Міністерство освіти і науки України
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

для самостійної роботи
з курсу вищої математики за темою
“ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ”

для студентів всіх спеціальностей
денної форми навчання

2019

Індивідуальні завдання для самостійної роботи з курсу вищої математики за темою “Функції багатьох змінних” для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання / Укл. Нечипоренко Н.О.– Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 34 с.

Укладач: Нечипоренко Н.О., доцент, к.ф.-м.н.

Рецензент: Коротунова О. В., доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Нечипоренко Н.О.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 6 від 13.02.2019 р.

Рекомендовано до видання
НМК факультету
радіоелектроніки та
телекомунікацій
Протокол № 5 від 21.02.2019 р.

ЗМІСТ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають функцією двох (багатьох) змінних?
2. Яке означення границі функції двох змінних?
3. Які основні теореми про границі функції багатьох змінних?
4. Яке означення неперервності функції двох змінних?
5. Що таке частинні й повний прирости функцій двох змінних?
6. Яке означення частинних похідних функції двох змінних?
7. Як обчислюються частинні похідні першого та другого порядків?.
8. Яку функцію двох змінних називають диференційованою в точці?
9. Яка достатня умова диференційованості функції?
10. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
11. За якою формулою обчислюється повний диференціал функції?
12. Які правила знаходження похідної складної функції двох змінних?
13. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно?
14. Як знайти похідну функції за напрямом даного вектору?
15. Що називають градієнтом функції? Що він характеризує?
16. Як записується формула Тейлора для функції двох змінних?
17. Який вигляд мають рівняння дотичної площини та нормалі до даної поверхні в точці M_0?
18. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних?
19. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних?
20. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції двох змінних?
21. За яким алгоритмом знаходять найбільше й найменше значення функції двох змінних в області?
22. Які екстремуми функції багатьох змінних називають умовними?
23. Який вигляд має функція Лагранжа для знаходження умовного екстремуму функції двох змінних?
24 Як формулюються необхідні умови умовного екстремуму функції двох змінних?
25. Як формулюються достатні умови умовного екстремуму функції двох змінних?

ЗАВДАННЯ № 1

Знайти область визначення функції.

1. $z = \frac{4xy}{x^2 - y^2}$.

2. $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 6}$.

3. $z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

4. $z = \sqrt{1 - x - y}$.

5. $z = \frac{7x^2 y}{x - 4y}$.

6. $z = \ln(2x - y)$.

7. $z = \frac{5}{4 - x^2 - y^2}$.

8. $z = \frac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 4}$.

9. $z = 4x + \frac{y}{2x - 5y}$.

10. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$.

11. $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

12. $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

13. $z = \arcsin(2x - y)$.

14. $z = \arccos(x + 2y)$.

15. $z = \frac{x^3 y}{3 + x - y}$.

16. $z = \ln(y^2 - x^2)$.

17. $z = \arcsin(x + y)$.

18. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$.

19. $z = \frac{4xy}{x - 3y + 1}$.

20. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$.

21. $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$.

22. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

23. $z = 3x + \frac{y}{2 - x + y}$.

24. $z = \arccos(x + y)$.

25. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$.

26. $z = \frac{2}{6 - x^2 - y^2}$.

27. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

28. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$.

29. $z = \arcsin(x - y)$.

30. $z = \frac{3xy}{2x - 5y}$.

ЗАВДАННЯ № 2

Знайти повний диференціал функції.

1. а) $z = \sqrt{2x^3y - 4xy^5}$;

   б) $z = \operatorname{arctg}\frac{xy}{4}$.

2. а) $z = x^2\sin y - 3y$;

   б) $z = \ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

3. а) $z = \operatorname{arctg}(x) + xy^2$;

   б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

4. а) $z = \arcsin(xy^3)$;

   б) $z = \sin^2 x + \cos^2\frac{y}{x}$.

5. а) $z = \left(5xy^4 + 2x^2y^7 + \sqrt{2}\right)^3$;

   б) $z = yx^y$.

6. а) $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$;

   б) $z = (\arcsin x)^{\cos y}$.

