $J = \iiint_V r^2 dm$

$$r = R = \text{const. Тому } J = R^2 \iiint_V dm = mR^2. \quad (5.14)$$

Приклад 3. Момент інерції диска (циліндра) відносно осі, яка співпадає з віссю циліндра. Задана маса диска m і його радіус R (рис.5.7). Знайти J .

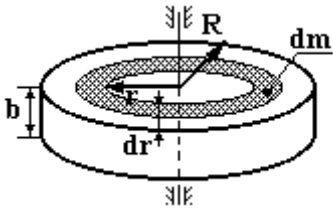


Рисунок 5.7

$$J = \iiint_V r^2 dm. \text{ Виберемо елемент } dm$$

у вигляді труби радіусом r з товщиною стінки dr і довжиною b , яка дорівнює товщині диска (висоті циліндра). Масу цієї труби знайдемо

як масу її розвертки, яка має форму паралелепіпеда

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot b \cdot 2\pi r \cdot dr. \text{ Густина } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{b \cdot \pi R^2}. \text{ Тому маємо}$$

$$J = \int_V r^2 \rho \cdot dV = \int_V r^2 \frac{m}{b \cdot \pi R^2} \cdot b \cdot 2\pi \cdot dr = \int_0^R \frac{2m}{R^2} \cdot r^3 \cdot dr = \frac{1}{2} mR^2.$$

Таким чином, момент інерції обруча (циліндра)

$$J = \frac{1}{2} mR^2. \quad (5.15)$$

Видно, що порівнюючи з обручем (трубою) маса диска (циліндра) розподілена в цілому ближче до осі обертання. Тому і одержаний момент інерції менший.

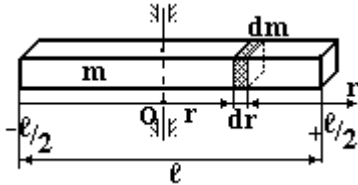


Рисунок 5.8

Приклад 4. Момент інерції довгого тонкого стержня відносно осі, яка перпендикулярна до нього і проходить через середину стержня. Задані маса m стержня і його довжина ℓ (рис.5.8). Знайти J .

Виберемо елемент dm у вигляді частини стержня довжиною dr , який віддалений від осі на відстань r .

Його маса dm порційна довжині і дорівнює $dm = \frac{m}{\ell} dr$. Момент інерції стержня

$$J = \iiint_V r^2 dm = \int_{-l/2}^{+l/2} r^2 \frac{m}{\ell} dr = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{\ell} r^3 \Big|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{1}{12} m\ell^2. \quad (5.16)$$

Приклад 5. Момент інерції кулі відносно діаметра. Задана маса m і радіус R .

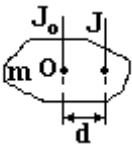


Рисунок 5.9

$$\text{Момент інерції кулі} \quad J = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5.17)$$

Для розрахунку моментів інерції тіл відносно осей, які не проходять через центр маси тіл (рис.5.9), застосовується **теорема Штейнера**: момент інерції J тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі моменту інерції J_0 цього тіла відносно осі, яка проходить через центр маси O тіла і паралельна заданій, та добуткові маси m тіла на квадрат відстані d між цими осями

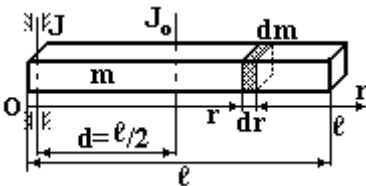


Рисунок 5.10

$$J = J_0 + md^2. \quad (5.18)$$

Впевнимось у справедливості цієї теореми на прикладі розрахунку моменту інерції довгого стержня

відносно осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через його край (рис.5.10). Безпосереднє інтегрування, як і у прикладі 4, дає

$$J = \int_0^{\ell} r^2 \frac{m}{\ell} dr = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{\ell} r^3 \Big|_0^{\ell} = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

За теоремою Штейнера, враховуючи (5.16), одержуємо

$$J = J_o + m \cdot d^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2 \quad (5.19)$$

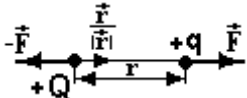
такий же результат, як і безпосереднім інтегруванням.

6 ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

6.1 Поняття про заряд. Закон збереження заряду. Взаємодія зарядів. Закон Кулона. Силові характеристики поля

Дослідами по взаємодії тіл встановлено, що деякі тіла взаємодіють з силами, набагато більшими (приблизно в 10^{39} разів), ніж сила гравітаційної взаємодії. Таким тілам приписали властивість мати заряд. Всі заряди умовно поділені на позитивні і негативні у відповідності з двозначним характером їх взаємодії: однойменні заряди відштовхуються, різнойменні притягуються. Сучасній науці відомо, що носіями заряду являються електрони та іони. Елементарним (найменшим) зарядом є заряд електрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Кл (кулон) це одиниця заряду в системі одиниць СІ. У всіх електричних явищах має місце **закон збереження заряду** - алгебраїчна сума зарядів замкнутої (ізолюваної) системи не змінюється.

В основі електростатики, тобто вчення про взаємодію нерухомих зарядів, лежить **закон Кулона** (1785р.) для точкових зарядів:



$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (6.1)$$

Сила \vec{F} , з якою взаємодіють два точкових заряди Q і q прямо пропорційна добуткові цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані r між ними і направлена по лінії, що з'єднує ці заряди

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - діелектрична стала, яка не має фізичного змісту,

а введена для узгодження одиниць вимірювання в системі СІ; ϵ - відносна діелектрична проникність середовища, яка показує у скільки разів сила взаємодії у вакуумі F_0 більша, ніж сила взаємодії F у даному середовищі. Для повітря і вакууму $\epsilon = 1$.

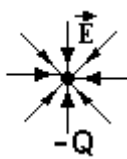
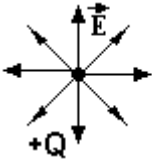
По сучасним поглядам, взаємодія зарядів відбувається через одну із форм матерії – електричне поле. Кожний заряд утворює у навколишньому середовищі електричне поле, яке і діє на внесений у нього інший заряд.

Силовою характеристикою електростатичного поля є **напруженість**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \right] \quad (6.2)$$

Ця векторна величина дорівнює силі, яка діє з боку поля на одиничний позитивний пробний заряд. Напруженість поля, створеного точковим зарядом Q дорівнює

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (6.3)$$



Вектор \vec{E} направлений по радіальним лініям від заряду Q , якщо він позитивний, і до нього, якщо він негативний.

Вектор

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (6.4)$$

Рисунок 6.1

називається вектором **індукції**

електростатичного поля. Це теж силова, векторна характеристика поля, але на відміну від напруженості, вона не залежить від властивостей середовища. Дійсно, для точкового заряду, враховуючи (6.3), маємо

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (6.5)$$

Діелектричні властивості середовища (ϵ і ϵ_0) в цій формулі відсутні.

Графічно електростатичне поле зображається **силовими лініями**. Це лінії, дотична до яких в кожній точці співпадає з вектором напруженості \vec{E} (індукції \vec{D}) (рис.6.2). Силкові лінії починаються на позитивних і закінчуються на негативних зарядах.

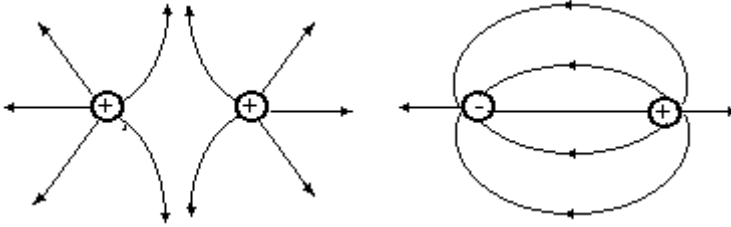


Рисунок 6.2

Вони не перетинаються, так як вектори напруженості і індукції однозначні. У точці ж перетину напрямок цих векторів не визначений.

По густині силових ліній можна судити про величину \vec{E} , або \vec{D} . Вони більші там, де густина ліній більша.

6.2 Принцип суперпозиції та його застосування до розрахунку електростатичного поля

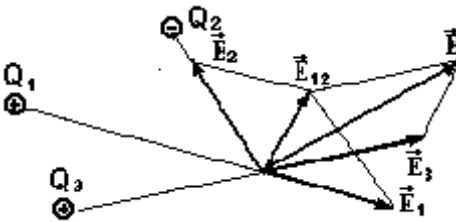


Рисунок 6.3

Якщо поле утворене декількома зарядами, то вектор напруженості результуючого поля знаходиться за **принципом суперпозиції**, як векторна сума напруженостей, утворених в даній точці кожним зарядом незалежно від інших зарядів (рис.6.3).

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \dots + \vec{D}_n = \sum_{i=1}^n \vec{D}_i. \quad (6.6)$$

Ступінь зарядженості тіл, які не можна вважати точковими, характеризуються такими величинами:

лінійна густина заряду – заряд одиниці довжини

$$\tau = \frac{q}{\ell} = \frac{dq}{d\ell}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]; \quad (6.7)$$

поверхнева густина заряду – заряд одиниці площі

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{dq}{dV}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]; \quad (6.8)$$

об'ємна густина заряду – заряд одиниці об'єму

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]. \quad (6.9)$$

Характеристики полів, утворених неточковими зарядами, напруженість розраховується також за принципом суперпозиції, але формули (6.6) переходить у відповідні інтеграли (криволінійний, поверхневий чи об'ємний), наприклад, для напруженостей

$$\vec{E} = \int_{\ell} d\vec{E}, \quad \vec{E} = \iint_S d\vec{E}, \quad \vec{E} = \iiint_V d\vec{E}, \quad (6.10)$$

де $d\vec{E}$ - напруженість поля, створеного нескінченно малим елементом тіла $d\ell$, dS чи dV .

Розглянемо декілька прикладів застосування принципу суперпозиції для розрахунку поля заряджених тіл.

Приклад 1. Розрахувати напруженість поля нескінченної зарядженої осі в точці, яка знаходиться на відстані R від неї. Лінійна густина заряду осі дорівнює τ (рис.6.4).

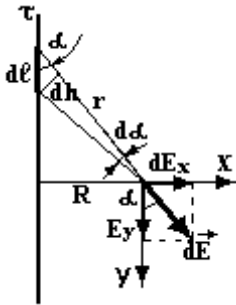


Рисунок 6.4

Нескінченно малий елемент $d\ell$ (точковий заряд) створює напруженість

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad \text{Заряд цього елемента}$$

дорівнює

$$dq = \tau \cdot d\ell = \tau \frac{dh}{\sin \alpha} = \tau \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \tau \frac{R \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Відстань } r = \frac{R}{\sin \alpha}. \quad \text{Одержуємо } dE = \frac{\tau \cdot R \cdot d\alpha \cdot \sin^2 \alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\tau \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Знаходимо проєкції цього вектора на осі координат:

$dE_x = dE \cdot \sin \alpha$, $dE_y = dE \cdot \cos \alpha$. Інтегрування по всій осі зводиться до інтегрування по куту α в межах від 0 до π .

$$E_x = \int_0^\pi \frac{\tau \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon R} . \quad (6.11)$$

$$E_y = \int_0^\pi \frac{\tau \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \sin \alpha \Big|_0^\pi = 0 .$$

Так як $E_y = 0$, результуючий вектор напруженості $E = E_x$ і направлений вздовж осі ox , тобто перпендикулярно до зарядженої осі.

Приклад 2. Розрахувати напруженість поля нескінченної зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ (рис.6.5).

Положення нескінченно малого елемента dS , заряд якого $dq = \sigma \cdot dS$, задамо полярними координатами ρ і α (рис.6.5). У цих координатах $dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha$. Знайдемо напруженість dE_z , яка перпендикулярна до площини.

$$dE_z = dE \cdot \cos \varphi = dE \frac{h}{r} = \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{h}{r^3} = \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\alpha}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{h}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}}$$

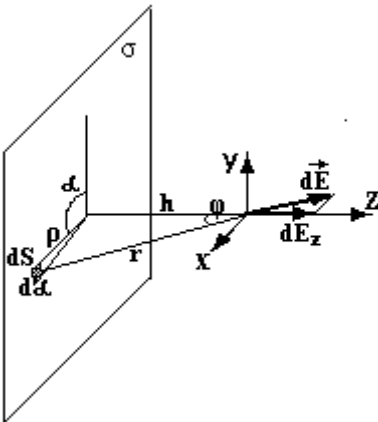


Рисунок 6.5

Щоб охопити всю площину, кут α повинен змінюватись від 0 до 2π , а радіус ρ – від 0 до ∞ . Беремо подвійний інтеграл в цих межах

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{\rho \cdot d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\sigma h}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{d(\rho^2 + h^2)}{2(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{\sigma h}{2\epsilon_0\epsilon} (\rho^2 + h^2)^{-1/2} \Big|_0^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \end{aligned}$$

Проекція вектора напруженості на площину, перпендикулярну до осі OZ дорівнює нулю. В цьому можна впевнитись математично, замінивши $\cos \varphi$ на $\sin \varphi$, а можна і такими

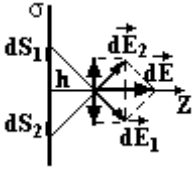


Рисунок 6.6

площини

міркуваннями: на нескінченній площині завжди можна знайти елемент dS_2 , симетричний dS_1 відносно перпендикуляра h до площини (рис.6.6). Ці елементи створюють однакові вектори напруженості dE_1 і dE_2 , z -ві проєкції яких співпадають, а перпендикулярні проєкції взаємно протилежні і тому компенсують одна одну. Отже вектор напруженості поля нескінченної зарядженої

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \quad (6.12)$$

перпендикулярний до неї і не залежить від положення точки, тобто однакове в усіх точках простору. Такі поля називаються **однорідними**.

6.3 Теорема Остроградського-Гауса та її застосування до розрахунку електростатичного поля заряджених тіл

Для спрощення розрахунку полів симетричних заряджених тіл застосовується теорема **Остроградського – Гауса**. Введемо поняття

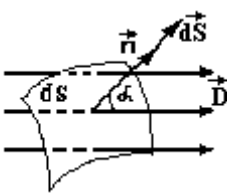


Рисунок 6.7

потoku вектора. **Потоком $d\Phi$ вектора \vec{D}** через елементарну площадку dS називається добуток вектора \vec{D} на величину площадки dS і на косинус кута α між вектором \vec{D} і нормальним до площадки dS одиничним вектором \vec{n} (рис.6.7).

$$d\Phi = D \cdot dS \cdot \cos \alpha = \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{D} \cdot d\vec{S}. \quad (6.14)$$

Площадку dS прийнято вважати вектором, який за напрямком співпадає з вектором \vec{n} . Потік через всю поверхню знаходиться шляхом інтегрування по поверхні S



Рисунок 6.8

$$\Phi = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n}. \quad (6.15)$$

Теорема **Остроградського – Гауса** стверджує, що потік вектора електростатичної індукції через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, охоплених цією

поверхнею.

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = \sum_V q_i. \quad (6.16)$$

Якщо заряд, наприклад, q_1 знаходиться за межами замкнутої поверхні (рис.6.8), потік дорівнює нулю. Дійсно, скільки силових ліній входить в об'єм, обмежений поверхнею, стільки ж і виходить. Силкові ж лінії від заряду q_2 , який знаходиться всередині поверхні, тільки виходять з неї.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми для розрахунку індукції чи напруженості електростатичного поля.

Приклад 1. Розрахувати індукцію і напруженість електричного поля утвореного зарядженою по об'єму до заряду q кулі радіусом R .

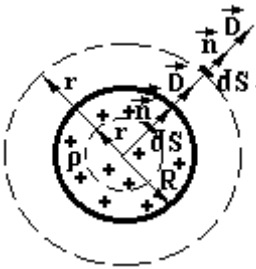


Рисунок 6.9

Увесь простір поділився на дві області: за межами кулі і всередині кулі. Розглянемо ці області окремо.

- 1) За межами кулі $r > R$. Оскільки форма поверхні S в теоремі Остроградського-Гауса може бути довільною, але обов'язково замкнутою, вибираємо її у вигляді сфери радіусом r , центр якої співпадає з центром кулі (рис.6.9). За

теоремою маємо $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S D \cdot dS \cos 0^\circ = D \iint_S dS = D \cdot 4\pi r^2 = q$

Для різних точок сфери вектор D однаковий за величиною, так як всі вони однаково розміщені по відношенню до заряду q . Тому його винесли за знак інтегралу, а $\iint_S dS = 4\pi r^2$ дає площу поверхні сфери.

Одержуємо

$$D = \frac{q}{4\pi \cdot r^2} = \sigma \quad \text{і} \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon \cdot r^2}. \quad (6.17)$$

Ці вирази співпадають з (6.3) та (6.5) для поля точкового заряду. Отже, поле зарядженої кулі за її межами таке ж, як і поле точкового заряду, якщо заряд кулі зосередити в її центрі. Виразимо індукцію і напруженість через об'ємну густину заряду, яка за

означенням (6.9) дорівнює $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Вирази (6.17)

приймуть вид

$$D = \frac{R^3 \rho}{3r^2}; \quad \text{і} \quad E = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 \epsilon r^2}; \quad (6.18)$$

2) Всередині кулі $r < R$, тому в правій частині виразу (6.16) необхідно ставити заряд, який вирізається сферою радіусом r (рис.6.9).

Одержуємо $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = D \cdot 4\pi \cdot r^2 = \rho \cdot V_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

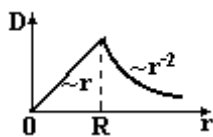


Рисунок 6.10

$$D = \frac{1}{3}\rho r \quad \text{і} \quad E = \frac{1}{3\epsilon_0 \epsilon} \rho r \quad (6.19)$$

Графік залежності індукції D від радіуса r показана на рис.6.10. При $r = R$ вирази (6.18) і (6.19) дають однакові величини D і E . Отже на поверхні кулі індукція і напруженість не зазнають розриву.

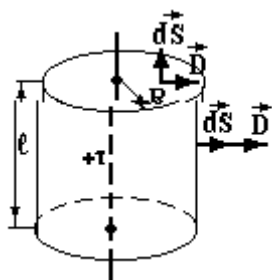


Рисунок 6.11

Приклад 2. Розрахувати індукцію і напруженість електричного поля, утвореного нескінченно довгою зарядженою віссю (циліндром) з лінійною густиною заряду τ (рис.6.11).

Поверхню S виберемо у вигляді циліндра, вісь якого співпадає з зарядженою віссю. На основах цього циліндра кут між \vec{D} і $d\vec{S}$ дорівнює 90° . Тому потік через основи дорівнює нулю.

Для елементів $d\vec{S}$ бічної поверхні цей кут дорівнює 0° . Отже за теоремою Остроградського-Гауса можна записати

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{D} d\vec{S} + \iint_{S_{\text{бічн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D 2\pi R l = q = \tau l. \quad \text{Одержуємо}$$

$$D = \frac{\tau}{2\pi R}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R}; \quad (6.20).$$

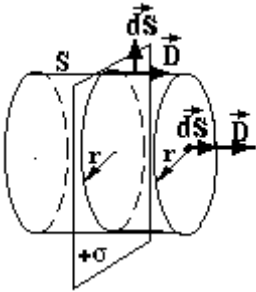


Рисунок 6.12

Результат співпадає з (6.11), одержаний безпосереднім інтегруванням, але значно простіше.

Приклад 3. Розрахувати індукцію і напруженість електростатичного поля, утвореного нескінченною зарядженою площиною з поверхневою густиною заряду σ (рис.6.12).

Поверхню S вибираємо у вигляді циліндра, основи якого радіусом r паралельні площині. Для бічної поверхні кут між \vec{D} і $d\vec{S}$ дорівнює 90° . Тому потік через бічну поверхню дорівнює нулю.

Для елементів $d\vec{S}$ основ цей кут дорівнює 0° . Отже можна записати

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{бічн}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2D \cdot \pi r^2 = \sigma \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{Одержуємо}$$

$$D = \frac{\sigma}{2}; \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0};$$

(6.21).