7. а) $z = \ln(3x^2 - 2y^3)$;

   б) $z = -e^{\sin\frac{y}{x}}$.

8. а) $z = \sqrt{5xy^2 - 3x^3y^4 + 3}$;

   б) $z = \arcsin\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$.

9. а) $z = \arcsin(x + y^2)$;

   б) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

10. а) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$;

    б) $z = \ln\sqrt{x^2 - y^2}$.

11. а) $z = 7x^3y - \sqrt{xy^3}$;

    б) $z = \ln\sin\frac{x+2}{\sqrt{y}}$.

12. а) $z = (4x^3y^2 + xy^4 - \sqrt{2})^2$;

    б) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

13. а) $z = e^{x+y^2}$;

    б) $z = \arccos(\sqrt{xy})$.

14. а) $z = \operatorname{ctg}(x + y^2) - y^3$;

    б) $z = \operatorname{tg}\frac{x+y}{xy}$.

15. а) $z = \operatorname{tg}(x^2 + y) - y^2$;

    б) $z = (x^2 + 6)^{\sin y}$.

16. а) $z = \operatorname{ctg}(x - 2y^2)$;

    б) $z = \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{y}}$.

17. а) $z = (xy^4 - 3x^2y + \sqrt{7})^3$;

б) $z = \ln\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

18. а) $z = \ln(x + xy - y^2)$;

б) $z = (\sin x)^{\cos 2y}$.

19. а) $z = \sqrt{2x^2y^4 + x^3 - y^2 - 8}$;

б) $z = \ln\sin\frac{x}{y}$.

20. а) $z = (3x^2 - 2yx)^3$;

б) $z = e^{\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{y}\right)}$.

21. а) $z = \arcsin(2 + xy^2)$;

б) $z = \ln^2\frac{x}{y^2}$.

22. а) $z = \operatorname{arctg}(x - y^2)$;

б) $z = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{x}{y}}$.

23. а) $z = (3x^2 - y^2 + xy^3)^4$;

б) $z = e^{\frac{x^2}{y}} \cdot x$.

24. а) $z = \arccos(x + 2y^2)$;

б) $z = e^{\sin(\sqrt{x} + y^2)}$.

25. а) $z = \ln(x^2 - y^2 + 2xy)$;

б) $z = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\right)$.

26. а) $z = (2 - x^3y^2 - y^4)^3$;

б) $z = \frac{\arcsin^2 y}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.

27. а) $z = \sqrt{7x - x^2y^3 + 2}$;

б) $z = \arccos\left(\sqrt{\frac{x-y}{y}}\right)$.

28. а) $z = e^{xy^2 + 2x}$;

б) $z = (\operatorname{arctg}y)^{\frac{x}{2}}$.

29. а) $z = (3x^2y - y^3 + \sqrt{5})^2$;

б) $z = \ln(\sqrt{x^3y + y^3x})$.

30. а) $z = 2^{y^3 - 4xy - 1}$;

б) $z = x^y y^x$.

ЗАВДАННЯ № 3

Обчислити значення похідної складної функції $z = z(x, y)$, де

$x = x(t), y = y(t)$ при $t = t_0$ з точністю до двох знаків після коми.

1. $z = e^{x-2y},\ x = \sin t,\ y = t^3,\ t_0 = 0.$

2. $z = \ln(e^x - e^{-y}),\ x = t^2,\ y = t^3,\ t_0 = -1.$

3. $z = y^x,\ x = \ln(t-1),\ y = e^{t/2},\ t_0 = 2.$

4. $z = e^{y-2x+2},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi/2.$

5. $z = x^2 e^y,\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \pi.$

6. $z = \ln(e^x + e^y),\ x = t^3,\ y = t^2,\ t_0 = 1.$

7. $z = x^y,\ x = e^t,\ y = \ln t,\ t_0 = 1.$

8. $z = e^{y-2x},\ x = \sin t,\ y = t^3,\ t_0 = 0.$

9. $z = x^2 e^{-2y},\ x = \sin t,\ y = \sin^2 t,\ t_0 = \pi/2.$

10. $z = \ln(e^{-x} + e^y),\ x = t^2,\ y = t^3,\ t_0 = -1.$

11. $z = e^{y-2x-1},\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t_0 = \pi/2.$

12. $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$

13. $z = \arccos\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$

14. $z = \frac{x^2}{y+1},\ x = 1 - 2t,\ y = \operatorname{arctg} t,\ t_0 = 0.$

15. $z = \ln(e^{-x} + e^{-2y}),\ x = t^2,\ y = \frac{1}{3}t^3,\ t_0 = 1.$

16. $z = \frac{x}{y+1},\ x = e^t,\ y = 2 - e^{2t},\ t_0 = 0.$

17. $z = \ln(e^{2x} + e^y),\ x = t^2,\ y = t^4,\ t_0 = 1.$

18. $z = \sqrt{x^2 + y + 3},\ x = t^2,\ y = \ln t,\ t_0 = 1.$

19. $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$

20. $z = \frac{y^2}{2x+1},\ x = 1 - 2t,\ y = 1 + \operatorname{arctg} t,\ t_0 = 0.$

21. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y},\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi/4.$

22. $z = \arcsin\left(\frac{x}{2y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$

23. $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},\ x = \sin 2t,\ y = \operatorname{tg}^2 t,\ t_0 = \pi/4.$

24. $z = \sqrt{x + y + 3},\ x = \ln t,\ y = t^2,\ t_0 = 1.$

25. $z = \frac{y}{x},\ x = e^t,\ y = 1 - e^{2t},\ t_0 = 0.$

26. $z = \arcsin\left(\frac{2x}{y}\right),\ x = \sin t,\ y = \cos t,\ t_0 = \pi.$

27. $z = \ln(e^{2x} + e^y),\ x = t^2,\ y = t^4,\ t_0 = 1.$

28. $z = \operatorname{arctg}(x + y),\ x = t^2 + 2,\ y = 4 - t^3,\ t_0 = 1.$

29. $z = \sqrt{x^2 + y^3 + 3},\ x = \ln t,\ y = t^3,\ t_0 = 1.$

30. $z = \operatorname{arctg}(xy),\ x = t + 3,\ y = e^t,\ t_0 = 0.$

ЗАВДАННЯ № 4

Знайти частинні похідні $z'_x,\ y'_z,\ x'_y$ функції, заданої неявно.

1. $x^2 + y^2 - z^2 - xy = e^{\frac{x}{z}}$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 = e^{2x} \cdot y$.
3. $x + y - e^{xz} = 6\cos(xy)$.
4. $x^2 - zy^2 - e^{yz} = 0$.
5. $\sin(xyz) + 5xz^2 = 0$.
6. $z^2 = \ln\left(\frac{x+2z}{y}\right)$.
7. $\cos\left(\frac{xy}{z}\right) = -4yz^2 + 5$.
8. $3^{xz^2} + x\sqrt{y} = 3z - 1$.
9. $e^{z^2} - x^2y^3\ln z = 5y$.
10. $\cos(xyz) + yz^2 = \ln 3$.
11. $\cos(xy) - \log_2(xz) = z^2$.
12. $y^2 + \ln(x - z) - z^3 = 2^{xy}$.
13. $\cos(y^2) + \ln(x^2 - z^2) = z$.
14. $e^{xyz^2} + 5x - \ln z + 3y = 5$.
15. $x^3 + y^3 - e^{y^2+z^2} = 3\,\mathrm{tg}\, z$.
16. $z^3 = xy^2 + \mathrm{arctg}(xy)$.
17. $y^2 + 5 = \arcsin\left(\frac{x}{z}\right)$.
18. $z = x + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{xz}\right)$.
19. $xe^y + ye^x + z^2 = 9$.
20. $x\sin y + y\cos z + \mathrm{tg}\, x = 5$.
21. $e^{zx} + xy + z^2 = 4$.
22. $\ln z = xy^2 + 2y + \ln 3$.
23. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3xy = 17$.
24. $x^4 + 3xyz - z^3 = 27$.
25. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 8$.
26. $e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1$.
27. $\sin\left(\frac{xy}{z}\right) = y^2 + xz$.
28. $5^{xy^2} - z^2 = 6x + 3$.
29. $x\ln(yz) = z^2 + \ln 4$.
30. $x^2 = \ln\left(\frac{y+2x}{z}\right)$.