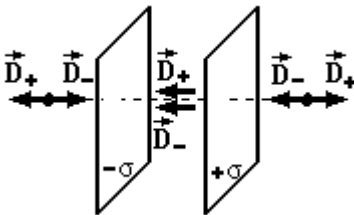


Рисунок 6.13

Приклад 4. Розрахувати індукцію і напруженість електростатичного поля, утвореного двома паралельними нескінченними площинами, різнойменно зарядженими до поверхневого заряду густиною σ ($+\sigma$ і $-\sigma$). На рис.6.13 показані вектори індукції від позитивної пластини \vec{D}_+ і

від негативної \vec{D}_- . Вони взаємно протилежні за межами пластин і однаково направлені між пластинами. За принципом суперпозиції при однакових за величиною густинах заряду і врахувавши (6.21) одержуємо між пластинами

$$\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2} = \sigma; \quad \text{і} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (6.22)$$

За межами пластин $\vec{D} = \vec{D}_+ + \vec{D}_- = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2} = 0$ і $E = 0$, тобто поле відсутнє.

6.4 Робота в електростатичному полі. Різниця потенціалів. Потенціал. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля

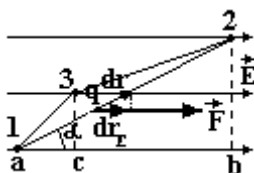


Рисунок 6.14

Нехай у деякому електростатичному полі переміщується заряд q із точки 1 в точку 2 (рис.6.14). На заряд діє сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Тоді за означенням (4.1) елементарна механічна робота

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \cdot E \cdot \cos \alpha \cdot dr = q \cdot E \cdot dr_E$$

Тут α – кут між вектором \vec{E} і напрямком переміщення $d\vec{r}$; $dr_E = dr \cdot \cos \alpha$ проекція вектора переміщення dr на напрямок напруженості електричного поля. Загальна робота знаходиться шляхом інтегрування

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 E \cdot \cos \alpha \cdot dr = q \int_1^2 E \cdot dr_E, \quad (6.23)$$

Покажемо, що робота в електричному полі не залежить від форми шляху, а визначається тільки зарядом q і положеннями початкової і кінцевої точок та напруженістю електричного поля \vec{E} .

Спочатку розглянемо для однорідного електричного поля, для якого $\vec{E} = \text{const}$. Тоді у виразі (6.23) E виноситься за інтеграл, а

інтеграл $\int_1^2 dr_E = \ell_{ab}$ дає сумарну проекцію траєкторії заряду (відрізка

1-2) на напрямок напруженості електричного поля. При переміщенні заряду із точки 1 в точку 2 через якусь проміжну точку 3 не змінить

вище вказаного інтегралу. Дійсно

$$\int_1^2 dr_E = \int_1^3 dr_E + \int_3^2 dr_E = l_{ac} + l_{cb} = l_{ab}.$$

Отже, робота в однорідному електричному полі не залежить від форми траєкторії, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок. У випадку неоднорідного поля це твердження залишається справедливим. Дійсно, неоднорідне поле можна розбити на ділянки однорідності, для кожного із яких твердження про незалежність роботи від форми шляху справедливе. А оскільки загальна робота дорівнює сумі робіт на окремих ділянках, то і вона не буде залежати від форми шляху.

Якщо (6.23) поділити на заряд q , то в правій частині одержуємо вираз, який не залежить від величини заряду, а визначається тільки положенням початкової і кінцевої точок та напруженістю поля. Це дає можливість ввести нову енергетичну характеристику поля: потенціал і різницю потенціалів. Із (6.23) одержуємо

$$\frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 E \cos \alpha \cdot dr = \phi_1 - \phi_2 \quad (6.24).$$

$\phi_1 - \phi_2$ - **різниця потенціалів**, дорівнює роботі, яку виконують сили електростатичного поля при переміщенні одиночного позитивного заряду із точки 1 в точку 2.

Отже робота в електростатичному полі дорівнює добуткові заряду на різницю потенціалів вихідної і кінцевої точок

$$A = q(\phi_1 - \phi_2). \quad (6.25)$$

Щоб задати потенціал необхідно, так же як і для потенціальної енергії, задати його початок відліку, тобто його нульовий рівень. Логічно вважати потенціал рівним нулю в тій точці, де поле відсутнє, тобто на нескінченно віддаленій від заряду точці. Якщо точку 2 віддалити в нескінченність, одержуємо потенціал

$$\phi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{A_{r,\infty}}{q} \quad (6.26).$$

Потенціал – це робота сил електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду із даної точки поля r в нескінченність, де потенціал поля прийнятий за нуль. Потенціал і його різниця, як і робота, є величинами скалярними. Вимірюються у вольтах (В). $1\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$.

Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ в математиці називається циркуляцією вектора напруженості. Враховуючи (6.24), ясно, що такий інтеграл дорівнює нулю (початкова і кінцева точки переміщення заряду співпадають $\varphi_1 = \varphi_2$). Отже умова $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ є необхідною і достатньою умовою потенціального характеру поля.

Знайдемо потенціал поля точкового заряду. За означенням

$$(6.26) \quad \varphi = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_r^{\infty} E \cos \alpha dr. \quad \text{Будемо}$$

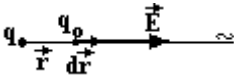


Рисунок 6.15

переміщувати пробний заряд q_0 по радіальній лінії (рис.6.15). Тоді кут $\alpha = 0^\circ$ і з врахуванням (6.3) одержуємо

$$(6.27) \quad \varphi = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Для потенціалу, як і для напруженості (розділ 6.2), справедливий **принцип суперпозиції**:

$$(6.28) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

потенціал поля, створеного декількома зарядами, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, створених у цій точці кожним зарядом. Якщо тіло не точкове, то сума (6.28) переходить в інтеграл.

6.5 Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля

Геометричне місце точок однакового потенціалу називається **еквіпотенціальною поверхнею**. Встановимо зв'язок між напруженістю і потенціалом. Нехай маємо дві еквіпотенціальні поверхні з потенціалами φ і $\varphi + d\varphi$ (рис.6.16). Перемістимо заряд q із однієї поверхню на другу. Робота для такого переміщення дорівнює:

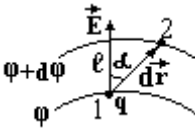


Рисунок 6.16

$$dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -q \cdot d\varphi, \text{ або через}$$

напруженість

$$dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot \cos\alpha = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Прирівнюємо праві частини цих рівнянь $q\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \cdot d\varphi$, або

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -\text{grad}\varphi = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (6.29)$$

Із курсу математики відомо, що взяття похідної із скалярної функції (потенціалу) за напрямком дає векторну функцію (6.29), яка називається градієнтом скалярної величини φ і дає швидкість її зміни з координатою. Напрямок вектора градієнта вказує напрямком найбільш швидкого зростання функції φ з координатою. Отже, напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу з протилежним знаком.

Для однорідного поля напруженість дорівнює відношенню різниці потенціалів між двома точками до проекції відстані між ними на напрямок поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell}.$$

(6.30)

Еквіпотенціальні і силові лінії взаємно перпендикулярні. Дійсно, при переміщенні заряду по еквіпотенціальній поверхні робота дорівнює нулю ($\Delta\varphi = 0$). Але на заряд діє сила, і щоб її робота $dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \cdot \cos\alpha$ дорівнювала нулю, необхідно щоб кут між силою і переміщенням становив 90° ($\cos 90^\circ = 0$).

6.6 Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів

Досліди показують, що при зарядженні провідників змінюється і їхній потенціал, причому між ними має місце лінійна залежність

$$q = C\varphi. \quad (6.31)$$

Коефіцієнт пропорційності
$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi} = \frac{dq}{d\varphi}, \quad (6.32)$$

тобто відношення заряду провідника до його потенціалу називається **електроємністю** провідника. Одиницею вимірювання електроємності в системі СІ є фарада (Ф). Це електроємність такого провідника, при зміні заряду якого на 1 Кл його потенціал змінюється на 1 В. Менші одиниці електроємності: $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$, $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$, $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$.

Для системи провідників (конденсаторів) їхня взаємна електроємність

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

(6.33)

де $\varphi_1 - \varphi_2$ різниця потенціалів між тілами, q – заряд одного із тіл.

Приклад. Знайти електроємність плоского конденсатора.

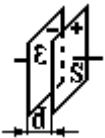


Рисунок 6.17

Плоский конденсатор (рис. 6.17) уявляє собою дві паралельні пластини площею S . Простір між пластинами заповнений діелектриком з відносною діелектричною проникністю ϵ . Як правило відстань між пластинами d набагато менша від розмірів пластин. Тому крайовими ефектами можна знехтувати і вважати поле між пластинами однорідним. Із (6.30) з врахуванням (6.21) одержуємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} \cdot d = \frac{qd}{S \epsilon \epsilon_0}; \text{ Тоді}$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (6.34)$$

Висновок. Вираз (6.34) показує, що електроємність не залежить від заряду, а визначається геометричними розмірами конденсаторів та властивостями діелектрика.

При з'єднанні конденсаторів у батареї загальна електроємність знаходиться так:

при паралельному з'єднанні $C = \sum_{i=1}^n C_i$ (6.35)

як сума електроємностей конденсаторів;

при послідовному з'єднанні $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$. (6.36)

Обернена електроємність батареї дорівнює сумі обернених електроємностей конденсаторів.

6.7 Енергія та густина енергії електростатичного поля

Для того, щоб зарядити тіло необхідно виконати роботу $dA = \varphi \cdot dq$ по перенесенню порції заряду dq проти сил відштовхування від раніше перенесеного однойменного заряду q . Ця робота перетворюється в потенціальну енергію зарядженого тіла (в енергію електричного поля). Підставивши φ із (6.31), одержимо

$$dA = \frac{q}{C} \cdot dq. \text{ Інтегруємо по зарядові в інтервалі від } 0 \text{ до } q.$$

$$W = A = \int_0^q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (6.37)$$

Останні два вирази записані із врахуванням співвідношення (6.31).

Об'ємна густина енергії електростатичного поля це енергія, яка зосереджена в одиниці об'єму простору, де це поле утворене

$$w = \frac{W}{V} = \frac{dW}{dV} \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad (6.38)$$

Знайдемо її на прикладі плоского конденсатора. Об'єм $V = S \cdot d$. Із (6.37), (6.38), (6.34) і враховуючи (6.22), одержуємо

$$w = \frac{W}{V} = \frac{q^2}{2C \cdot Sd} = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S^2} = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{DE}{2}.$$

Прийнявши до уваги (6.4) остаточно одержимо три вирази для об'ємної густини енергії електричного поля

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad (6.39)$$

7 ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ

Дамо визначення декільком поняттям:

Вузол електричної схеми – це точка, в якій сходяться більше двох провідників.

Вітка – ділянка схеми між двома сусідніми вузлами.

Контур - довільна замкнута ділянка схеми.

Лінійно незалежні контури – це такі, які відрізняються по крайній мірі однією віткою.

Різні методи розрахунку електричних схем базуються на законі Ома та двох законах Кірхгофа. Сформулюємо їх.

7.1 Закон Ома

Закон Ома. Струм I у нерозгалуженому контурі прямо пропорційний електрорушійній силі ε і обернено пропорційний сумі зовнішнього R та внутрішнього r опорів

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (7.1)$$

Для ділянки схеми (вітки) струм I прямо пропорційний різниці потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$, або напрузі U на кінцях ділянки і обернено пропорційний опору вітки R

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} = \frac{U}{R}. \quad (7.2)$$

7.2 Закони Кірхгофа для розгалужених електричних кіл

У 1847 р. німецький фізик Г.Кірхгоф сформулював два закони, які носять його ім'я:

Перший закон: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю

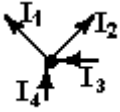


Рисунок 7.1

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (7.3)$$

Струми, які направлені до вузла і від нього беруться з протилежними знаками (рис.7.1). Наприклад для рис. 6.1 рівняння 1-го закону Кірхгофа має вид

$$I_4 + I_3 - I_2 - I_1 = 0$$

Другий закон: Алгебраїчна сума падінь напруг вздовж будь-якого контуру дорівнює алгебраїчній сумі електрорушійних сил (е.р.с.), які увімкнені в цей же контур.

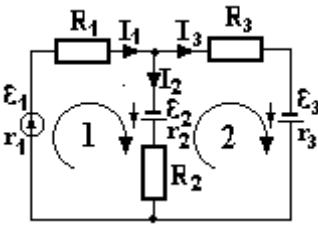


Рисунок 7.2

для контуру 1

для контуру 2

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \quad (7.4)$$

В цих сумах знак (+) береться тоді, коли з довільно вибраним напрямком обходу контуру співпадає довільно вибраний напрямок струму у вітці, чи напрямок дії е.р.с. В протилежному випадку береться (-). Наприклад, для зображеної схеми (рис.7.2) рівняння 2-го закону Кірхгофа мають вид:

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$I_3(R_3 + r_3) - I_2(R_2 + r_2) = \varepsilon_3 - \varepsilon_2.$$

7.3 Закон Джоуля-Ленца

Відомий ще один закон струму – це закон про теплову дію струму, закон Джоуля-Ленца: якщо електричний струм не виконую механічної роботи, то вся його енергію перетворюється в тепло

$$Q = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R} t. \quad (7.5)$$

Тут Q – кількість теплоти, I – струм, U – напруга, R – опір, t – час.

8 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

8.1 Магнітне поле рухомих зарядів. Індукція

магнітного поля. Закон Ампера

У 1820 році датський фізик Г.Ерстед виявив, що поблизу провідників із струмом магнітна стрілка зазнає орієнтуючої дії, тобто струм утворює магнітне поле. Так як струм – це направлений рух зарядів, постали питання: чи всякий рухомий заряд утворює магнітне поле, чи тільки вільні заряди? Яка роль іонів кристалічної ґратки?

На перше питання відповів російський радянський фізик А.А.Ейхенвальд (1964-1944). Він у 1901 році провів дослід по виявленню магнітного поля поблизу конвекційного струму (рис.8.1). Заряджений диск приводився в обертання. Виявилось, що незалежно

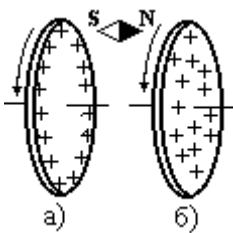


Рисунок 8.1

від знаку заряду, а також від того, металевий (рис.8.1, а) чи діелектричний (8.1, б) диск, магнітна стрілка поблизу них орієнтувалась певним чином. Причому, коли диски не обертались, орієнтуючий ефект був відсутній. Але роль кристалічної ґратки цими дослідями не була виявлена.

У 1911 році російський академік А.Ф.Іоффе виявив магнітне поле, утворене пучком електронів (рис.8.2). Тепер електрони рухались не в кристалічній ґратці, а у вакуумі.

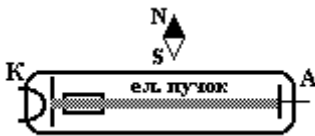


Рисунок 8.2

Отже, всякий рухомий заряд утворює магнітне поле.

Орієнтація магнітної стрілки у магнітному полі певним чином свідчить про те, що магнітному полю властивий напрямок, а сили його характеристики - величини векторні. Прийнято, що напрямок магнітного поля і його силових характеристик (індукції \vec{B} і напруженості \vec{H}) вказує північний полюс магнітної стрілки. Графічно магнітне поле зображається **лініями індукції**, це лінії, дотичні до яких у кожній точці співпадають з вектором індукції (рис.8.3). На рис.8.3 струм тече на нас. Досліди показали, що лінії індукції завжди

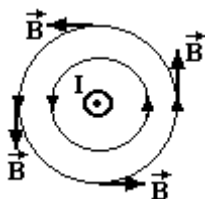


Рисунок 8.3

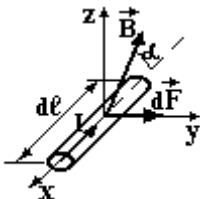


Рисунок 8.4

замкнуті. Для прямолінійного провідника зі струмом напрямком силових ліній можна визначити за **правилом правого гвинта**: коли поступальний рух правого гвинта співпадає зі струмом, напрямком його обертання вказує напрямком ліній індукції.

Взаємодію магнітного поля і провідників із струмом детально вивчав французький фізик А.Ампер. Він у 1820 році встановив, що сила, яка діє на провідник із струмом прямо пропорційна величині струму, довжині провідника і синусу кута між струмом і напрямком магнітного поля (рис.8.4) і направлена перпендикулярно до провідника і магнітного поля

$$dF = B \cdot I \cdot d\ell \cdot \sin \alpha. \quad (8.1)$$

Сила максимальна, коли $\alpha = 90^\circ$, тобто коли провідник із струмом перпендикулярний до магнітного поля. Тоді **індукція**

$$B = \frac{dF_{\text{макс}}}{I \cdot d\ell} \left[\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл} \right] \quad (8.2)$$

чисельно дорівнює максимальній силі, що діє на 1м прямолінійного провідника із струмом в 1А, який перпендикулярний до магнітного поля. Вимірюється індукція в системі СІ в теслах (Тл).

Якщо довжину провідника розглядати як вектор, напрямком якого співпадає із напрямком струму, то закон Ампера (8.1) можна записати у векторній формі

$$d\vec{F} = I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]. \quad (8.3)$$

Напрямок сили Ампера можна визначити за **правилом лівої руки**: якщо ліву руку розмістити так, щоб силові лінії входили в долоню, чотири витягнутих пальці направити по струмові, то відігнутий великий палець вкаже напрямком сили.

8.2 Закон Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції для магнітного поля

Закон трьох французьких вчених Біо (1774-1862), Савара (1791-1841) і Лапласа (1749-1827) – це експериментальний закон, який

визначає індукцію $d\vec{B}$ магнітного поля, створеного елементом провідника довжиною

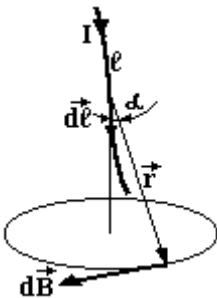


Рисунок 8.5

$d\vec{\ell}$ із струмом I в точці, віддаленій від цього елемента на відстань \vec{r} (рис.8.5)

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}], \quad (8.4)$$

або в скалярній формі

$$dB = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \sin \alpha \cdot d\ell. \quad (8.5)$$

Тут: μ – відносна магнітна проникність середовища, показує у скільки разів індукція магнітного поля в середовищі більша, ніж у вакуумі. Це безрозмірна величина; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала, введена в системі СІ для узгодження одиниць вимірювання. В електростатиці аналогічною є діелектрична стала ϵ_0 .

Крім індукції, аналогічно електростатичному полю, в магнетизмі вводиться ще одна силова характеристика магнітного поля – напруженість

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0}. \quad (8.6)$$

Закон Біо-Савара-Лапласа для напруженості має вид

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}], \text{ або } dH = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha \cdot d\ell. \quad (8.7)$$

Вираз (8.7) показує, що напруженість не залежить від магнітних властивостей середовища. Вимірюється напруженість в А/м.

Закон Біо-Савара-Лапласа в магнетизмі аналогічний закону Кулона в електростатиці. Він використовується для розрахунку магнітних полів, утворених провідниками зі струмом різних за формою.

За принципом суперпозиції: індукція (напруженість) магнітного поля будь-якого провідника зі струмом дорівнює **векторній** сумі індукцій (напруженостей), створених у даній точці кожним елементом $d\vec{\ell}$ провідника. Для цього необхідно розраховувати криволінійні інтеграли

$$\vec{B} = \int_{\ell} d\vec{B}, \quad \vec{H} = \int_{\ell} d\vec{H}. \quad (8.8)$$

8.3 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля на осі колового струму

Знайдемо напруженість магнітного поля на осі колового провідника радіусом R , по якому тече струм I . Положення точки задамо висотою h від центра кола (рис.8.6). Спочатку визначимо напрямок вектора \vec{H} . Для цього виберемо два однакових діаметрально протилежних елементи провідника $d\vec{\ell}_1$ і $d\vec{\ell}_2$. Вони створюють у даній точці вектори напруженості $d\vec{H}_1$ і $d\vec{H}_2$, які перпендикулярні до відповідних радіус-векторів і однакові за величиною. Спроектуємо ці вектори напруженостей на осі x і y . З

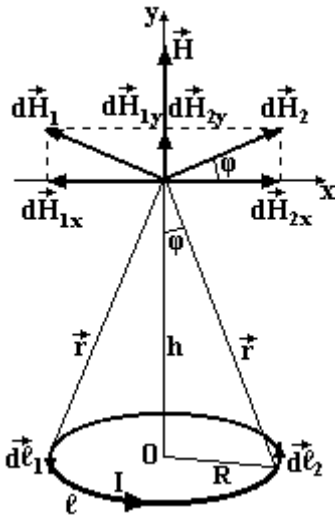


Рисунок 8.6

рисунка видно, що $d\vec{H}_{1x} = -d\vec{H}_{2x}$, тобто попарно компенсуються. Проекції на вісь y направлені паралельно, тому будемо додавати їх алгебраїчно. Таким чином результуючий вектор направлений вздовж осі кільця у відповідності з **правилом правого гвинта**: якщо обертати гвинт в напрямку струму, його поступальний рух вздовж осі вказує напрямок вектора напруженості.