ЗАВДАННЯ № 5

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1. $S: z = 2x^2 - 4y^2$, $M_0(2; 1; 4)$.

2. $S: z = \operatorname{arctg}(2y - x)$, $M_0(1; 1; \frac{\pi}{4})$.

3. $S: z = y + \ln(2x - z)$, $M_0(1; 1; 1)$.

4. $S: x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, $M_0(2; 1; 1)$.

5. $S: z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M_0(3; 4; -7)$.

6. $S: (z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, $M_0(1; 1; 2)$.

7. $S: x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $M_0(1; 2; -1)$.

8. $S: 3x^4 - 4y^3z + 4z^2y - 4z^3x + 1 = 0$, $M_0(1; 1; 1)$.

9. $S: x^2z + y^2z = 4$, $M_0(-2; 0; -1)$.

10. $S: (8 - z^2)x^2 = 4y^2$, $M_0(2; 2; 2)$.

11. $S: z = x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(1; 2; 11)$.

12. $S: xy - 2x = y^2 - z$, $M_0(2; 1; -1)$.

13. $S: x + z - y = x^2 + y^2$, $M_0(-2; 2; 12)$.

14. $S: z = 2x^2 + 2xy - y^2$, $M_0(1; 3; -1)$.

15. $S: y^2 = x^2 + 3xy - z$, $M_0(1; 3; 1)$.

16. $S: z = xy + 2x - y$, $M_0(2; 2; 6)$.

17. $S: y - 9xy = z - 3y^2$, $M_0(1; 3; 3)$.

18. $S: z + y = xy + x$, $M_0(1; 2; 1)$.

19. $S: z = y^2 - xy - x^2$, $M_0(-4; 5; 29)$.

20. $S: x^2 + y^2 = z + x + y$, $M_0(1; -3; 12)$.

21. $S: x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$, $M_0(1; 0; -1)$.

22. $S: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4; 3; 4)$.

23. $S: x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$, $M_0(1; 2; 1)$.

24. $S: z = x^2 - y^2$, $M_0(1; 1; 0)$.

25. $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $M_0(0; 1; \sqrt{3})$.

26. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$, $M_0(3; -1; 5)$.

27. $S: z = x^2 + y^2$, $M_0(1; -2; 5)$.

28. $S: x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$, $M_0(2; 2; 3)$.

29. $S: z = 4x^2 - 9y^2$, $M_0(1; 1; -5)$.

30. $S: x = 2y^2 + 3z^2$, $M_0(5; 1; 1)$.

ЗАВДАННЯ № 6

Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = f(x, y)$.

1. $z = \mathrm{tg}(xy^2)$.
2. $z = \ln(3xy - 4)$
3. $z = \mathrm{arcctg}(x - 4y)$.
4. $z = \ln(5x^2 - 3y^4)$.
5. $z = \mathrm{arctg}(3x + 2y)$.
6. $z = \cos(3x^2 - y^3)$.
7. $z = \sin(xy)$.
8. $z = \arccos(x - 5y)$.
9. $z = \arcsin(4x + y)$.
10. $z = x\cos(x + 2y)$.
11. $z = \ln(4x^2 - 5y^3)$.
12. $z = \mathrm{arctg}(2x - y)$.
13. $z = \mathrm{arctg}(5x + 2y)$.
14. $z = \arccos(4x - y)$.
15. $z = \arcsin(x^2 - 2y)$.
16. $z = \sin(x^3y)$.
17. $z = \cos(x^2y^2 - 5)$.
18. $z = \mathrm{tg}(xy^2)$.
19. $z = \mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.
20. $z = e^{2x^2+y^2}$.
21. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.
22. $z = \mathrm{arctg}(x - 3y)$.
23. $z = \arccos(2x + y)$.
24. $z = \arcsin(x^2 - y)$.
25. $z = \mathrm{arctg}(x + y^3)$.
26. $z = \sin(x^2 - y)$.
27. $z = \cos(xy^2)$.
28. $z = \mathrm{tg}(x + y)^2$.
29. $z = \mathrm{ctg}(x^2 + y)$.
30. $z = e^{x^2-y^2}$.