За принципом суперпозиції (8.8), враховуючи (8.7), маємо

$$H = \int dH_y = \int dH \cdot \sin \varphi = \int \frac{I}{4\pi r^2} d\ell \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Кут α між вектором \vec{r} та $d\vec{\ell}$

дорівнює 90° ; $\sin \varphi = \frac{R}{r}$; $r = \sqrt{R^2 + h^2}$.

$$H = \frac{I \cdot R}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_{\ell} d\ell. \text{ Так як } \int_{\ell} d\ell = \ell = 2\pi R \text{ є довжина кола,}$$

одержуємо

$$H = \frac{I \cdot R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (8.9)$$

В центрі колового струму при $h = 0$ маємо

$$H = \frac{I}{2R}; \quad B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (8.10)$$

8.4 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника із струмом

Положення точки відносно прямолінійного провідника задамо перпендикуляром r_0 до нього (рис.8.7). Очевидно, що вектори $d\vec{H}$

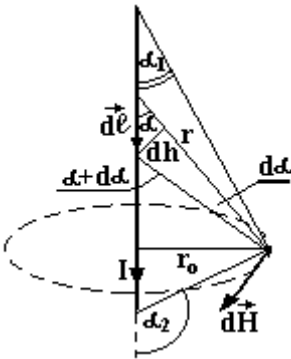


Рисунок 8.7

від усіх елементів $d\vec{\ell}$ провідника однаково направлені. Всі вони перпендикулярні до площини, в якій лежать провідник ℓ і перпендикуляр r_0 . Тому вектори $d\vec{H}$ будемо додавати алгебраїчно. Із (8.7) та (8.8) маємо

$$H = \int_{\ell} dH = \int_{\ell} \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha \cdot d\ell. \quad (8.11)$$

Із рисунка (8.7) видно, що $r = \frac{r_0}{\sin \alpha}$;

$$d\ell = \frac{dh}{\sin \alpha} = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{r_0 \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \text{ Підстановка в}$$

(8.11) після скорочень дає

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} \int_{\ell} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Тут α_1 і α_2 – кути, під якими видно провідник із точки, в якій

розраховується напруженість. Таким чином, для прямолінійного провідника зі струмом маємо

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2); \quad B = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (8.12)$$

Для прямолінійного нескінченного провідника $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 180^\circ$.

$$\text{Одержуємо} \quad H = \frac{I}{2\pi r_0}; \quad B = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

(8.13)

8.5 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму та його застосування для розрахунку магнітного поля

Криволінійний інтеграл виду $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ називається

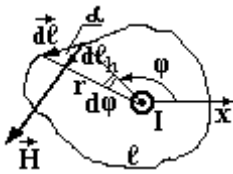


Рисунок 8.8

циркуляцією вектора напруженості магнітного поля. (для ел. поля див. розділ 6.4). Знайдемо її значення на прикладі магнітного поля, створеного прямолінійним нескінченим провідником із струмом I . Виберемо довільний замкнутий контур ℓ , який охоплює провідник (рис.8.8). Нехай струм тече на нас. За

правилом правого гвинта (див розділ 8.1) визначаємо напрямок вектора напруженості. Будемо обходити контур проти годинникової стрілки. Враховуючи (8.13), а також те, що

$d\ell_h = r \cdot d\varphi$, одержуємо

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} H \cdot d\ell \cdot \cos \alpha = \oint_{\ell} H \cdot d\ell_h = \oint_{\ell} \frac{I}{2\pi r} r \cdot d\varphi = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} 2\pi = I$$

В загальному випадку
$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (8.14)$$

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплює цей контур. Це співвідношення називають ще **законом повного струму**. В (8.14) струми, напрямком яких співпадає з поступальним рухом правого гвинта, який обертається в напрямку обходу контуру, беруться зі знаком (+), а протилежні - зі знаком (-). Слід зауважити, що форма контуру ℓ може бути довільною.

Той факт, що циркуляція вектора напруженості магнітного поля відмінна від нуля, свідчить про те, що магнітне поле не потенціальне, а вихрове. Нагадаємо, що для електричного поля циркуляція вектора його напруженості дорівнювала нулю (див. розділ 6.4).

Застосуємо закон повного струму (8.14) для розрахунку магнітного поля довгого соленоїда та тороїда.

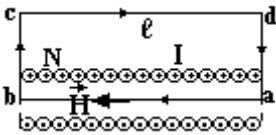


Рисунок 8.9

Приклад 1. Знайти напруженість і індукцію магнітного поля соленоїда. (рис.8.9). Виберемо контур ℓ у формі прямокутника. Будемо нехтувати крайовими ефектами, тобто будемо вважати, що магнітне поле зосереджене всередині котушки, а за її межами напруженість дорівнює нулю.

Інтеграл по контуру в (8.14) розіб'ємо на чотири інтеграли по чотирьом відрізкам вибраного контуру. Одержуємо для лівої частини (8.14)

$$\begin{aligned} \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{\ell} + 0 + 0 + 0 = \\ &= \int_0^{\ell} H \cdot d\ell = H \int_0^{\ell} d\ell = H \cdot \ell \end{aligned}$$

У правій частині (8.14) сума струмів дорівнює $\sum_{i=1}^N I_i = I \cdot N$.

Прирівнюючи, одержуємо $H \cdot \ell = I \cdot N$. Отже напруженість і індукція всередині соленоїда

$$H = \frac{I \cdot N}{\ell} = I \cdot n, \quad B = \frac{\mu\mu_0 I \cdot N}{\ell} = \mu\mu_0 I \cdot n \quad (8.15)$$

Приклад 2. Знайти напруженість і індукцію магнітного поля тороїда.

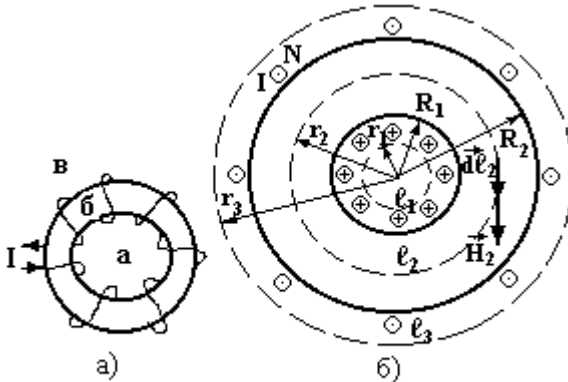


Рисунок 8.10

Тороїд – це котушка, намотана на тороїдальний сердечник (бублик) (рис.8.10). Розрахуємо напруженість магнітного поля для трьох областей, показаних на рис. 8.10, а): 1) всередині осердя; 2) в осерді; 3) зовні за межами осердя.

Виберемо в кожній області кільцевий контур ℓ радіусом r і запишемо для кожного із них закон повного струму (8.14).

а) $r < R_1$. $\oint_{\ell_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = \sum_{i=1}^n I_i = 0$, так як в контур не потрапляє ні один

виток зі струмом. Отже $H_1 = 0$.

$$\text{б) } R_1 < r_2 < R_2. \quad \oint_{\ell_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = \sum_{i=1}^n I_i = I \cdot N \quad H_2 \cdot 2\pi \cdot r_2 = I \cdot N ;$$

$$H_2 = \frac{I \cdot N}{2\pi \cdot r_2} .$$

в) $r_3 > R_2$.

$$\oint_{\ell_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{\ell}_3 = \sum_{i=1}^n I_i = 0, \text{ так як контур } \ell_3 \text{ охоплює однакову кількість}$$

витків з протилежно направленими струмами.

Таким чином, за межами осердя поле відсутнє, а всередині осердя

$$H = \frac{I \cdot N}{2\pi \cdot r} . \quad (8.16)$$

Звертає на себе увагу, що поле тороїда, на відміну від довгого соленоїда, неоднорідне, не дивлячись на те, що тороїд можна одержати із довгого соленоїда, зігнувши його у бублик.

8.6 Дія магнітного поля на рухомий заряд (сила Лоренца).

Рух заряду в магнітному полі

Сила Лоренца \vec{F} – це сила, яка діє на один рухомий заряд q у магнітному полі індукцією \vec{B} . Знайдемо її. Силу Ампера (8.3) можна розглядати як рівнодіючу сил Лоренца, що діють на всі носії струму

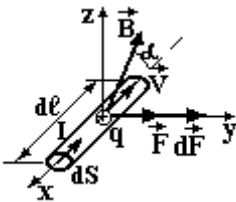


Рисунок 8.11

провідника, які мають певну швидкість \vec{V} направлено руху (рис.8.11).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dN} ; \quad d\vec{F} = I [d\vec{\ell} \cdot \vec{B}] . \text{ Струм } I \text{ знайдемо}$$

з таких міркувань. За час dt через переріз провідника dS (рис.8.12) пройдуть ті носії заряду, які віддалені від цього перерізу на відстань, не більшу, ніж $V \cdot dt$. Їх кількість дорівнює добутку концентрації n на об'єм циліндра довжиною $V \cdot dt$ і площею основи dS $dN = n \cdot dS \cdot d\ell$. Одержуємо

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dN} = \frac{I[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell} = \frac{qnV \cdot dS[d\vec{\ell} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell} = \frac{qn \cdot d\ell \cdot dS[\vec{V} \cdot \vec{B}]}{n \cdot dS \cdot d\ell}.$$

$$\vec{F} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}], \text{ або у скалярній формі}$$

$$F = qVB \cdot \sin \alpha. \quad (8.17)$$

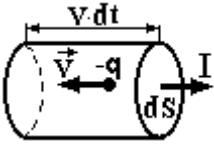


Рисунок 8.12

При $\alpha = 0^\circ$ сила $F = 0$. На заряд, що летить вздовж магнітного поля воно не діє. При відхиленні від цього напрямку виникає сила Лоренца, яка повертає заряд на траєкторію вздовж магнітного поля. Така дія магнітного поля на рухомий заряд використовується в магнітних лінзах, а також для утримування плазми при досліджуванні термоядерної реакції.

Напрямок сили Лоренца визначається, як і сила Ампера, за правилом лівої руки. Слід звернути увагу, що чотири пальці потрібно направляти по напрямку струму, а не по швидкості заряду. Якщо заряд негативний, то чотири пальці направляють проти швидкості.

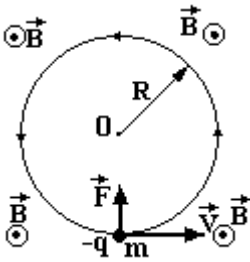


Рисунок 8.13

Вияснимо, як буде рухатись заряд у магнітному полі? Нехай від'ємний заряд q масою m влітає зі швидкістю V у магнітне поле індукцією B перпендикулярно до силових ліній (рис.8.13). Силові лінії зобразимо перпендикулярно до площини рисунка направленими на нас. Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості, а тому змінює

тільки її напрямок і не змінює величину. Отже рух буде рівномірним. Тоді траєкторія буде зображатись у площині рисунка і буде уявляти собою коло радіусом R . Сила Лоренца надає тілу нормального (доцентрового) прискорення. За другим законом Ньютона маємо

$a_n = \frac{F}{m} = \frac{qVB}{m}$. Відомо (2.9), що $a_n = \frac{V^2}{R}$. Прирівнюємо праві частини і знаходимо радіус обертання

$$R = \frac{mV}{qB}. \quad (8.18)$$

Знайдемо період T обертання, тобто час одного оберту,

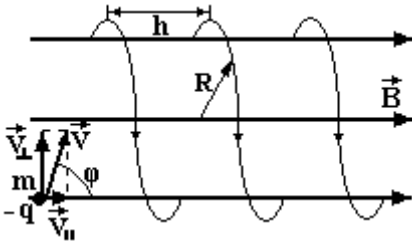


Рисунок 8.14

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (8.19)$$

Вираз (8.19) показує, що період не залежить від швидкості руху.

Нехай заряд влітає під кутом φ до напрямку магнітного поля (рис.8.14). Розкладемо швидкість на дві складові: $V_{\perp} = V \cdot \sin \varphi$ -

перпендикулярну до індукції і $V_{\parallel} = V \cdot \cos \varphi$ - паралельну їй. Частинка буде одночасно приймати участь у двох рухах: 1) по колу в перпендикулярній до магнітного поля площині; 2) прямолінійному рівномірному вздовж поля. Отже частинка буде рухатись по гвинтовій лінії радіусом

$$R = \frac{mV_{\perp}}{qB} = \frac{mV \cdot \sin \varphi}{qB} \quad (8.20)$$

з періодом

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{qB} \quad (8.21)$$

і шагом

$$h = V_{\parallel} \cdot T = \frac{2\pi mV \cos \varphi}{qB}. \quad (8.22)$$

8.7 Магнітний потік. Механічна робота в магнітному полі

В теорії магнетизму, так же, як і в електростатиці (див. розділ 6.3), вводиться поняття потоку вектора індукції (рис. 8.15)

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cos \alpha \cdot dS = B_n \cdot dS. \quad (8.23)$$

B_n - проекція вектора індукції на перпендикуляр до площадки.

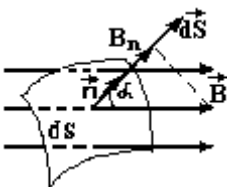


Рисунок 8.15

$$[\Phi] = T_{Л} \cdot M^2 = \frac{H}{A \cdot m} M^2 = \frac{Дж}{A} = \frac{A \cdot B \cdot c}{A} = B \cdot c = \text{вб}$$

На відміну від потоку вектора електростатичної індукції через замкнуту поверхню, який, як відомо (6.16), дорівнює

алгебраїчній сумі зарядів, потік вектора індукції магнітного поля через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (8.24)$$

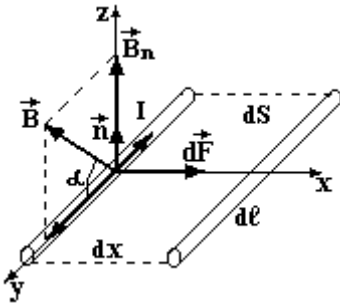


Рисунок 8.16

Це є теорема Остроградського Гауса для магнітного поля. Рівність нулю означає, що лінії індукції магнітного поля замкнуті і в природі не існує уособлених джерел північного, або південного полюсів магніту

Знайдемо роботу dA по переміщенню елемента провідника довжиною $d\ell$ із струмом I у магнітному полі індукцією B . Сила Ампера $dF = I \cdot B \cdot d\ell \cdot \sin \alpha$ переміщує провідник на відстань dx (рис.8.16). Враховуючи (8.23), знайдемо роботу

$$dA = dF \cdot dx \cdot \cos 0^\circ = I \cdot B \sin \alpha \cdot d\ell \cdot dx = I \cdot B_n \cdot dS = I \cdot d\Phi$$

Одержуємо

$$dA = I \cdot d\Phi, \text{ або } A = I \cdot \Delta\Phi, \quad (8.24)$$

що робота по переміщенню провідника із струмом у магнітному полі дорівнює добуткові струму на магнітний потік через площу, яку описує провідник при своєму рухові. Перевіримо розмірність

$$[A] = [I] \cdot [\Phi] = A \cdot \text{вб} = A \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = A \cdot \frac{\text{Н}}{A \cdot \text{м}} \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

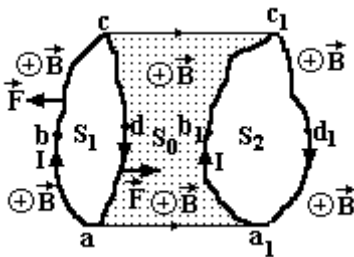


Рисунок 8.17

Знайдемо роботу по переміщенню замкнутого контуру зі струмом. Розіб'ємо контур на дві частини (рис.8.17): ліву abc і праву $сda$. Нехай контур перемістився в положення $a_1b_1c_1d_1$. Позначимо початкову площу контуру S_1 , кінцеву S_2 , а фігури $cc_1b_1a_1ad$ – S_0 . Роботу по переміщенню контуру знайдемо як алгебраїчну суму робіт по переміщенню його частин, скориставшись формулою

(8.24). Врахуємо, що при вибраному напрямку струму і магнітного

поля сили Ампера, які діють на частину abc утворюють з напрямком переміщення тупі кути. Тому ця робота буде від'ємною. Робота по переміщенню частини cda позитивна. Одержуємо

$$dA = dA_{abc} + dA_{cda} = -I \cdot B(S_1 + S_0) + I \cdot B(S_2 + S_0) = I \cdot B(S_2 - S_1).$$

Робота $dA = I \cdot d\Phi$, або $A = \int I \cdot d\Phi = I \cdot \Delta\Phi$ (8.25)

дорівнює добуткові струму на зміну магнітного потоку через площу контуру.

Якщо маємо не один виток, а котушку з N витками, то робота буде в N разів більшою.

$$dA = I \cdot d(N\Phi) = I \cdot d\psi \quad A = \int I \cdot d(N\Phi) = I \cdot \Delta\psi \quad (8.26)$$

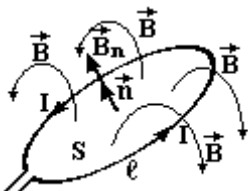
Добуток магнітного потоку Φ на кількість витків N називається **потокозчепленням** $\psi = N \cdot \Phi$. (8.27)

8.8 Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца

Явище електромагнітної індукції було відкрите англійським фізиком М.Фарадеєм у 1821 році і полягає у виникненні електрорушійної сили (е.р.с.) і індукційного струму в замкнутому контурі при зміні магнітного потоку через площу, обмежену цим контуром. Величина е.р.с. дорівнює швидкості зміни магнітного потоку – це закон Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ а якщо } N \text{ витків } \varepsilon_i = -\frac{d(N \cdot \Phi)}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}. \quad (8.28)$$

Знак (-) відображає **правило (закон) Ленца** про напрямок індукційного струму. Індукційний струм має такий напрямок, щоб своїм магнітним полем протидіяти зміні основного магнітного поля. Це зовсім не означає, що магнітне поле індукційного струму протилежне основному. Якщо потік зовнішнього поля зростає, поле індукційного струму протилежне йому, якщо ж потік зовнішнього поля зменшується, то магнітне поле індукційного струму співпадає з ним.



8.9 Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність соленоїда

При протіканні струму по будь-якому контуру створюється магнітне поле, лінії індукції якого пронизують площу S цього ж самого контуру (рис.8.18). Магнітний потік у цьому випадку називається потоком самоіндукції

$$\Phi_c = \int_S \mathbf{B}_n dS. \quad (8.29)$$

Проекцію вектора індукції на нормаль до поверхні \vec{n} запишемо за законом Біо-Савара-Лапаласа (8.4) та принципом суперпозиції (8.8)

$$\vec{B}_n = \oint_{\ell} d\vec{B}_n = \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n. \quad (8.30)$$

Тоді потік самоіндукції

$$\Phi_c = \oint_{\ell} d\mathbf{B}_n dS = I \cdot \int_S dS \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n = I \cdot L. \quad (8.31)$$

Тут

$$L = \int_S dS \oint_{\ell} \frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi r^3} [d\vec{\ell} \cdot \vec{r}]_n \quad (8.32)$$

залежить тільки від геометричних розмірів контуру (S , ℓ , r) і магнітних властивостей середовища (μ , μ_0) і називається **індуктивністю** контуру. Це коефіцієнт пропорційності між потоком самоіндукції і струмом (див.8.31). Одиницею вимірювання

індуктивності є Генрі (Гн). $1 \text{ Гн} = \frac{\text{вб}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Ом} \cdot \text{с}.$

Якщо маємо не один виток, а N , то індуктивність буде в N разів більшою, тобто будемо мати справу з потікозчепленням самоіндукції

$$\psi_c = I \cdot L. \quad (8.33)$$

Зважаючи на складність розрахунку поверхневого і криволінійного інтегралів за формулою (8.32), індуктивність розраховують простіше із застосуванням теореми Остроградського-Гауса і закону повного струму.

Приклад. Розрахуємо індуктивність довгого соленоїда (див.рис.8.9). Знайдемо потікозчеплення самоіндукції, врахувавши (8.15), (8.23), (8.27) і (8.33)

$$\psi_c = N \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = N \cdot S \frac{\mu \mu_0 I \cdot N}{\ell} = I \cdot L.$$

Звідки індуктивність
$$L = \frac{\mu\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{\ell}. \quad (8.34)$$

8.10 Енергія та густина енергії магнітного поля

Для збільшення струму в котушці необхідно виконати роботу проти е.р.с. самоіндукції $dA = I \cdot \varepsilon_c \cdot dt = -I \cdot L \frac{dI}{dt} dt = -I \cdot L \cdot dt$.

Ця робота перетворюється в енергію магнітного поля $dW = -dA = I \cdot L \cdot dt$. Інтегрування в межах від 0 до I дає

$$W = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (8.35)$$

Густина енергії w – це енергія, зосереджена в одиниці об'єму простору, де створене магнітне поле

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{W}{V} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]. \quad (8.36)$$

Знайдемо її на прикладі магнітного поля довгого соленоїда (рис.8.9). Якщо нехтувати крайовими ефектами, то це поле зосереджене всередині котушки, а отже відомий об'єм $V = S \cdot \ell$. Енергію знаходимо за (8.35), індуктивність за (8.34). Одержуємо

$$w = \frac{W}{V} = \frac{L \cdot I^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{2S\ell}. \text{ Враховуючи (8.15) та (8.6), маємо}$$

$$w = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (8.37)$$

9 КОЛИВАННЯ

9.1 Комплексні числа та дії з ними

Число виду
$$z = x + iy \quad (9.1)$$

називається комплексним числом, записаним в алгебраїчній формі. Тут: $x = \text{Re}[z]$ - дійсна (real) частина, $y = \text{Im}[z]$ - уявна (imaginary)

частина комплексного числа; $i = \sqrt{-1}$ -

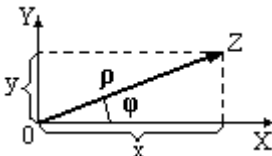


Рисунок 9.1

уявна одиниця. Число $z^* = x - iy$ з протилежною за знаком уявною частиною називається комплексно спряженим числом комплексному числу z .

Так же як будь-якому дійсному числу на числовій осі відповідає точка, так комплексному числу z відповідає точка на комплексній площині XOY (рис.9.1). Положення точки Z на площині можна задати також полярними координатами ρ і φ . Зв'язок між полярними і декартовими координатами очевидний із рис 9.1.

$$x = \rho \cdot \cos\varphi; \quad y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad (9.2)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (9.3)$$

ρ – модуль комплексного числа, φ – його аргумент.

Підстановка (9.2) в (9.1) дає тригонометричну форму комплексного числа

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi). \quad (9.4)$$

З математики відомі формули розкладання в степеневий ряд таких функцій:

$$e^\varphi = 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \dots, \quad (9.5)$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots, \quad (9.6)$$

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \quad (9.7)$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots. \quad (9.8)$$

У формулі (9.6) згрупуємо члени u відповідності з формулами (9.7), (9.8). Одержуємо

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \right) = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Отже тригонометрична форма комплексного числа (9.4) може бути перетворена в показову форму

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \rho \cdot e^{i\varphi}. \quad (9.9)$$

Додавання і віднімання комплексних чисел зручно виконувати у алгебраїчній (9.1) чи в тригонометричній (9.4) формах так як фактично необхідно виконати зведення подібних членів.

Множення, ділення, піднесення до степені зручніше виконувати з показовою формою комплексних чисел, наприклад,

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}.$$

9.2 Порядок розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Рівняння виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (9.10)$$

називається лінійним (всі похідні в першій степені) диференціальним рівнянням другого порядку (старша похідна друга) з постійними коефіцієнтами a і b . Розв'язок цього рівняння складається із суми: 1) загального розв'язку $x_0(t)$ однорідного рівняння, тобто коли права частина $f(t) = 0$ і 2) часткового розв'язку $x_{ч.н}(t)$ неоднорідного рівняння, яке залежить від виду функції $f(t)$.

1) Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид

$$x_0(t) = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}, \quad (9.11)$$

де λ_1 і λ_2 корні характеристичного алгебраїчного рівняння

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0, \quad (9.12)$$

яке складається на основі рівняння (9.10) шляхом заміни похідних деяким параметром, наприклад, λ в тій степені, який порядок похідної. Звернемо увагу, що x – це похідна нульового порядку. Тому доданок $b x$ замінюється на $b \cdot \lambda^0 = b$. A і B в (9.11) – константи інтегрування знаходяться із початкових умов.

2) Частковий розв'язок $x_{ч.н}(t)$ визначається видом функції $f(t)$.

Якщо ця функція має вид $f(t) = f_0 \cdot e^{i\omega t}$, (9.13)

$$\text{то} \quad x_{\text{ч.н}}(t) = C \cdot e^{i\omega t}. \quad (9.14)$$

C – третя константа інтегрування знаходиться із початкових умов.

Отже, загальний розв'язок рівняння (9.10) має вид

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + C \cdot e^{i\omega t}. \quad (9.15)$$

Зауваження. Якщо функція $f(t)$ відрізняється від виду (1.13), то до неї можна додати будь-яку функцію, або число, такі, щоб можна було перевести одержаний комплексний вираз у показову форму, тобто звести до виду (9.13). Тоді розв'язок видозміненого рівняння буде мати вид (9.14). Після знаходження константи інтегрування C із одержаного розв'язку видозміненого рівняння $x_{\text{ч.н}}^*(t)$ беруть тільки дійсну чи уявну частину у відповідності з тим, якою була функція $f(t)$ у вихідному диференціальному рівнянні: дійсною чи уявною. Такий прийом дає можливість розв'язувати диференціальні рівняння за розглянутим правилом з досить різноманітними функціями $f(t)$.

9.3 Вільні незатухаючі гармонічні коливання. Диференціальне рівняння цих коливань (пружинний маятник, коливальний контур)

Колівальними називаються процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі.

Вільні коливання – це коливання в системах, виведених із положення рівноваги і представлених самим собі.

Вимушені коливання виникають в системах, які зазнають періодичної зовнішньої дії. Це може бути сила, напруга і т. ін.

Автоколивання – це різновидність вимушених коливань, коли моментами дії зовнішнього фактору керує сама система за рахунок зворотного зв'язку.

Гармонічні - це коливання, при яких параметри системи змінюються за гармонічним законом, тобто за законом \sin або \cos . Реальні коливання найчастіше негармонічні. Але будь-яку функцію можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(t) = 0,5 \cdot a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

тобто представити сумою гармонічних функцій кратних частот (гармонік). Таким чином, для вивчення негармонічних коливань досить вивчити закони гармонічних коливань та правило їх додавання.

Незатухаючі – це коливання, які продовжуються нескінченно довго, тобто передана при збудженні коливань енергія системи не змінюється (не розсіюється) з часом. Якщо запасена енергія системи зменшується, коливання з часом припиняться (затухнуть). Такі коливання називаються **затухаючими**.

Розглянемо паралельно механічні (на прикладі пружинного маятника) та електричні (на прикладі коливального контуру) коливання.

Механічні коливання

Муфта масою m закріплена на пружині жорсткістю k може рухатись без тертя по стержню (рис.9.2).

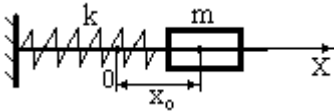


Рисунок 9.2

Розтягнемо пружину на величину x_0 . Тим самим надамо системі енергію деформованої пружини

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Електричні коливання

Коливальний контур складається із конденсатора C і ідеальної (опір дроту дорівнює нулю) котушки індуктивністю L (рис.9.3).

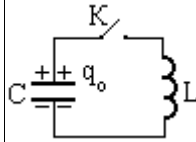


Рисунок 9.3

Зарядимо конденсатор до заряду q_0 , тобто надамо системі енергію електричного поля конденсатора

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot q_0^2$$

Бачимо аналогію величин

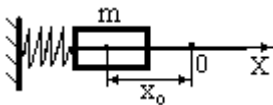


Рисунок 9.6

Жорсткість пружини $k \rightarrow \frac{1}{C}$ - обернена електроємність

Максимальне зміщення $x_0 \rightarrow q_0$ - максимальний заряд

Представляємо системи самим собі:

Відпускаємо муфту. Під дією пружної сили муфта m починає рухатись з прискоренням. Швидкість зростає, досягаючи максимального значення V_0 в момент проходження точки 0 положення рівноваги, що відповідає недеформованій пружині (рис.9.4).

Потенціальна енергія перетворюється в кінетичну

$$W_k = \frac{mV_0^2}{2}$$

Замикаємо ключ K . Конденсатор починає розряджатись. Виникає електричний струм, який досягає максимального значення I_0 в момент повної розрядки

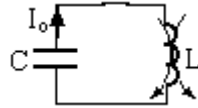


Рисунок 9.5 конденсатора (рис.9.5). В котушці виникає магнітне поле.

Енергія електричного поля перетворюється в енергію магнітного поля котушки

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

Аналогія механічних і електричних величин:

маса $m \rightarrow L$ – індуктивність,
швидкість $V_0 \rightarrow I_0$ – струм.

Пройшовши положення рівноваги, муфта рухається за інерцією, стискаючи пружину. Швидкість і кінетична енергія зменшуються до нуля, стиснувши пружину на величину x_0 (рис.9.6).

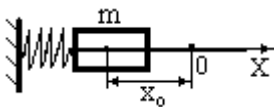


Рисунок 9.6

Після повної розрядки конденсатора, струм починає зменшуватись. За законом самоіндукції в котушці виникає індукційний струм, який за законом Ленца повинен протидіяти такому

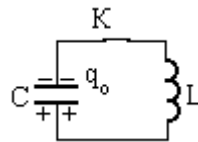


Рисунок 9.7

Кінетична енергія знову перетворюється в потенціальну енергію стиснутої пружини.

зменшенню, тобто мати той же самий напрямок. Цей індукційний струм і перезаряджає конденсатор (рис.9.7).

Енергія магнітного поля знову перетворюється в енергію електричного поля конденсатора.

Потім процеси повторюються в зворотному напрямку до повернення систем у початковій стан. В системах відбулося одне повне коливання. Одержимо диференціальні рівняння, які описують розглянуті процеси незатухаючих коливань.

Запишемо другий закон Ньютона

$$a = \frac{F}{m}. \text{ Так як } a = \frac{d^2x}{dt^2}; F = -kx,$$

одержуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Позначимо $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0.$$

Запишемо другий закон Кірхгофа

$U_c = \varepsilon_c$ напруга на конденсаторі дорівнює е.р.с. самоіндукції.

$$U_c = \frac{q}{C}; \varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

$$\text{Одержуємо } \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Позначимо $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Маємо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0. \quad (9.16)$$

Одержали ідентичні з математичної точки зору диференціальні рівняння. Тому достатньо розв'язати одне із них.

9.4 Розв'язок диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань

Розв'яжемо рівняння (9.16) для електричних коливань, яке являється лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Порядок його розв'язку був розглянутий у розділі 9.2. Складаємо характеристичне алгебраїчне

рівняння $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. Його корені $\lambda_1 = i \cdot \omega_0$; $\lambda_2 = -i \cdot \omega_0$.
Загальний розв'язок рівняння (9.16) запишемо у вигляді (9.11)

$$q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} = A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t}. \quad (9.17)$$

Константи інтегрування A і B знайдемо із початкових умов:

$$\text{при } t = 0 \quad q = q_0; \quad I = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (9.18)$$

Знайдемо закон зміни струму з часом, продиференціювавши рівняння

$$(9.17). \quad I(t) = \frac{dq}{dt} = i\omega_0 A \cdot e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 B \cdot e^{-i\omega_0 t}. \quad (9.19)$$

Підставляємо умови (9.18) в (9.17) і (9.19). Маємо систему

$$\text{алгебраїчних рівнянь} \quad \begin{cases} A + B = q_0 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{q_0}{2} \quad \text{Підставляємо}$$

знайдені константи в (9.17) одержуємо

$$q(t) = q_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (9.20)$$

гармонічний закон зміни заряду з часом. Тут врахована формула Ейлера

$\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)$, яку можна одержати, скориставшись степеневими рядами (9.5)-(9.8).

Аналогічно для механічних коливань зміщення від положення рівноваги

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (9.21)$$

Рівняння (9.20), (9.21) називаються рівняннями гармонічних незатухаючих коливань. Графіки цих коливань зображені на рис.9.8.

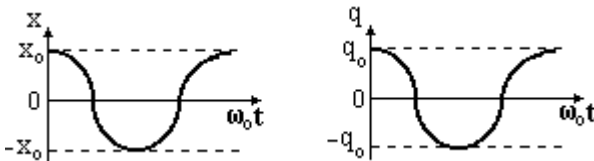


Рисунок 9.8

9.5 Характеристики гармонічних коливань. Фазові співвідношення

У загальному випадку (при інших початкових умовах, ніж (9.18), рівняння гармонічних коливань мають вид

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi); \quad q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (9.22)$$

Дамо означення характеристикам гармонічних коливань.

Зміщення $x(t)$, $q(t)$ – відхилення фізичної величини від рівноважного значення в момент часу t .

Амплітуда x_0 , q_0 – найбільше відхилення фізичної величини від рівноважного значення. Фактично це коефіцієнт перед гармонічною функцією. Для незатухаючих коливань амплітуда постійна, при затухаючих вона зменшується з часом.

Фаза $\Phi(t) = (\omega_0 t + \phi)$ – аргумент гармонічної функції. Якщо фазу поділити на період гармонічної функції 2π , одержимо кількість коливань, які відбулися від початку коливань до моменту часу t .

Початкова фаза ϕ – будучи поділеною на 2π показує кількість коливань, що відбулися до моменту початку відліку часу.

Період T – Час одного повного коливання. За період фаза коливань змінюється на період гармонічної функції, тобто на 2π . Отже маємо $\Phi(T + t) - \Phi(t) = 2\pi$, або $[\omega_0(T + t) + \phi] - (\omega_0 t + \phi) = 2\pi$. Після спрощень одержуємо

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (9.23)$$

В розділі 9.3 були введені позначення $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ для пружинного

маятника і $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ для коливального контуру. Підстановка в (9.23)

дає вирази для періодів коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (9.24)$$

і у коливальному контурі (формула Томсона)

$$T = 2\pi \sqrt{L \cdot C}. \quad (9.25)$$

Частота ν – кількість коливань за одиницю часу $\nu = \frac{1}{T}$. (9.26)

Вимірюється частота в Герцах $1\text{Гц} = 1\text{с}^{-1}$.

Циклічна частота ω_0 - кількість коливань за 2π секунд.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (9.27)$$

Знайдемо закон зміни з часом струму $I(t)$ і напруг на конденсаторі $U_c(t)$ і на котушці $U_L(t)$ коливального контуру, виходячи із закону зміни заряду (9.20). Скористаємось також формулами додаткового кута, щоб всі закони виразити через одну гармонічну функцію, наприклад, \cos .

$$U_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t) = U_{oc} \cos(\omega_0 t); \quad (9.28)$$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}); \quad (9.29)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = -Lq_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = U_{oL} \cos(\omega_0 t + \pi). \quad (9.30)$$

Одержали, що фази струму і напруг не співпадають. Напруга на конденсаторі відстає по фазі від струму на $\frac{\pi}{2}$, а на котушці

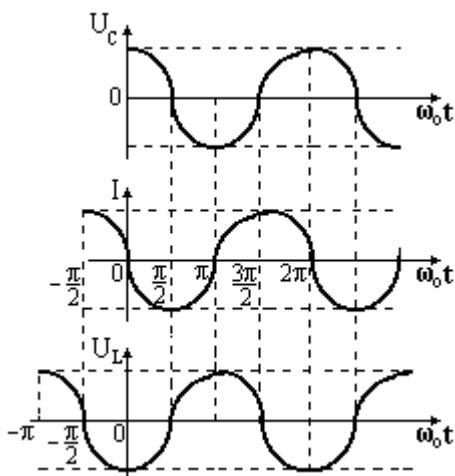


Рисунок 9.9

випереджає на $\frac{\pi}{2}$. Фази напруг на конденсаторі і на котушці відрізняються на π , що складає половину періоду гармонічної функції. Тому кажуть, що напруги на конденсаторі і на котушці змінюються в протифазі. Намалюємо графіки зміни струму і напруг.

У виразах (9.28) – (9.30) були позначені амплітуди напруг і струму:

$$U_{oc} = \frac{q_o}{C}, \quad (9.31)$$

$$U_{oL} = Lq_o\omega_o^2, \quad (9.32)$$

$$I_o = \omega_o q_o. \quad (9.33)$$

За законом Ома для дільниці кола (див. розділ 7.1), відношення напруги до струму дорівнює опоріві. Це дає можливість знайти реактивні опори конденсатора X_C і котушки X_L для змінного струму:

$$X_C = \frac{U_{oc}}{I_o} = \frac{q_o}{C\omega_o q_o} = \frac{1}{\omega_o C}; \quad (9.34)$$

$$X_L = \frac{U_{oL}}{I_o} = \frac{Lq_o\omega_o^2}{\omega_o q_o} = \omega_o L. \quad (9.35)$$

9.6 Енергія гармонічних коливань

Механічні коливання

У будь-який момент часу t повна енергія пружинного маятника складається із кінетичної енергії руху муфти і потенціальної енергії деформованої пружини

$$W = W_k + W_{\Pi} = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Врахуємо, що $x(t) = x_o \cdot \cos(\omega_o t)$,

$$V = \frac{dx}{dt} = -x_o \omega_o \sin(\omega_o t),$$

Електричні коливання

У будь-який момент часу t повна енергія коливального контуру складається із енергії електричного поля конденсатора і енергії магнітного поля котушки

$$W = W_C + W_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Враховуючи (9.20), (9.29) і маємо

$$\begin{aligned}
 k &= m\omega_0^2. \text{ Одержуємо} \\
 W &= \frac{m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2} + \frac{k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2} = \\
 &= \frac{m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2} + \frac{m x_0^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2} = \\
 &= \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2} [\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)] = \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2} = \\
 &= \frac{m V_0^2}{2} = \frac{k x_0^2}{2} = \text{const}
 \end{aligned}$$

$$W = \frac{q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{L q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2}$$

Так як $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, одержуємо

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{L q_0^2 \omega_0^2}{2} = \frac{L I_0^2}{2} = \text{const}$$

Отже повна механічна енергія пружинного маятника при незатухаючих коливаннях

$$W = \frac{m x_0^2 \omega_0^2}{2} = \frac{m V_0^2}{2} = \frac{k x_0^2}{2} = \text{const} \quad (9.36)$$

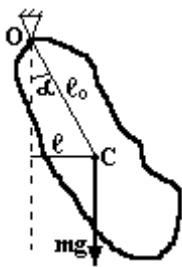
не залежить від часу, тобто залишається сталою. Відбувається перетворення потенціальної енергії к кінетичну і навпаки. Вона, як видно із (9.36) пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти і дорівнює максимальній кінетичній, або максимальній потенціальній енергії.

Енергія незатухаючих коливань у коливальному контурі

$$W = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{L q_0^2 \omega_0^2}{2} = \frac{L I_0^2}{2} = \text{const} \quad (9.37)$$

також не залежить від часу, пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти і дорівнює максимальній енергії електричного поля конденсатора, або максимальній енергії магнітного поля котушки.

9.7 Фізичний та математичний маятники



Фізичним маятником називають будь-яке тіло, підвішене не за центр тяжіння (точка С) і виведене із положення рівноваги (рис.9.10). При відхиленні від вертикалі на кут α виникає момент сили тяжіння

$$M = mg \ell = mg \ell_0 \sin \alpha, \quad (9.38)$$

Рисунок 9.10

який приводить тіло в обертальний рух відносно точки підвісу O . Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху (5.9)

$$\varepsilon = \frac{M}{J}, \text{ або } \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mg\ell_o}{J} \sin\alpha. \quad (9.39)$$

Знак (-) враховує, те що момент сили зменшує кут відхилення, тобто при відхиленні вправо, момент сили намагається повернути тіло вліво і навпаки (рис.9.10).