ЗАВДАННЯ № 7

Знайти:

а) похідну функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ за напрямом вектору $\bar{a}$;

б) вектор $\bar{l}$, за напрямом якого функція $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ зростає з максимальною швидкістю.

1. $z = 3x^2 + 2xy$, $M_0(1,2)$, $\bar{a} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.

2. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(2,1)$, $\bar{a} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

3. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, $M_0(1,1)$, $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

4. $z = x^2 + 3xy^2$, $M_0(1,3)$, $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

5. $z = x^2 + y^2 + 2xy^2$, $M_0(3,1)$, $\bar{a} = -\bar{\imath} + \bar{\jmath}$.

6. $z = xe^y$, $M_0(2,0)$, $\bar{a} = 5\bar{\imath} + 12\bar{\jmath}$.

7. $z = \mathrm{arctg}(x^2y^2)$, $M_0(1,-1)$, $\bar{a} = 5\bar{\imath} - 12\bar{\jmath}$.

8. $z = \mathrm{arcctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, $M_0(2,-2)$, $\bar{a} = -\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}$.

9. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, $M_0(1,1)$, $\bar{a} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

10. $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$, $M_0(3,5)$, $\bar{a} = \bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

11. $z = 2x^2 + xy$, $M_0(-1,2)$, $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath}$.

12. $z = \mathrm{arcctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $M_0(-1,1)$, $\bar{a} = \bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

13. $z = x^3y + xy^2$, $M_0(1,3)$, $\bar{a} = -5\bar{\imath} + 12\bar{\jmath}$.

14. $z = \ln(2x + 3y)$, $M_0(2,2)$, $\bar{a} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

15. $z = 5x^2y + 3xy^2$, $M_0(1,1)$, $\bar{a} = 6\bar{\imath} - 8\bar{\jmath}$.

16. $z = \frac{3x}{y^2}$, $M_0(3,4)$, $\bar{a} = -3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

17. $z = \operatorname{arcctg}(xy)$, $M_0(2,3)$, $\bar{a} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath}$.

18. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$, $M_0(1,2)$, $\bar{a} = 3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

19. $z = x^3 + 2xy^2 + y$, $M_0(1,-2)$, $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath}$.

20. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$, $M_0(1,1)$, $\bar{a} = 2\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

21. $z = x^2 + 2xy + y^2$, $M_0(1,2)$, $\bar{a} = (3,4)$.

22. $z = 2xy - y^3 + x$, $M_0(-1,2)$, $\bar{a} = (-3,4)$.

23. $z = \ln(x^2 - y^3)$, $M_0(2,1)$, $\bar{a} = (3,-4)$.

24. $z = \ln(xy^2 + 1)$, $M_0(1,1)$, $\bar{a} = (-3,-4)$.

25. $z = \operatorname{arctg}(x^2y)$, $M_0(-2,1)$, $\bar{a} = (6,8)$.

26. $z = x^3 - 2xy + y^2$, $M_0(-2,-1)$, $\bar{a} = (-6,8)$.

27. $z = x^2 + xy - y^3$, $M_0(1,-2)$, $\bar{a} = (-6,-8)$.

28. $z = 2x^2 + y^2x - 4y$, $M_0(2,2)$, $\bar{a} = (6,-8)$.

29. $z = \ln(x^3y^2 + 1)$, $M_0(1,-1)$, $\bar{a} = (5,12)$.

30. $z = \operatorname{arctg}(xy)^3$, $M_0(3,1)$, $\bar{a} = (-5,12)$.

ЗАВДАННЯ № 8

Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$.