При малих кутах відхилення, коли $\sin\alpha \approx \alpha$, рівняння (9.39) набуває виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg\ell_o}{J}\alpha = 0, \text{ або } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_o^2\alpha = 0 \quad (9.40)$$

диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань (порівняйте з (9.16)).

$$\text{Тут} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{mg\ell_o}{J}} \quad (9.41)$$

циклічна частота коливань фізичного маятника. Знайдемо період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell_o}}.$$

(9.42)

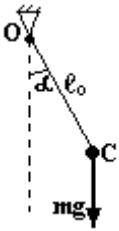


Рисунок 9.11

Математичний маятник – це матеріальна точка, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці і виведена із положення рівноваги (рис.9.11). Його можна розглядати як різновидність фізичного маятника з моментом інерції матеріальної точки $J = ml_o^2$. Тоді період коливань математичного маятника одержуємо із (9.42)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_o^2}{mg\ell_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_o}{g}}. \quad (9.43)$$

Якщо у формулі (9.42) позначити $\frac{J}{ml_o} = \ell_{пр}$, (9.44)

вона набуває виду, аналогічного (9.43) періоду коливань математичного маятника.

$l_{\text{пр}}$ - називається приведеною довжиною фізичного маятника.

Вона дорівнює довжині математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника.

Отже, фізичний і математичний маятники здійснюють гармонічні коливання при малих кутах відхилення $\alpha \leq 3^\circ \div 5^\circ$.

Вирази (9.42), (9.43), а також (9.24), (9.25) для періодів коливань показують, що вони не залежать від амплітуди.

9.8 Додавання гармонічних коливань одного напрямку рівних частот

Нехай деяка точка одночасно приймає участь у двох гармонічних коливаннях одного напрямку, заданих рівняннями (9.45)

$$x_1 = x_{o1} \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad x_2 = x_{o2} \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (9.45)$$

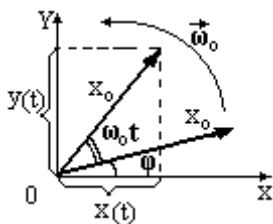


Рисунок 9.12

Потрібно знайти результуюче коливання.

В математиці така задача додавання тригонометричних функцій вирішується чисто аналітично шляхом введення деякого допоміжного кута. Але є простіший і більш наглядний графоаналітичний спосіб.

Він базується на графічному моделюванні гармонічного коливання вектором, довжина якого дорівнює амплітуді коливань x_0 (рис.9.12). Цей вектор рівномірно обертається проти годинникової стрілки (такий напрямок обертання прийнятий як позитивний) з кутовою швидкістю ω_0 , яка дорівнює циклічній частоті коливань. Початкове положення вектора задається кутом φ (початкова фаза) утвореним з позитивним напрямком осі ox . За час t вектор повернеться на кут $\omega_0 t$ і буде утворювати з віссю ox кут $(\omega_0 t + \varphi)$. Запишемо проєкції цього вектора на осі координат в момент часу t

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad y = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Одержали відомі (9.22) рівняння гармонічних коливань

Скористаємось таким геометричним уявленням для додавання двох коливань одного напрямку і однакової частоти. Так як кутові швидкості обох векторів однакові, то вони обертаються синхронно,

тобто взаємне положення векторів не змінюється з часом. Тому зобразимо ці коливання векторами у початковий момент часу (рис.9.13). Вектор сумарного коливання є діагональ паралелограма зі сторонами x_{o1} і x_{o2} та кутом між ними $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Результуючим буде гармонічне коливання з новою амплітудою x_o і новою початковою фазою φ .

$$x = x_o \cos(\omega_o t + \varphi). \quad (9.46)$$

Модуль вектора x_o – амплітуду результуючого коливання, знайдемо за теоремою косинусів як сторону трикутника, яка знаходиться проти кута $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ із сторонами x_{o1} і x_{o2} . Врахувавши формулу додаткового кута $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, маємо

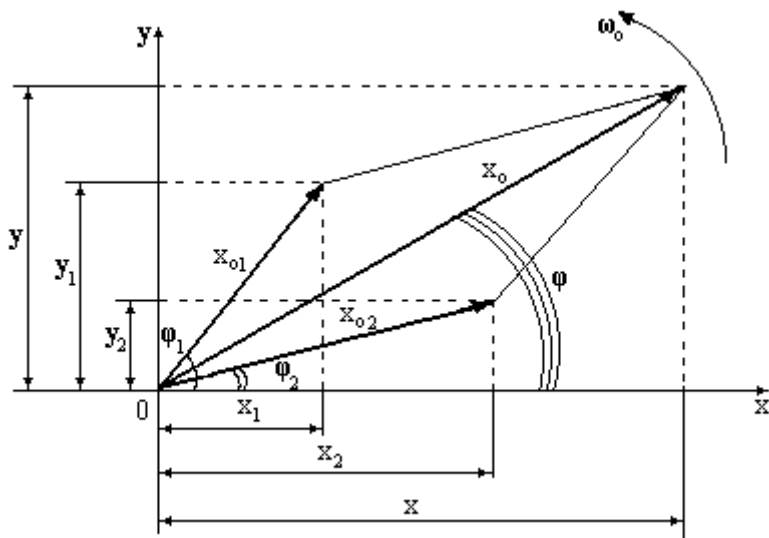


Рисунок 9.13

$$x_o = \sqrt{x_{o1}^2 + x_{o2}^2 + 2x_{o1}x_{o2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (9.47)$$

Початкова фаза $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Так як проєкції результуючого вектора дорівнюють алгебраїчній сумі проєкцій його доданків, маємо

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \operatorname{arctg} \frac{x_{o1} \sin \varphi_1 + x_{o2} \sin \varphi_2}{x_{o1} \cos \varphi_1 + x_{o2} \cos \varphi_2}. \quad (9.48)$$

Зауваження: назва тригонометричних функцій в рівняннях коливань, які додаються (9.45) і результуючого (9.46) повинні бути однаковими, тобто \cos , або \sin . Якщо функції різні, то за формулами додаткового кута їх зводять до однакової назви, змінюючи початкову фазу, і потім додають.

9.9 Додавання гармонічних коливань одного напрямку близьких частот (биття коливань)

Нехай маємо два гармонічних коливання одного напрямку, наприклад, вздовж осі x , з однаковою для простоти (потім це обмеження знімемо) амплітудою x_0 і близькими частотами ω і $\omega + \Delta\omega$, тобто $\Delta\omega \ll \omega$

$$x_1 = x_0 \cos(\omega t) \quad \text{і} \quad x_2 = x_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Знайдемо закон коливання точки, яка приймає участь у цих коливаннях одночасно, тобто додамо ці коливання. Скористатись попереднім графоаналітичним способом неможливо, так як циклічні частоти різні і взаємне положення векторів коливань буде змінюватись з часом. Тому додамо ці коливання аналітично. Для цього скористаємось відомою з математики формулою суми косинусів

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (9.49)$$

Застосуємо цю формулу, вважаючи, що $\alpha = \omega t$, а $\beta = (\omega + \Delta\omega)t$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = x_0 \{ \cos(\omega t) + \cos[(\omega + \Delta\omega)t] \} = \\ &= 2x_0 \cos \frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} \cos \frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2} = 2x_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \end{aligned}$$

Так як за умовою $\Delta\omega \ll \omega$, знехтуємо доданком $\frac{\Delta\omega}{2}$ порівнюючи з ω . Остаточно маємо

$$x(t) = 2x_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t = A(t) \cos \omega t. \quad (9.50)$$

Одержали гармонічне коливання з частотою ω і амплітудою $A(t) = 2x_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$, яка змінюється з часом за гармонічним законом з частотою $\frac{\Delta\omega}{2}$. На рис.9.14 пунктиром зображено закон зміни амплітуди, а суцільною лінією - результуюче коливання, яке ще називають биттям коливань. В моменти часу, коли фази коливань

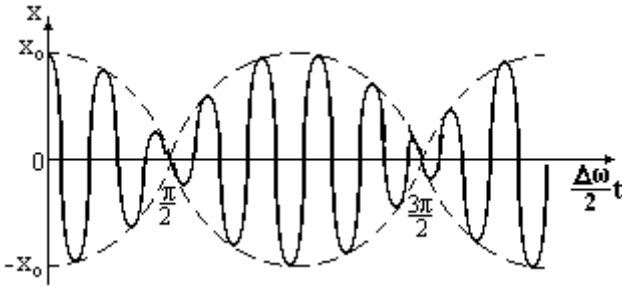


Рисунок 9.14

протилежні (точки $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$), результуюче зміщення дорівнює нулю.

Якщо ж амплітуди вихідних коливань, що додаються, не однакові, такої повної компенсації не буде.

9.10 Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань (Фігури Ліссажу)

Нехай точка одночасно приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях вздовж осі x і вздовж осі y . Вона буде рухатись в площині $хоу$ по деякій траєкторії, яка називається фігурою Ліссажу. Знайдемо рівняння цієї траєкторії. Для цього необхідно виключити з рівнянь коливань параметр t – час і одержати зв'язок між x і y .

Розглянемо спочатку випадок однакових частот коливань

$$\begin{cases} x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y = y_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Поділимо кожне рівняння на відповідну амплітуду і розкладемо синус суми кутів

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 & (9.51) \\ \frac{y}{y_0} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 & (9.52) \end{cases}$$

Помножимо (9.51) на $\cos \varphi_2$, (9.52) – на $\cos \varphi_1$ і віднімемо одне рівняння із другого. Потім помножимо (9.51) на $\sin \varphi_2$, (9.52) – на $\sin \varphi_1$ і віднімемо одне рівняння із другого. Враховуючи, що $\cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, одержуємо

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} \cos \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \cos \varphi_1 = -\cos \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \frac{x}{x_0} \sin \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \sin \varphi_1 = \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}$$

Підносимо обидва рівняння до квадрату і додаємо. Враховуючи основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса різниці кутів $\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, одержуємо рівняння фігури Ліссажу

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (9.53)$$

Це рівняння еліпса з повернутими осями відносно координатних осей. Розглянемо декілька варіантів різниці фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

а) $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$. Із (9.53) одержуємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x$$

рівняння прямої лінії в 1-му і 3-му квадрантах (рис. 9.15, а).

б) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm \pi$. Із (9.53) одержуємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0} x$$

рівняння прямої лінії в 2-му і 4-му квадрантах (рис. 9.15, б).

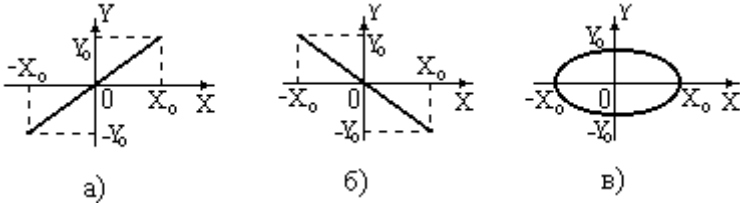


Рисунок 9.15

в) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm \frac{\pi}{2}$. Із (9.53) одержуємо $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$

рівняння еліпса (рис.9.16, в).

Якщо частоти коливань різні, фігури Ліссажу мають більш складний вид. Розглянемо, наприклад, результат додавання коливань

$$\begin{cases} x = 3 \sin \omega t \\ y = 2 \cos 2\omega t \end{cases}, \text{ частоти яких відрізняються в два рази. Звільняємося}$$

від параметра часу t . Із першого рівняння маємо $\sin \omega t = \frac{x}{3}$. Друге

рівняння приведемо до одного аргументу з першим, скориставшись формулою косинуса подвійного кута та основною тригонометричною тотожністю

$$y = 2 \cos 2\omega t = 2(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = 2(1 - 2 \sin^2 \omega t) = 2 - 4 \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 2 - \frac{4}{9} x^2.$$

Одержали рівняння квадратної параболи (рис.9.16). Точка буде рухатись (коливатись) по частині параболи, не виходячи за амплітудні значення координат: $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

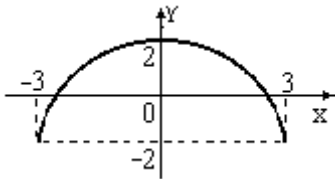


Рисунок 9.16

По виду фігур Ліссажу можна визначити відношення частот взаємно перпендикулярних коливань

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$. Воно обернене відношенню чисел перетину відповідних

осей координат за період точкою, яка рухається по фігурі Ліссажу. В

наведеному прикладі
$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\omega}{2\omega} = \frac{n_y}{n_x} = \frac{1}{2}.$$

9.11 Затухаючі коливання. Диференціальне рівняння затухаючих коливань та його розв'язок

Розглянемо механічну коливальну систему, наприклад, пружинний маятник, в якій діють сили тертя, пропорційні, як відомо, швидкості

$$F_{\text{оп}} = -rV = -r \frac{dx}{dt}, \text{ де}$$

r – коефіцієнт опору.

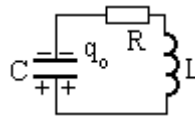
Систему виводять із положення рівноваги і залишають саму собі. Виникають власні коливання. Така система дисипативна. Повна механічна енергія системи зменшується з часом, перетворюючись у немеханічні види енергії (в тепло). Виникають затухаючі механічні коливання, які через деякий час припиняються. Одержимо диференціальне

рівняння таких затухаючих власних коливань. Запишемо другий закон Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F + F_{\text{оп}}, \quad F = -kx \text{ - сила}$$

пружності. Одержуємо

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}, \text{ або}$$



В реальному коливальному контурі завжди є активний опір – це опір дроту контуру. У відповідності із законом Джоуля-Ленца на ньому виділяється тепло, тобто енергія контуру перетворюється в тепло. У контурі виникають затухаючі власні коливання. Запишемо другий закон Кірхгофа

$$U_C + U_R = \varepsilon_c, \text{ або}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (9.55).$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}$$

Тут $\beta = \frac{R}{2L}$ - коефіцієнт згущання.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9.54)$$

Тут $\beta = \frac{r}{2m}$ - коеф. згущання.

Диференціальне рівняння (9.54) згущаючих механічних власних коливань ідентичне диференційному рівнянню (9.55) власних електричних згущаючих коливань. Тому знайдемо розв'язок одного із них, наприклад, (9.55).

Характеристичне рівняння має вид (див. розділ 9.2)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \text{ а його розв'язок згідно з (9.11)}$$

$$q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Корні характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ в залежності від співвідношення між β і ω_0 можуть бути комплексними при $\beta < \omega_0$ і дійсними при $\beta \geq \omega_0$.

У **першому** випадку, коли $\beta < \omega_0$, виникають згущаючі

коливання. Частота цих власних коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ менша, ніж частота ω_0 незгущаючих коливань. Корні характеристичного рівняння набудуть виду $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$, а заряд конденсатора буде змінюватись за

$$q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$$

Як і в (9.20) одержуємо

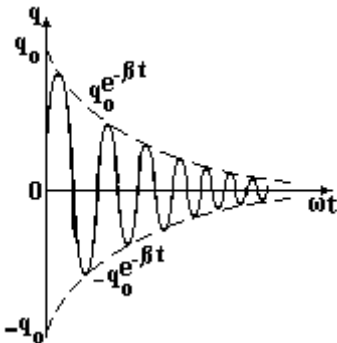


Рисунок 9.17

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (9.56)$$

Виникають затухаючі коливання (рис.9.17), амплітуда яких зменшується з часом за експоненціальним законом $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$.

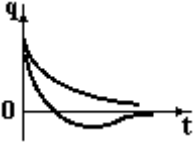


Рисунок 9.18

У **другому** випадку, коли $\beta \geq \omega_0$ втрата енергії настільки велика, що вона розсіюється за якусь долю періоду і коливання не виникають. Система релаксує до стану рівноваги аперіодично (неперіодично) (рис.9.18). Критерієм переходу до аперіодичного процесу релаксації є рівняння

$\beta = \omega_0$. $\frac{R_k}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. При $R < R_k$ виникають затухаючі коливання, при $R > R_k$ має місце аперіодичний процес релаксації.

9.12 Характеристики затухаючих коливань та їх фізичний зміст

а) Коефіцієнт затухання $\beta = \frac{r}{2m} \left[\frac{H \cdot c}{M \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{c^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{1}{c} \right]$ для

механічних коливань і $\beta = \frac{R}{2L} \left[\frac{\text{Ом} \cdot \text{А}}{\text{вб}} = \frac{\text{В}}{\text{В} \cdot \text{с}} = \frac{1}{c} \right]$ для електричних

коливань. Коефіцієнт опору r аналогічний електричному опору R .

б) Час релаксації τ – це час, за який амплітуда коливань зменшується в e раз. В момент часу t амплітуда $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$, а в момент часу $t + \tau$ $A(t + \tau) = q_0 e^{-\beta(t + \tau)}$. За означенням часу релаксації відношення цих

амплітуд дорівнює e , тобто $\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t + \tau)}} = e^{\beta \tau} = e$. Одержали

$\beta \tau = 1$, або $\tau = \frac{1}{\beta}$. Час релаксації обернений коефіцієнту затухання.

в) Циклічна частота затухаючих коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$ менша, ніж власних незатухаючих ω_0 . Для механічних коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}, \text{ а для електричних } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

г) Період затухаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0$ більший, ніж

власних незатухаючих T_0 .

При $\beta = \omega_0$ $\omega = 0$, а $T = \infty$. Коливання не виникають, а настає аперіодичний процес релаксації.

д) Декремент затухання D – це відношення амплітуд через період.

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (9.57)$$

е) Логарифмічний декремент затухання λ – це натуральний логарифм із декременту затухання

$$\lambda = \ln D = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e}.$$

Він дорівнює оберненому числу коливань за час релаксації, тобто обернений числу коливань, за які амплітуда зменшується в e раз.

ж) Добротність $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \cdot N_e$. З'ясуємо фізичний зміст добротності.

Для цього знайдемо відношення енергії системи в якийсь момент часу до енергії, яка втрачається системою за період (за одне коливання).

Так як енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди, маємо

$$\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{q_0^2 e^{-2\beta t}}{q_0^2 e^{-2\beta t} - q_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

Розкладемо $e^{-2\lambda}$ в степеневий ряд, скориставшись розкладанням експоненти $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$. При малих λ , тобто при слабкому затуханні, можна обмежитись двома першими членами ряду,

так як решта набагато менші. Одержимо $e^{-2\lambda} = 1 - 2\lambda$. Отже

$$\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}} = \frac{1}{1 - 1 + 2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Таким чином, добротність

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

характеризує втрату енергії при затухаючих

коливаннях і дорівнює добутку 2π на відношення енергії системи до втрати енергії за період.

Знайдемо добротність коливального контуру

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}.$$

При слабкому затуханні $\beta \ll \omega_0$,

тому

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2L}{\sqrt{LC} 2R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.58)$$

При $R = 0$ коливання незатухаючі і $Q = \infty$.

9.13 Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок

Вимушеними називаються коливання, що виникають у системі під дією періодичного зовнішнього фактору. Це може бути періодична сила, змінна напруга і т.ін.

Нехай на пружинний маятник діє періодична сила, яка змінюється за гармонічним законом з циклічною частотою Ω

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

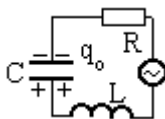
Запишемо другий закон Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t.$$

Після спрощень, одержимо

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Позначивши



$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

одержимо диференціальне рівняння вимушених коливань пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (9.59)$$

У коливальний контур увімкнено джерело змінної напруги

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t$ з циклічною частотою Ω . Записуємо другий закон Кірхгофа

$$U_C + U_R = \varepsilon_C + \varepsilon$$

$$\frac{q}{C} + I \cdot R = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \Omega t.$$

Позначивши

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad e_0 = \frac{\varepsilon_0}{L},$$

одержимо диференціальне рівняння вимушених електричних коливань

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = e_0 \cos \Omega t \quad (9.60)$$

Видно, що обидва рівняння ідентичні. Будемо розв'язувати рівняння (9.60) електричних коливань. У відповідності з розділом 9.2 $q(t) = q_{\text{однор}} + q_{\text{ч.н.}}$. Тут $q_{\text{однор}} = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ рівняння (9.56) незатухаючих власних коливань, $q_{\text{ч.н.}}$ часткове рішення неоднорідного рівняння (9.60). Згідно із зауваженням розділу 9.2 переведемо праву частину рівняння (9.60) в показову форму $e_0 \cdot e^{i\Omega t}$, додавши до неї вираз $(i \cdot e_0 \sin \Omega t)$. Одержуємо нове рівняння

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = e_0 \cdot e^{i\Omega t}. \quad (9.60^*)$$

Частковий розв'язок цього рівняння має вид $q_{\text{ч.н.}}^* = A \cdot e^{i\Omega t}$. Константу інтегрування A знайдемо, підставивши цей вираз в (9.58*)

$$-\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2\beta i \Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = e^{i\Omega t}.$$

Після скорочення на $e^{i\Omega t}$ знаходимо $A = \frac{e_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i \cdot 2\beta\Omega} = \frac{e_0}{\rho} e^{-i\alpha}$.

Тут комплексне число у знаменнику переведене із алгебраїчної форми в показову.

Модуль цього числа $\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \quad (9.61),$

його аргумент $\alpha = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.62)$

Таким чином $q_{\text{ч.н.}}^* = \frac{e_0}{\rho} e^{i(\Omega t - \alpha)}$. Знайдемо $q_{\text{ч.н.}}$ шляхом виділення із

$q_{\text{ч.н.}}^*$ дійсної частини, так як права частина рівняння (9.58) дійсне число. Отже

$$q_{\text{ч.н.}} = \operatorname{Re} [q_{\text{ч.н.}}^*] = \operatorname{Re} \left[\frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) - i \cdot \frac{e_0}{\rho} \sin(\Omega t - \alpha) \right] = \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha).$$

Загальний розв'язок рівняння (9.60) вимушених коливань

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) \quad (9.63)$$

складається із двох гармонічних функцій: перша із частотою ω власних затухаючих коливань і амплітудою, яка зменшується з часом за експонентою; друга із частотою Ω зовнішнього фактору, амплітудою та початковою фазою, які не залежать від часу, але залежать від частоти Ω (див.(9.61), (9.62)). Через час приблизно $3\tau = \frac{3}{\beta}$ амплітуда першого доданку в (9.63) практично зникає. Наступає сталий режим вимушених коливань

$$q(t) = \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) = q_0(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \alpha). \quad (9.64)$$

9.14 Резонанс напруг у коливальному контурі. Резонансні криві

Резонансом називається явище різкого збільшення амплітуди вимушених коливань до максимуму при зміні частоти зовнішнього фактору. Частота Ω_p , при якій амплітуда стає максимальною, називається резонансною частотою. Знайдемо її для резонансу напруги, наприклад, на конденсаторі коливального контуру. На основі (9.61), та (9.28) напруга на конденсаторі в сталому режимі змінюється за законом

$$U_c(t) = U_{oc} \cos(\Omega t - \alpha) = \frac{q(t)}{C} = \frac{e_0}{LC\rho} \cos(\Omega t - \alpha). \quad (9.65)$$

Запишемо амплітуду напруги, враховуючи (9.61), як функцію частоти Ω і дослідимо її на екстремум

$$U_{oc}(\Omega) = \frac{e_0}{LC\rho(\Omega)} = \frac{e_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (9.66)$$

Для цього необхідно взяти з (9.66) похідну за частотою і прирівняти її нулю.

$$\frac{dU_{oc}}{d\Omega} = \frac{e_0}{LC} \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left[2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 8\beta^2\Omega \right] \right\} = 0$$

Як видно, вираз похідної досить громіздкий. Можна процедуру дослідження функції на екстремум спростити, беручи похідну тільки з співмножника, який містить аргумент (Ω), тобто будемо диференціювати тільки підкореневий вираз у знаменнику (9.66)

$$\frac{d}{d\Omega} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 8\beta^2 \Omega = 0$$

Після спрощень одержимо резонансну частоту для напруги

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9.67)$$

Видно, що резонансна частота напруги не співпадає як з власною частотою затухаючих $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, так і частотою незатухаючих коливань ω_0 , а менша від них.

Резонансною кривою називається залежність (9.66) амплітуди від частоти Ω . Для її побудови з'ясуємо, які значення приймає амплітуда при $\Omega = 0$ і при $\Omega \rightarrow \infty$, тобто знайдемо границі.

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} U_{oc}(\Omega) = \varepsilon_0$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} U_{oc}(\Omega) = 0$$

Отже, резонансна крива починається з амплітуди прикладеної е.р.с., проходить через максимум і асимптотично прямує до осі частоти. (рис.9.19). При збільшенні коефіцієнта затухання β резонансна частота і амплітуда зменшуються (9.67), (9.66).

Знайдемо амплітуду напруги в момент резонансу, підставивши (9.67) в (9.66)

$$\begin{aligned} U_{oc}(\Omega_p) &= \frac{\varepsilon_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\varepsilon_0}{LC \sqrt{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{LC 2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\varepsilon_0}{2LC} \frac{R}{\omega} = \frac{\varepsilon_0}{RC\omega} \end{aligned}$$

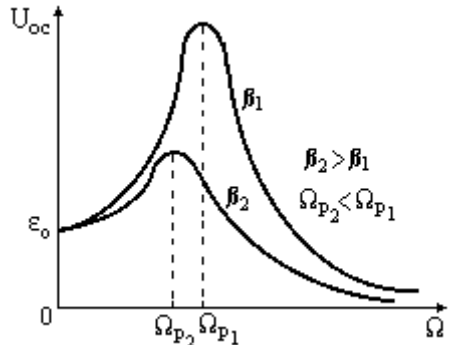


Рисунок 9.11

При слабкому затуханні $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Одержуємо

$$U_{oc}(\Omega_p) = \frac{\varepsilon_0}{RC\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \varepsilon_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 \cdot Q,$$

Добротність Q показує у скільки разів напруга в момент резонансі більша, ніж амплітуда ε_0 зовнішньої е.р.с.

Виразимо амплітуду вимушених коливань через параметри контуру R, L, C . Для цього в (9.66) підставимо $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

$$\begin{aligned} U_{oc}(\Omega) &= \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \frac{4R^2\Omega^2}{4L^2}}} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\Omega C\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot X_C = \frac{\varepsilon_0}{Z} \cdot X_C \end{aligned} \quad (9.68)$$

Тут: уже відомі ємнісний опір конденсатора (9.34) індуктивний опір котушки в колі змінного струму (9.35) в колі змінного струму. Z —загальний опір послідовно з'єднаних R, L і C

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (9.69)$$

Вираз (9.66) відображає закон Ома для змінного струму.

$$I = \frac{\varepsilon_0}{Z}; \quad U_C = I \cdot X_C; \quad U_L = I \cdot X_L; \quad U_R = I \cdot R. \quad (9.70)$$

9.15 Резонанс струмів у коливальному контурі

Знайдемо закон зміни струму в коливальному контурі при сталому режимі вимушених коливань. Для цього візьмемо похідну за часом із закону (9.64) зміни заряду і врахуємо (9.59)

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = -q_0 \Omega \sin(\Omega t - \alpha) = -\frac{\varepsilon_0 \Omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \sin(\Omega t - \alpha). \quad (9.71)$$

Амплітуда струму як і напруги залежить від частоти Ω

$$I_o(\Omega) = \frac{\varepsilon_o \Omega}{L\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_o}{Z}. \quad (9.72)$$

Знайдемо резонансну частоту для струму. Будемо як і в розділі 9.14 брати похідну не з усього виразу (9.72), тільки із квадрата виразу в круглих дужках знаменника

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2 = 2 \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) \cdot \left(L + \frac{1}{\Omega^2 C} \right) = 0.$$

Одержуємо
$$\Omega_{pI} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o, \quad (9.73)$$

що резонанс струму має місце при частоті ω_o власних незатухаючих коливань і на відміну від резонансу напруг не залежить від коефіцієнта затухання. Для побудови резонансних кривих знайдемо

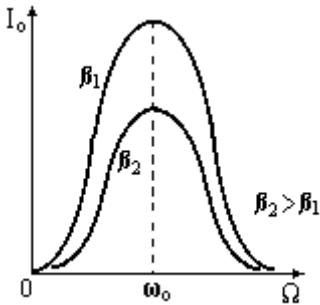


Рисунок 9.20

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} I_o(\Omega) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} I_o(\Omega) = 0.$$

Видно, що резонансна крива струму починається з нуля і асимптотично, як і напруга, наближається до осі частоти. Резонансні криві для струму зображені на рис.9.20.Із зростанням коефіцієнта затухання β амплітуда струму при резонансі зменшується, а резонансна частота не змінюється.

9.16 Векторні діаграми

В розділі 9.5 були одержані фазові співвідношення між струмом та напругою. Нагадаємо, що напруга на котушці випереджає по фазі струм на 90° (на 0,5), а на конденсаторі напруга відстає від струму на 90° (на 0,5), на опорі вони співпадають по фазі. Для наглядного зображення фазових співвідношень призначені векторні діаграми.

Векторна діаграма – це графічне зображення змінних по гармонічному закону напруг і струмів у вигляді векторів. Довжина векторів дорівнює амплітудам у відповідному масштабі, а початкове положення задається початковою фазою, відрахованою від осі абсцис. (див. розділ 9.8). Потім вся картина приводиться в обертальний рух проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю Ω , яка дорівнює циклічній частоті коливань.

Порядок побудови векторних діаграм.

Спочатку на комплексній площині будується вектор величини загальної для всіх елементів схеми: струм для послідовно з'єднаних елементів (див. рис.9.21), напруга для паралельного з'єднання елементів (див. рис.9.22). До цього вектора добудовуються інші, враховуючи, що напруга на опорі R співпадає по фазі із струмом, напруга U_L на котушці випереджає струм на 90° (відраховується від струму проти годинникової стрілки), а на конденсаторі відстає від струму на 90° (відраховується від струму за годинниковою стрілкою). Якщо діаграма побудована правильно, то у відповідності із законами Кірхгофа сума напруг на послідовно з'єднаних елементах повинна дорівнювати зовнішній е.р.с., а сума струмів у паралельних вітках дає струм до розгалуження. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати векторну діаграму послідовно з'єднаних R, L, C . (рис. 9.21).

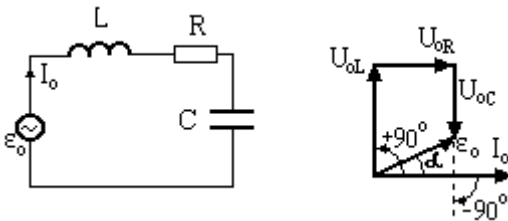


Рисунок 9.21

Спочатку горизонтально проводимо вектор струму I_0 , так як він однаковий при послідовному з'єднанні. До нього вертикально вгору у

випереджаючому напрямі під кутом $+90^\circ$ проводимо вектор напруги U_{0L} на котушці. Дійсно, при обертанні картинки проти годинникової стрілки вектор напруги U_{0L} буде рухатись попереду вектора струму. До кінця вектора U_{0L} добудовуємо вектор напруги на опорі U_R паралельно вектору струму. До вектора U_R добудовуємо вектор U_{0C} напруги на конденсаторі у відстаючому від струму на 90° напрямку, тобто вертикально вниз. Вектор, який замикає початок вектора U_{0L} і кінець

вектора U_{oC} є сума трьох напруг і за другим законом Кірхгофа дорівнює е.р.с. ϵ_o .

Приклад 2. Побудувати векторну діаграму паралельно з'єднаних R, L, C. (рис. 9.22).

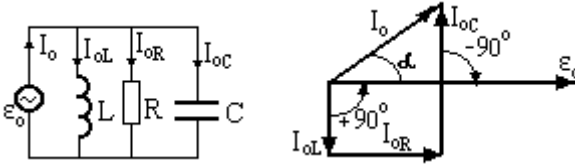


Рисунок 9.22

Починаємо будувати з вектора зовнішньої е.р.с. ϵ_o , загальної для всіх віток. До нього послідовно добудовуємо вектори струмів у

вітках у відповідності з фазовими зсувами між струмом та напругою нат відповідних елементах. Замикаючий вектор струму I_o згідно з першим законом Кірхгофа є струм то розгалуження.

Приклад 3. Побудувати векторну діаграму змішаного з'єднаних R, L, C (рис. 9.23).

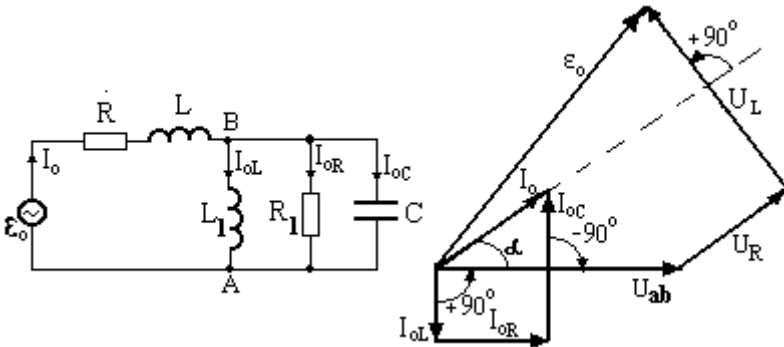


Рисунок 9.23

Починаємо будувати з вектора U_{ab} , провівши його, наприклад, горизонтально. Струми I_{oL} , I_{oR} , I_{oC} , I_o будуються як і в попередньому прикладі 2. Далі до кінця вектора U_{ab} добудовуємо вектор U_R паралельно струмові I_{oR} , а до його кінця – вектор U_L з випереджаючим на 90° зсувом фази відносно струму I_o . Вектор ϵ_o замикаю вектори напруг

U_{ab} , U_R і U_L , так як він є їх сумою.

10 ЕЛЕМЕНТИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ

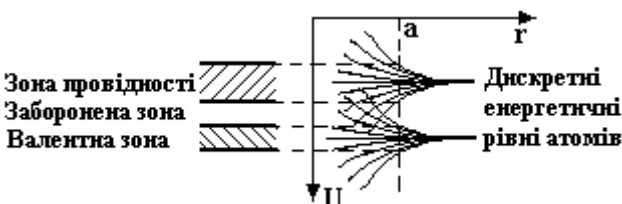
10.1 Узагальнення електронів у кристалі. Принцип Паулі. Утворення енергетичних зон

Енергетичний спектр ізольованого атома дискретний. Квантовий стан електронів в атомах характеризуються чотирма квантовими числами: n – головне квантове число, яке визначає енергію електрона; ℓ – орбітальне, задає момент імпульсу; m – магнітне квантове число, задає проекцію моменту імпульсу на напрямок силового поля; m_s – спінове число, визначає проекцію власного механічного і магнітного моментів електрона на напрямок магнітного поля. Енергетичні рівні в атомах вироджені, тобто одному значенню головного квантового числа, або одному значенню енергії, відповідає декілька квантових станів. Кратність виродження, тобто кількість квантових станів з однаковим значенням енергії, дорівнює $2\ell + 1$.

У 1925 р. швейцарський фізик В.Паулі сформулював правило, яке потім одержало назву «**принцип заборони Паулі**», згідно якого два і більше тотожних ферміонів (це частинки з напівцілим спіном, наприклад, електрони) не можуть одночасно знаходитись в одному і тому ж квантовому стані.

При утворенні кристалу виродження однакових енергетичних рівнів ізольованих атомів знімається під дією магнітного чи електричного поля сусідніх атомів, тобто відбувається розщеплення енергетичного рівня на декілька підрівнів. На кожному з таких підрівнів знаходиться єдиний електрон, або, якщо не враховувати залежність енергії від спіну, то два електрони з протилежними спінами.

Схематично такий процес ілюструється рис. 10.1. Розщеплення



засягають два зовнішніх енергетичних рівнів. На більш

Рисунок 10.1

глибокі енергетичні рівні силове поле сусідніх атомів не впливає із-за екрануючої дії електронів зовнішніх оболонок. Кожний дискретний енергетичний рівень ізольованих атомів при утворенні кристалу розщеплюється в зону дозволених значень енергій: валентну зону та зону провідності (рис.10.1). Вони можуть бути розділені забороненою зоною

Ширина зон дорівнює декільком електрон-вольтам ($1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$). Якщо кристал об'ємом 1 см^3 має приблизно $10^{22} \div 10^{23}$ атомів, а кількість підрівнів такого ж порядку, то енергетичний інтервал між підрівнями в зоні буде порядку 10^{-22} eВ. Ця енергія настільки мала, що можна вважати зміну енергії в межах зон неперервною. Але все таки число рівнів у зонах кінцеве. Це відіграє вирішальну обмежуючу роль при заповненні зон електронами.

10.2 Заповнення зон електронами. Провідники, діелектрики, напівпровідники

Енергетична зона має велику, але обмежену кількість енергетичних рівнів, на кожному з яких може знаходитись по два електрони з протилежними спінами. По характеру заповнення електронами валентної зони і зони провідності, а саме вони визначають електричні властивості, всі тіла поділяються на дві групи:

- тіла з частково заповненими зонами, рис.10.2,а;
- тіла з повністю заповненими і зовсім вільними зонами, рис.10.2,б.

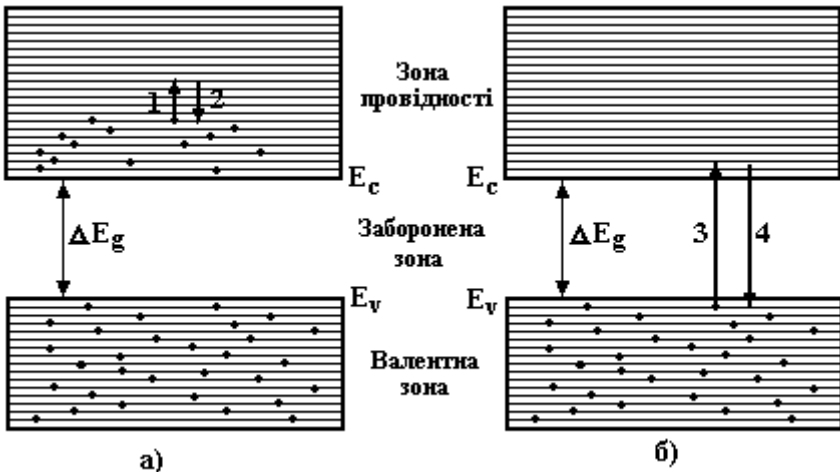


Рисунок 10.2

Тіла 1-ї групи являються хорошими провідниками електричного струму. Це метали. При протіканні електричного струму електрон прискорюється електричним полем. Його енергія збільшується. На енергетичній зонній діаграмі (рис.10.2,а) цей процес відповідає переходу 1 на більш високий енергетичний рівень. А такий перехід можливий тільки тоді, коли останній вільний. В протилежному разі, за принципом Паулі, такий перехід неможливий. Далі електрон стикається з атомом, дефектом кристалу, тепловими коливаннями атомів (фононами), поверхнею кристалу і т. ін., тобто розсіюється. Його енергія зменшується, що відповідає переходу 2 (рис.10.2,а). А далі все повторюється. Не дивлячись на те, що електрон фактично повертається у початковий енергетичний стан, просторово він переміщується по кристалу, що на зонній діаграмі не відображається. у повністю заповнених зонах такі переходи неможливі за принципом Паулі. А для подолання забороненої зони необхідна значна енергія – декілька еВ.

Частково заповнені зони утворюються: 1) за рахунок перекриття валентної зони і зони провідності, тобто коли заборонена зона відсутня. Це метали; 2) коли електрон переходить із валентної зони в зону провідності, долаючи заборонену зону, рис.10.2,б, перехід 3. Для такого переходу електрон повинен одержати енергію від якогось джерела. Такими джерелами може бути освітлення, бомбардування електронами, тепла енергія, хімічна енергія і т.ін. Ця енергія повинна бути не меншою за ширину забороненої зони. Зрозуміло, що чим вона більша ширина забороненої зони, тим менше електронів здійснюють такі переходи і тим менша електропровідність кристалу. Тому речовини з широкою забороненою зоною являються хорошими діелектриками. Наприклад, алмаз ($\Delta E_g = 5,2$ еВ), сапфір ($\Delta E_g = 7$ еВ). По значенню ширини забороненої зони тіла умовно поділяються на діелектрики ($\Delta E_g > 3$ еВ) і напівпровідники (< 3 еВ). Межа 3 еВ умовна. Такий типовий напівпровідник, як сульфід цинку (ZnS), має ширину забороненої зони 3,8 еВ. Із підвищенням температури кількість електронів, здатних подолати заборонену зону за рахунок теплової енергії, збільшується, зростає електропровідність, і може настати тепловий пробій діелектрика.

Перехід 3 приводить до появи не тільки вільного електрона в зоні провідності, а і вільної дірки у валентній зоні, яка теж приймає участь в електропровідності поетафетним її заповненням

електронами. Така біполярна електропровідність спостерігається у власних (чистих) напівпровідниках.

Наявність домішок у напівпровідниках суттєво збільшує їхню електропровідність. Розглянемо цей механізм електропровідності. Домішкові атоми мають іншу валентність, ніж валентність регулярних атомів. Якщо вона більша, домішка називається донорною (збільшує концентрацію вільних електронів), якщо менша – акцепторною (збільшує концентрацію дірок). Наприклад, для 4-х валентного германію (Ge) 5-ти валентний миш'як (As) являється донором, а 3-х валентний індій (In) акцептором. Під дією внутрішнього поля кристалу енергія зв'язку валентних електронів сторонніх атомів зменшується, і вони легко іонізуються. Енергетичний рівень домішкових атомів, як правило, знаходиться в забороненій зоні: донорної ближче до зони провідності, акцепторної до валентної зони. Енергія іонізації домішкових атомів значно менше, ніж ширина забороненої зони. Наприклад, для Ge $\Delta E_g \approx 0,7$ eV, а енергія активації індію чи миш'яку $E_D \approx E_A \approx 0,01$ eV. Тому раніше іонізуються домішкові атоми, ніж відбуваються переходи зона-зона.

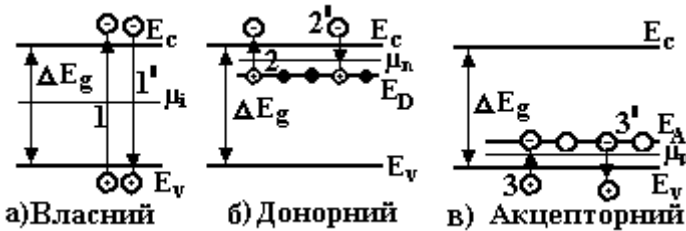


Рисунок 10.3

Оскільки електрофізичні властивості напівпровідників зумовлені процесами, які протікають за участі енергетичних рівнів поблизу забороненої зони, або рівнів домішкових атомів, на енергетичній (зонній) діаграмі показують границі забороненої зони рис.10.3: E_v – стеля валентної зони, E_c – підлога зони провідності, E_A –рівень акцепторної домішки, E_D – рівень донорної домішки. Окрім цих реальних рівнів в зонній теорії твердих тіл вводиться ще один особливий рівень: μ_i – для власних напівпровідників, μ_n і μ_p – для домішкових донорних і акцепторних відповідно. Цей рівень називали рівнем Фермі (на честь італ. фізика Е.Фермі). Це енергія, яку

привносить в систему одна частинка (ферміон). Вона еквівалентна хімічному потенціалу. За фізичним змістом цей рівень поділяє всі енергетичні рівні на дві групи: 1) рівні, ймовірність заповнення яких більша за 0,5 (вони лежать нижче рівня Фермі); 2) рівні, ймовірність заповнення яких менша за 0,5 (вони лежать вище рівня Фермі). З цього зрозуміло, що рівень Фермі знаходиться забороненій зоні. У власних напівпровідниках він знаходиться приблизно посередині забороненої зони (рис.10.3,а)), в домішкових – між домішковим рівнем та найближчою зоною дозволених значень (рис.103,б), в)).

Іонізація донорних атомів приводить до появи в зоні провідності вільних електронів і нерухомих позитивних іонів донора (рис.4.6,а), а іонізація акцепторних атомів – до появи дірок у валентній зоні і нерухомих негативних іонів акцептора (рис.4.6,б).

Таким чином, електропровідність домішкових напівпровідників зумовлена носіями одного знаку донорних (n-типу) електронами, акцепторних (р-типу) дірками, або кажуть домішкові напівпровідники мають уніполярну електропровідність.

11 ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ ТВЕРДИХ ТІЛ

11.1 Дрейф носіїв струму в електричному полі. Рухливість носіїв струму. Питома електропровідність. Ефективна маса

За відсутності електричного поля електрони в твердому тілі знаходяться в рівноважному стані і, рухаючись хаотично, не мають якогось переважного напрямку руху. Заряд, який переноситься через будь-який переріз провідника, однаковий. Електричний струм відсутній.

Накладення електричного поля викликає, наряду з тепловим рухом, направлений рух проти напруженості електричного поля. Такий рух зарядів називається дрейфом, а швидкість – дрейфовою швидкістю $V_{др}(t)$. Знайдемо величину і закон зміни цієї швидкості з часом після вимикання електричного поля. На електрон з боку електричного поля діє прискорююча сила $F_{ел} = -qE$. Вплив кристалічної ґратки формально можна врахувати дією деякої сили опору $F_{оп} = -\gamma V_{др}(t)$, яка пропорційна дрейфовій швидкості і протилежна їй за напрямком. Ця сила враховує розсіювання

електрона. Тоді диференціальне рівняння руху електрона, за 2-м законом Ньютона, набуде виду

$$m a_{\text{др}} = F_{\text{ел}} + F_{\text{оп}} \Rightarrow m \frac{dV_{\text{др}}(t)}{dt} = -qE - rV_{\text{др}}(t). \quad (11.1)$$

Якщо після встановлення стаціонарного струму поле вимкнути, тобто в рівнянні (11.1) покласти $E = 0$, одержуємо

$$m \frac{dV_{\text{др}}(t)}{dt} = -rV_{\text{др}}(t) \Rightarrow \frac{dV_{\text{др}}(t)}{V_{\text{др}}} = -\frac{r}{m} dt. \text{ Після інтегрування,}$$

маємо

$$V_{\text{др}}(t) = V_{\text{др}}(0) \cdot \exp\left(-\frac{r}{m} t\right). \text{ Позначимо } \frac{r}{m} = \tau - \text{ час релаксації}$$

струмового стану, тобто час, за який дрейфова швидкість зменшується в $e \approx 2,7$ рази. Для металів $\tau \sim 10^{-14}$ с. Одержуємо

$$V_{\text{др}}(t) = V_{\text{др}}(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (11.2)$$

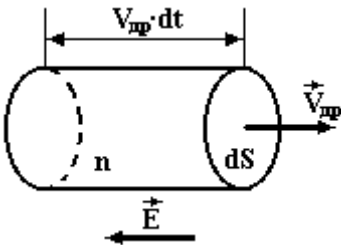
При сталому режимі протікання струму дрейфова швидкість не змінюється з часом. Тому $\frac{dV_{\text{др}}(t)}{dt} = 0$. Рівняння (11.1) набуде виду

$$-qE - rV_{\text{др}}(t) = 0. \text{ Звідки оцінимо } V_{\text{др}}$$

$$V_{\text{др}} = -\frac{q}{r} E = -\frac{q\tau}{m} E \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-14}}{9 \cdot 10^{-31}} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} \approx 0,18 \text{ см/с}$$

Ця швидкість набагато менша від теплової швидкості, яка складає декілька сотень км/с. З останнього рівняння знайдемо відношення дрейфової швидкості до напруженості електричного поля

$$\frac{V_{\text{др}}}{E} = -\frac{q\tau}{m} = U, \left[\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \right]. \quad (11.3)$$



Ця величина не залежить від величини електричного поля і називається **рухливістю**. Це дрейфова швидкість, яку набуває вільний носій заряду в електричному полі одиничної

Рисунок 11.1

напруженості. Розрізняють рухливість електронів U_n і дірок U_p .

Знайдемо питому електро-провідність кристалу, тобто електропровідність провідника довжиною l м і площею перерізу 1 м^2 . За час dt через переріз провідника dS (рис. 11.1) перейдуть електрони, які знаходяться від нього на відстані не більшій за $V_{др} \cdot dt$ і перенесуть заряд $dQ = n \cdot q \cdot V_{др} \cdot dt \cdot dS$, n – концентрація, q – заряд електрона.

Струм – це швидкість переносу заряду $I = \frac{dQ}{dt}$, а його густина – це

струм, який протікає через одиницю площі поперечного перерізу $j = \frac{I}{dS}$. Таким чином, маємо

$$j = \frac{dQ}{dt \cdot dS} = \frac{nqV_{др} dt \cdot dS}{dt \cdot dS} = qnV_{др} = qnU_n E = \sigma_n E.$$

Одержали закон Ома в диференціальній формі: густина електричного струму пропорційна напруженості електричного поля.

$$j = qnU_n E = \sigma_n E \quad (11.4)$$

Тут електронна складова питомої електропровідності, враховуючи формулу (11.3), буде

$$\sigma_n = qnU_n = \frac{q^2 n \tau}{m_n}. \quad (11.5)$$

Діркова складова електропровідності у напівпровідниках знаходиться аналогічно

$$\sigma_p = qpU_p = \frac{q^2 p \tau}{m_p}. \quad (11.6)$$

У формулах (11.5) і (11.6) m_n і m_p – ефективні маси електронів і дірок. Вона відрізняється від маси електрона m_0 в вакуумі тому що враховує вплив силового поля кристалу на рух (прискорення) електрона. Коли поле кристалу додатково прискорює електрон, експериментатору, який знає другий закон Ньютона, частинка здається легшою ($m_n < m_0$), якщо ж поле кристалу гальмує електрон то $m_n > m_0$. Наприклад Ікз германію $m_n=0,56m$, $m_p=0,59m$; для кремнію $m_n=1,08m$, $m_p=0,37m$.

11.2 Залежність рухливості носіїв заряду від температури

Температурна залежність електропровідності, як видно із виразів (11.5), (11.6) може бути обумовлена залежністю від температури концентрації та рухливості вільних носіїв струму. Їхній же заряд (заряд електрона) від температури не залежить.



Рисунок 11.2

Розглянемо спочатку рухливість. Її температурна залежність показана на рис. 11.2. В металах і сплавах рухливість в досить широкому температурному діапазоні обернена температурі. Тут електрони взаємодіють (розсіюються) на теплових коливаннях атомів (на фонах). В області ж низьких температур концентрація фонів мала і розсіювання електронів відбувається за рахунок взаємодії з домішковими атомами. Особливо таке розсіювання електронів характерне для сплавів. А так як концентрація домішкових атомів від температури не залежить, то і рухливість теж не залежить від температури (крива 1 рис.11.2 переходить в горизонтальну ділянку).

Для напівпровідників залежність має колокоподібний вид з показником степеня при температурі $\pm 3/2$.

11.3 Електропровідність чистих металів і сплавів. Температурний коефіцієнт опору

Електропровідність металів і сплавів зумовлена дрейфом носіїв одного знаку – електронів. Питома електропровідність виражається формулою (11.5). Величина, обернена питомій електропровідності, називається питомим опором. Це опір суцільного куба з ребром в 1 м при протіканні струму між протилежними гранями.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{qnU}, \quad [\text{Ом} \cdot \text{м}]. \quad (11.7)$$

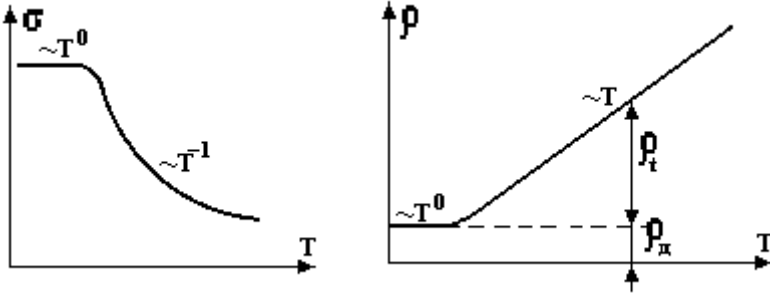


Рисунок 11.3

Температурна залежність (рис.11.3) обумовлена температурною залежністю рухливості, так як концентрація вільних носіїв у металах і сплавах від температури не залежить. Крива питомої електропровідності така ж як і рухливості (рис.11.2, крива 1), а для питомого опору пропорційна температурі, і тільки при низьких температурах переходить в горизонтальну ділянку. Питомий опір сплавів має дві складові: температурно-залежну ρ_t , і домішкову ρ_d незалежну від температури.

$$\rho = \rho_t + \rho_d \quad (11.8)$$

Для металів високої чистоти домішкова складова близька до нуля, і тому загальний питомий опір теж зменшується до нуля. Але це не надпровідність. Температурна складова питомого опору

$$\rho_t = \rho_o(1 + \alpha t^o) \quad (11.9)$$

лінійно зростає з температурою. У формулі (11.9) ρ_o – питомий опір

при 0^oC ,

$$\alpha = \frac{d\rho}{\rho \cdot dT}, \quad \left[\frac{1}{\text{K}} \right] \quad (11.10)$$

температурний коефіцієнт опору (скорочено ТКР) показує відносну зміну опору при зміні температури на 1К. Знайдемо його α_c для сплаву, скориставшись (11.8) і (11.10)

$$\alpha_c = \frac{d(\rho_d + \rho_t)}{(\rho_d + \rho_t) \cdot dT} = \frac{d\rho_t}{(\rho_d + \rho_t) \cdot dT} = \frac{1}{\left(\frac{\rho_d}{\rho_t} + 1\right)} \cdot \frac{d\rho_t}{\rho_t \cdot dT} = \frac{\alpha_{\text{чист.}}}{\left(\frac{\rho_d}{\rho_t} + 1\right)}$$

де $\alpha_{\text{чист.}}$ – ТКР чистого металу, для якого $\rho_d = 0$. Знаменник завжди більший 1. Отже ТКР сплаву завжди менший, ніж ТКО чистого металу. Різниця може досягати десятків разів. В табл.11.1 приведені ТКР деяких металів і сплавів.

Таблиця 11.1

| Чисті метали і стопи | Мідь Cu | Олово Sn | Нікель Ni | Бронза (88% Cu, 18% Sn, 1% Pb) | Ніхром (80% Ni, 20% Cr) |
|----------------------------------|------------|-------------|--------------|---|-------------------------------|
| $\alpha, 10^{-3}, \text{K}^{-1}$ | 4,1 | 4,2 | 6,2 | 0,5 | 0,13 |

Сплави з малим ТКР використовуються для виготовлення термостабільних резисторів.

11.4 Концентрація вільних носіїв заряду в напівпровідниках

У напівпровідниках для утворення (генерації) вільних носіїв заряду необхідно затратити певну енергію, достатню для подолання електроном певного інтервалу заборонених значень енергії: для власних напівпровідників між валентною зоною та зоною провідності (ΔE_g) (рис.10.3, а) перехід 1); для донорного – енергію активації донорного атома E_D (рис.10.3, б) перехід 2); для акцепторного – енергію активації акцепторного атома E_A (рис.10.3, в) перехід 3). Але по мірі зростання кількості генераційних переходів 1, 2, 3 зростає і кількість зворотних рекомбінаційних переходів $1^1, 2^1, 3^1$, які приводять до загибелі (зникнення) вільних носіїв. Коли кількості генераційних і рекомбінаційних переходів зрівнюються, встановлюється динамічна рівновага. При збільшенні потужності джерела енергії (генератора) знову встановлюється динамічна рівновага, але вже при більшій концентрації вільних носіїв, яка залежить від температури так:

У власних напівпровідниках

$$n_i = p_i = \sqrt{N_C N_V} \cdot e^{-\frac{\Delta E_g}{2kT}}, \quad (11.11)$$

в донорних

$$n = \sqrt{N_C N_D} \cdot e^{-\frac{E_D}{2kT}}, \quad (11.12)$$

в акцепторних

$$p = \sqrt{N_V N_A} \cdot e^{-\frac{E_A}{2kT}}. \quad (11.13)$$

Тут: N_C , N_V – кількість квантових станів у одиниці об'єму відповідно у зоні провідності і у валентній зоні, N_D , N_A – концентрації відповідно донорної і акцепторної домішок, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

Температурні залежності концентрації вільних носіїв струму будуються за методом лінеаризації графіка. Суть цього методу полягає в тому, що виходячи з теоретичної формули, знаходять такі координати для побудови графіка, щоб він мав вид прямої лінії. Наші температурні залежності (11,11) – (11.13) спрямляються в так званих напівлогарифмічні координатах. Для їх знаходження необхідно виконати операцію протилежну основаній, в нашому випадку операцію натурального логарифма, $E_D \approx E_A$ яка протилежна експоненті. Логарифмування виразів (11.11)–(11–13) дає відповідно:

$$\ln n = \ln p = \ln \sqrt{N_C N_V} - \frac{\Delta E_g}{2k} \cdot \frac{1}{T} = \ln n_o - \frac{\Delta E_g}{2k} \cdot \frac{1}{T}; \quad (11.14)$$

$$\ln n = \ln \sqrt{N_C N_D} - \frac{\Delta E_D}{2k} \cdot \frac{1}{T} = \ln n_o - \frac{\Delta E_D}{2k} \cdot \frac{1}{T}; \quad (11.15)$$

$$\ln p = \ln \sqrt{N_C N_V} - \frac{\Delta E_D}{2k} \cdot \frac{1}{T} = \ln n_o - \frac{\Delta E_D}{2k} \cdot \frac{1}{T} \quad (11.16)$$

Якщо по осі ординат відкладати не саму концентрацію, а її натуральний логарифм, а по осі абсцис не температуру T , а обернену температуру, графіки спрямляться (рис.11.4).

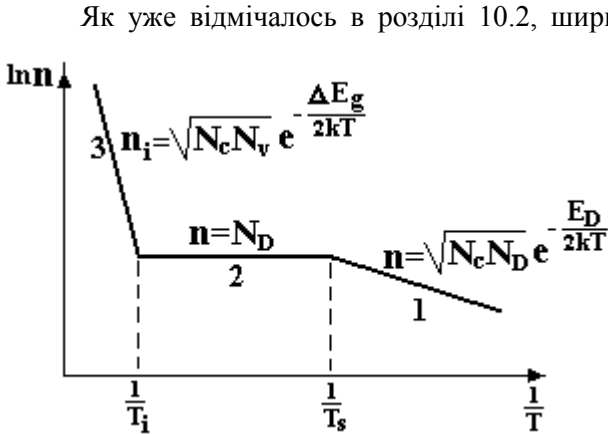


Рисунок 11.4

Генераційні

переходи 1 (рис.10.3) відбуваються при відносно високих температурах (рис.11.4, ділянка 3, а переходи 2 і 3 – при низьких температурах (рис.11.4, ділянка 1). Більш того, у зв'язку з тим, що концентрація домішкових атомів величина стала для даного зразка напівпровідника (вона задається технологічним процесом легування), при деякій температурі іонізуються всі домішкові атоми. Тому зростання концентрації так званих домішкових носіїв струму припиняється. Такий стан називається станом виснаження домішки, а температура – температурою виснаження домішки T_s . При подальшому нагріванні аж до появи переходів 1 (зона-зона) концентрація вільних носіїв не змінюється (рис.11.4, ділянка 2). Температура T_i називається температурою переходу до власної електропровідності. Таким чином, для власних напівпровідників маємо тільки ділянку 3, при високих температурах, а для домішкових – ділянку 1 при низьких температурах, ділянку 3 при високих температурах і ділянку 2 в перехідному інтервалі температур. Важливо відмітити, що при температурах вищих за T_i домішкові напівпровідники ведуть себе як власні, тобто втрачається різниця між донорними та акцепторними напівпровідниками

Для орієнтації в температурах приведемо приклад для германію:
 $T_s \approx 30\text{ К}$, $T_i \approx 360\text{ К}$.

11.5 Температурна залежність електропровідності власних напівпровідників

У власних напівпровідниках концентрація електронів і дірок однакові, так як кожний перехід електрона в зону провідності супроводжується виникненням вільної дірки у валентній зоні. Такі переходи відбуваються при високих температурах більших на T_i (див. розділ 11.4). Тому в електропровідності приймають участь і електрони і дірки, тобто має місце біполярна електропровідність. За виразами (11.5), (11.6) та (11.11) маємо

$$\sigma_i = \sigma_n + \sigma_p = qn_i(U_n + U_p) = q(U_n + U_p)\sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot e^{-\frac{\Delta E_g}{2kT}} = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E_g}{2kT}} \quad (11.17)$$

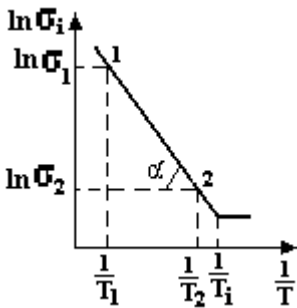


Рисунок 11.5

Графік цієї залежності (рис.11.5) в напівлогарифмічних координатах (аналогічний рис. 11.4) має вид прямої лінії. По нахилу цієї прямої відносно осі абсцис ($1/T$) можна експериментально визначити самий найважливіший параметр напівпровідника – ширину забороненої зони

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta E_g}{2k} = \frac{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \quad \text{звідки}$$

$$\Delta E_g = 2k \frac{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}. \quad (11.18)$$

11.6 Електропровідність домішкових напівпровідників

Розглянемо електропровідність домішкового, наприклад, донорного напівпровідника в трьох температурних інтервалах.

а) $T < T_S$ область низьких температур, тобто менших за температуру T_S виснаження домішки (див. розділ 11.4). За виразами (11.5) та (11.11) маємо

$$\sigma_n = qnU_n = qU_n \sqrt{N_C \cdot N_D} \cdot e^{-\frac{E_D}{2kT}} = \sigma_0 e^{-\frac{E_D}{2kT}} \quad (11.19)$$

Графік цієї залежності (рис.11.6 ділянка 1) в напівлогарифмічних координатах (аналогічний рис. 11.4) має вид прямої лінії. По нахилу цієї прямої відносно осі абсцис ($1/T$) можна експериментально визначити такий параметр напівпровідника, як енергію активації домішки

$$E_D = 2k \frac{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}. \quad (11.20)$$

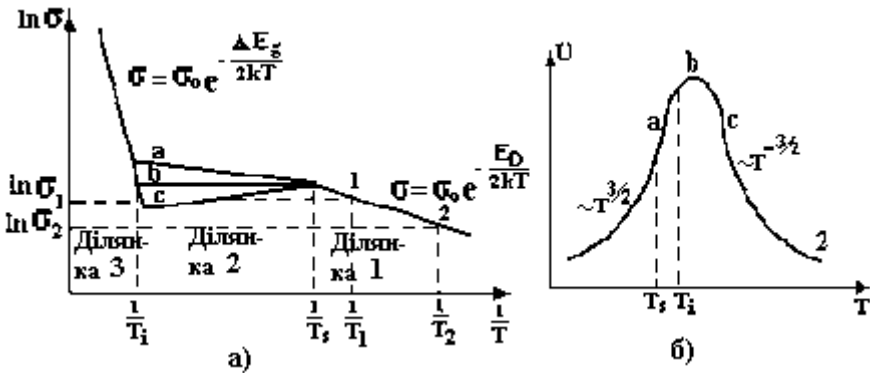


Рисунок 112

б) $T_S < T < T_i$ перехідна область від температури виснаження домішки T_S до температури переходу до власної електропровідності T_i (рис.11.6 ділянка 2). Тут концентрація електронів не змінюється. Дійсно всі домішкові атоми вже іонізовані, а для переходу електрона із валентної зони в зону провідності, долаючи заборонену зону, теплової енергії ще недостатньо. Саме в цій області проявляється температурна залежність рухливості. В залежності від того, на яку частину цієї залежності (а, b чи c рис. 11.6, б) попадає інтервал температур $T_S - T_i$ відповідно і буде вести себе електропровідність:

зростати (рис.11.6, а), майже не змінюватись, чи спадати. Найчастіше проявляється останній випадок.

в) $T > T_i$ область високих температур, тобто вищих за температуру переходу до власної електропровідності (рис.11.6 ділянка 3). Це область власної електропровідності (див. розділ 11.5), в якій. різниця між власними, n- та p-напівпровідниками зникає.

12 КОНТАКТ НАПІВПРОВІДНИКІВ З РІЗНИМ ТИПОМ ПРОВІДНОСТІ. p-n-перехід

12.1 Рівноважний стан p-n-переходу

Розглянемо контакт напівпровідників з різним типом провідності спочатку у рівноважному стані (без зовнішньої батареї). На рисунку 12.1 зліва показані зонні діаграми уособлених кристалів p – та n –

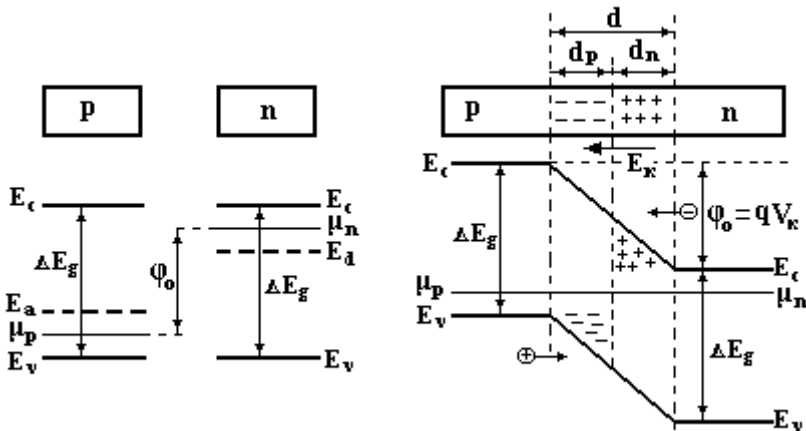


Рисунок 12.1

напівпровідників, тобто до створення контакту. Видно, що рівні Фермі μ_p та μ_n не співпадають. При утворенні контакту будуть відбуватись переходи основних носіїв заряду в сусідні області: електронів із n - напівпровідника в p - напівпровідник, дірок навпаки. Це зумовлене тим, що в домішкових напівпровідниках концентрація основних носіїв заряду набагато більша (приблизно на 6 порядків) від концентрації неосновних носіїв. Тому концентрації однойменних зарядів у сусідніх

областях відрізняються на 6 порядків. Такі переходи зумовлені градієнтом (різницею) концентрації носіїв заряду одного знаку. А отже має місце явище дифузії. Таким чином р-напівпровідник буде збагачуватись електронами і заряджатись негативно, а п-напівпровідник – дірками і заряджатись позитивно. Такі переходи і зміщення енергетичних рівнів будуть продовжуватись до встановлення динамічної рівноваги, тобто поки рівні Фермі співпадуть. Виникає контактне електричне поле E_K , яке направлене від п - напівпровідника до р - напівпровідника. Саме це поле перешкоджає подальшому переходу електронів і вони практично припиняються. На шляху носіїв заряду виникає потенціальний бар'єр, який, як видно з рис 12.1 дорівнює

$$\varphi_0 = \mu_n - \mu_p = qV_K. \quad (12.1)$$

Струм через контакт не протікає..

12.2 Запираюче (зворотнє) ввімкнення р-п-переходу

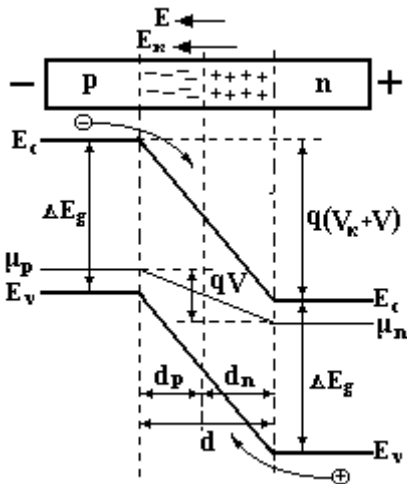


Рисунок 12.2

контактна область. Це область, в якій концентрація носіїв стала

Підключимо до р-переходу зовнішню напругу з такою полярністю, щоб зовнішнє електричне поле E співпадало за напрямком з контактним E_K . Для цього (-) зовнішньої батареї підключаємо до р - напівпровідника, а (+) - до п - напівпровідника (рис.12.2). Тепер контакт знаходиться в нерівноважному стані. Всі енергетичні рівні, в тому числі і рівень Фермі, р - напівпровідника піднімаються, а п - напівпровідника - опускаються. Висота потенціального бар'єру зростає на величину qV і стає рівною $q(V_K + V)$. Розширюється також і

іншою, ніж в незбуденій частині кристалу. Через р-п-перехід під дією зовнішньої батареї протікає зворотній струм, зумовлений неосновними носіями заряду. Дійсно, за напрямком струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів, тобто струм тече від (+) до (-). Отже електрони рухаються від (-) до (+), тобто від р – напівпровідника, де вони являються неосновними носіями, до п – напівпровідника. Дірки рухаються в протилежному напрямку. Для таких переходів, як видно з енергетичної діаграми (рис.12.2) ніяких перешкод немає. Електрони немов би скочуються з «гірки» (див.рис.12.2), а дірки не

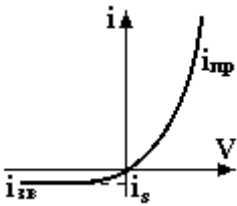


Рисунок 12.3

мов спливають, як бульбашки повітря у воді. Але зворотний струм невеликий, оскільки концентрація неосновних носіїв заряду мала. Кажуть зворотний струм зазнає концентраційного обмеження. При збільшенні зовнішньої напруги V він зростає за експонентою (12.2), але швидко виходить на насичення. Вольт-амперна характеристика р-п-переходу показана на рис.12.3.

$$i_{зв} = i_s \left(e^{-\frac{qV}{kT}} - 1 \right). \quad (12.2)$$

12.3 Пряме ввімкнення р-п-переходу

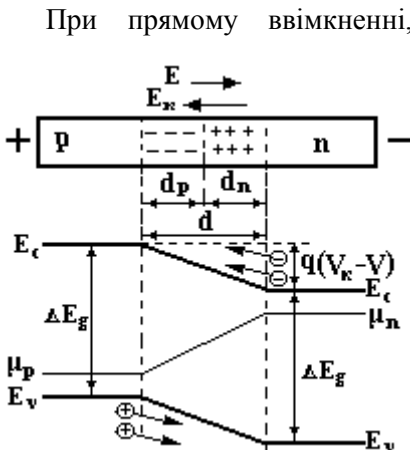


Рисунок 12.4

При прямому ввімкненні, коли напруженість зовнішнього електричного поля протилежна контактному, енергетичні рівні р-напів-провідника опускаються, а п-напівпровідника піднімаються (рис.12.4). Висота потенціального бар'єру для основних носіїв заряду, а саме ними забезпечується прямий струм, зменшується на величину qV , приймаючи значення $q(V_k - V)$. Тому їх потік через контакт різко зростає. Зменшується і ширина збуденої

контактної області, що приводить до зменшення опору контакту і зростанню прямого струму. Закон його зміни описується формулою (12.3), а вольт-амперна характеристика показана на рис.12.3.

$$i_{\text{пр}} = i_s \left(e^{+\frac{qV}{kT}} - 1 \right). \quad (12.3)$$

12.4 p-n- перехід і його випрямляючі властивості

Основне призначення p-n-переходів (діодів). – це випрямлення змінного струму. Як показано в розділах 12.2 і 12.3 прямий струм p-n-переходу більший за зворотний. Одним із параметрів діодів є коефіцієнт випрямлення k . Це відношення прямого струму до зворотного при однакових значеннях напруги

$$k = \frac{i_{\text{пр}}}{i_{\text{зв}}}. \quad (12.4)$$

Отже діоди мають властивість добре пропускати струм в одному напрямку і погано в протилежному. В цьому полягає його випрямляюча властивість.

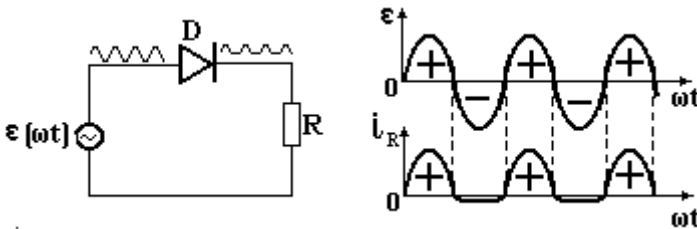


Рисунок12.5

Якщо послідовно з'єднати резистор R і діод D і підключити їх до джерела змінної напруги $\epsilon(\omega t)$ (рис.12.5) то діод буде пропускати струм в ті напівперіоди, коли його p-n-перехід зміщений у прямому напрямку (на рис.12.5 вони відмічені знаком +) і

не пропускати струм в моменти від'ємних напівперіодів. Одержуємо пульсуючий, але одного напрямку струм.

Для якісних діодів коефіцієнт випрямлення дорівнює порядку 10^8 .

ЛІТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.2 [Текст]/ И.В. Савельев. - М.: Наука Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.1 [Текст]/ И.В. Савельев. - М.: Наука, 1982.- 432с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.2 [Текст]/ И.В. Савельев. - М.: Наука, 1982.- 496 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.3 [Текст]/ И.В. Савельев. - М.: Наука, 1982.- 304 с.
4. Трофимова, Т.И. Курс физики [Текст]/Трофимова Т.И. - М: Академия, 2006.-560 с.
5. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика [Текст] / Д.В.Сивухин.– М: Наука, 2005, - 559 с.
Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Т.3. Электричество [Текст] / Д.В.Сивухин.– М: Наука, 2004, - 654 с.
6. Воловик, П.М. Фізика: Для університетів [Текст] / П.М.Воловик. – К.: Ірпінь: Перун, 2005.–864 с.
7. Чолпан, П.П. Фізика [Текст]/ П.П.Чолпан.– К.: Вища школа, 2003.- 512с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т.7[Текст] /Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.–М.: Наука, 1982.–620 с.
9. Калашников, С. Г. Электричество. Учебн. пособие [Текст]/С.Г.Калашников М.: Физматлит, 2003.– 624 с.
10. Александров, Н.В. Курс общей физики. Механика. [Текст]/Н.В.Александров, А.Я.Яшкин.–М.: Просвещение, 1978.– 416 с

11. Иродов, И.Е. Механика. Основные законы. Учебник для ВУЗов [Текст] / И.Е. Иродов. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 309 с.
12. Бушок, Г.Ф. Курс фізики. - т. 1, 2, 3 [Текст] / Г.Ф. Бушок, С.Ф. Венгер. – К.: Вища школа, 2002.
13. Кучерук, І.М. Загальний курс фізики. Т. Т1.2.3.1, 2, 3 [Текст] / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук, П.П. Луцик. – К.: Техніка, 1999.
14. Епифанов, Г.И. Физика твердого тела: Учеб. пособие для втузов [Текст] / Г.И. Епифанов. – М.: Высшая школа, 1977. – 288 с.
15. Зачек І. Р., Кравчук І. М., Романишин Б. М., Габа В. М., Гончар Ф. М. Курс фізики: Навчальний підручник. – Львів: Видавництво “Бескид Біт”, 2002.
16. Дмитриева, В.Ф. Основы физики: Учеб. пособие для студ. вузов [Текст] / В.Ф. Дмитриева, В.Л. Прокофьева. – М.: Высшая школа, 2001. – 527 с.
17. Тамм, И.Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов [Текст] / И.Е. Тамм. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.
18. Шалимова, К. В. Физика полупроводников [Текст] / К.В. Шалимова. – М.: Энергия, 2010. – 392 с.
19. Яворский, Б.М. Курс Физики [Текст] / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, С.М. Милковская. – М.: Высшая школа, 1964.
20. Иродов, И.Е. Механика. Основы знаний [Электронный ресурс] / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория знаний, 2017. – 1 pdf файл 312 с.

ГІПЕР-ЗМІСТ ЗМІСТ

1 ВСТУП

1.1 Предмет і задачі фізики

2 МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

2.1 Основні поняття і задача кінематики

2.2 Класифікація механічного руху

2.3 Способи задавання руху точки у просторі

2.4 Швидкість при криволінійному русі

2.5 Прискорення при криволінійному русі. Дотична та нормальна складові прискорення

2.6 Рух тіла по колу. Кутова швидкість та кутове прискорення.

Аналогія поступального і обертального рухів

3 ДИНАМІКА

3.1 Закони Ньютона. Маса. Сила

3.2 Імпульс. Загальне формулювання 2-го закону Ньютона. Закон збереження імпульсу

3.3 Сили пружності. Закон Гука для деформації розтягування (стискування)..

3.4 Закон Гука для деформації зсуву

3.5 Сили тертя. Сухе тертя. Сили тертя спокою, ковзання, кочення

3.6 Сила тяжіння. Закон всесвітнього тяжіння.

Гравітаційне поле та його напруженість

4. РОБОТА. ЕНЕРГІЯ. ІМПУЛЬС. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ...

4.1 Механічна робота. Потужність

4.2 Поняття про енергію. Кінетична та потенціальна енергії

4.3 Закон збереження механічної енергії

5. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

- 5.1 Обертальний рух твердих тіл. Абсолютно тверде тіло. Момент сили. Пара сил
- 5.2 Основне рівняння динаміки обертального руху
- 5.3 Аналогія величин і рівнянь поступального і обертального руху. Кінетична енергія обертання тіла
- 5.4 Розрахунок моментів інерції деяких тіл. Теорема Штейнера
- 6 ЕЛЕКТРОДИНАМІКА. ЕКТРОСТАТИКА
- 6.1 Закон Кулона. Силкові характеристики поля
- 6.2 Принцип суперпозиції та його застосування до розрахунку електростатичного поля
- 6.3 Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування до розрахунку електростатичного поля заряджених тіл...
- 6.4 Робота в електростатичному полі. Різниця потенціалів. Потенціал. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля
- 6.5 Еквіпотенціальні поверхні. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля
- 6.6 Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів
- 6.7 Енергія та густина енергії електростатичного поля
- 7 ЗАКОНИ ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ
- 7.1 Закон Ома
- 7.2 Закони Кірхгофа для розгалужених електричних кіл
- 7.3 Закон Джоуля-Ленца
- 8 ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
- 8.1 Магнітне поле рухомих зарядів. Індукція магнітного поля. Закон Ампера
- 8.2 Закон Біо-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиції для магнітного поля
- 8.3 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля на осі колового струму
- 8.4 Застосування закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції для розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника із струмом
- 8.5 Циркуляція вектора напруженості магнітного поля. Закон повного струму та його застосування для розрахунку магнітного поля
- 8.6 Дія магнітного поля на рухомий заряд (сила Лоренца). Рух заряду в магнітному полі
- 8.7 Магнітний потік. Механічна робота в магнітному полі
- 8.8 Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца

- 8.9 [Явище самоіндукції. Індуктивність. Індуктивність соленоїда](#)
- 8.10 [Енергія та густина енергії магнітного поля](#)
- 9 [КОЛИВАННЯ](#)
- 9.1 [Комплексні числа та дії з ними](#)
- 9.2 [Порядок розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами](#)
- 9.3 [Вільні незатухаючі гармонічні коливання. Диференціальне рівняння цих коливань \(пружинний маятник, коливальний контур\)](#)
- 9.4 [Розв'язок диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань](#)
- 9.5 [Характеристики гармонічних коливань. Фазові співвідношення](#)
- 9.6 [Енергія гармонічних коливань](#)
- 9.7 [Фізичний та математичний маятники](#)
- 9.8 [Додавання гармонічних коливань одного напрямку рівних частот](#)
- 9.9 [Додавання гармонічних коливань одного напрямку близьких частот \(биття коливань\)](#)
- 9.10 [9.10 Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань \(Фігури Ліссажу\)](#)
- 9.11 [Затухаючі коливання. Диференціальне рівняння затухаючих коливань та його розв'язок](#)
- 9.12 [Характеристики затухаючих коливань та їх фізичний зміст](#)
- 9.13 [Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок](#)
- 9.14 [Резонанс напруг у коливальному контурі. Резонансні криві](#)
- 9.15 [Резонанс струмів у коливальному контурі](#)
- 9.16 [Векторні діаграми](#)
- 10 [ЕЛЕМЕНТИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ](#)
- 10.1 [Узагальнення електронів у кристалі. Принцип Паулі. Утворення енергетичних зон](#)
- 10.2 [Заповнення зон електронами. Провідники, діелектрики, напівпровідники](#)
- 11 [ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ ТВЕРДИХ ТІЛ](#)
- 11.1 [Дрейф носіїв струму в електричному полі. Рухливість носіїв струму. Питома електропровідність. Ефективна маса](#)
- 11.2 [Залежність рухливості носіїв заряду від температури](#)
- 11.3 [Електропровідність чистих металів і сплавів. Температурний коефіцієнт опору](#)
- 11.4 [Концентрація вільних носіїв заряду в напівпровідниках](#)

- 11.5 [Температурна залежність електропровідності власних напівпровідників](#)
 - 11.6 [Електропровідність домішкових напівпровідників](#)
 - 12 [КОНТАКТ НАПІВПРОВІДНИКІВ З РІЗНИМ ТИПОМ ПРОВІДНОСТІ. p-n-перехід](#)
 - 12.1 [Рівноважний стан p-n-переходу](#)
 - 12.2 [Запираюче \(зворотне\) ввімкнення p-n-переходу](#)
 - 12.3 [Пряме ввімкнення p-n-переходу](#)
 - 12.4 [p-n- перехід і його випрямляючі властивості](#)
- [**ЛІТЕРАТУРА**](#)