1. $z = 2x^2 + 5xy + 4y^2 - 3x - 5y$.

2. $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 3x - 4y$.

3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

4. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$.

5. $z = x^2 - xy + 5y^2 - 4x - 5y - 6$.

6. $z = 18x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 16y + 2$.

7. $z = 4x^2 + xy + 5y^2 - 50x + 60y - 5$.

8. $z = 3x^2 - 3xy + 9y^2 + 5x - 8y + 5$.

9. $z = 7x^2 - 2xy + 8y^2 - 2x + y$.

10. $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 3x + 2y + 5$.

11. $z = (x - y)^2 + (y - 1)^2$.

12. $z = 3x^2 - 2xy + 6y^2 + 10x - 12y + 3$.

13. $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$.

14. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

15. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$.

16. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$.

17. $z = 6xy - 9x^2 + 4x - 9y^2 + 4y$.

18. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$.

19. $z = 2x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy - 7$.

20. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

21. $z = x + 2y + 5(x^2 + y^2 - 3)$.

22. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$.

23. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

24. $z = 11 + 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$.

25. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

26. $z = 5 + 2x - x^2 + 2xy + y^2$.

27. $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y - 9$.

28. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.

29. $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 3y - 1$.

30. $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y - 17$.

ЗАВДАННЯ № 9

Знайти умовний локальний екстремум функції $z = f(x, y)$.

1. $z = x^2 + 28xy + y^2$ при умові $x + y = -2$.
2. $z = xy$ при умові $x + y = 8$.
3. $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}$ при умові $x + y = 5$.
4. $z = x^2 y$ при умові $x + y = 2$.
5. $z = xy$ при умові $x + y = 1$.
6. $z = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ при умові $x^2 + y^2 = 13$.
7. $z = x^2 + y^2$ при умові $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 13$.
8. $z = 2x + y$ при умові $x^2 - y^2 = 3$.
9. $z = 4xy$ при умові $2x + y = 2$.
10. $z = xy$ при умові $x + 2y = 2$.
11. $z = x + 2y$ при умові $x^2 + y^2 = 5$.
12. $z = 6 - 4x - 3y$ при умові $x^2 + y^2 = 1$.
13. $z = e^{xy}$ при умові $x + y = 2$.
14. $z = xy$ при умові $2x + 3y - 6 = 0$.
15. $z = x^2 + y^2$ при умові $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{25}{12}$.

16. $z = x^2 + y^2$ при умові $x + y = 2$.

17. $z = 2x - 3y$ при умові $x^2 + y^2 = 13$.

18. $z = xy$ при умові $3x - 2y = 6$.

19. $z = x^2 + y^2$ при умові $x + y = 1$.

20. $z = x^2 + y^2$ при умові $x - y = 1$.

21. $z = x^3 + y^2 - 5$ при умові $x + y - 4 = 0$.

22. $z = x - 2y$ при умові $x^2 + y^2 = 20$.

23. $z = xy^2$ при умові $x + 2y = 6$.

24. $z = x - 2y$ при умові $x^2 + y^2 = 5$.

25. $z = e^{xy}$ при умові $x + y = 4$.

26. $z = xy$ при умові $3x + 4y = 12$.

27. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при умові $x + y + 3 = 0$.

28. $z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ при умові $x^2 + y^2 = 1$.

29. $z = xy^2$ при умові $x + 2y = 1$.

30. $z = 2x + y$ при умові $x^2 + y^2 = 1$.

ЗАВДАННЯ № 10

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f\,(x, y)$ в замкненій області D.

1. $z = x^2 + y^2 - xy - 5x - 4y + 10;\qquad D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4.$
2. $z = 2x^2 + y^2 - 6xy;\qquad D: x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -1.$
3. $z = 4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y;\qquad D: x \geq 0,\ y \leq 0,\ y - x \geq -1.$
4. $z = (x - 2)^2 + 2y^2;\qquad D: -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2.$
5. $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8;\qquad D: -3 \leq x \leq 3,\ -3 \leq y \leq 0.$
6. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7;\qquad D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2.$
7. $z = x^3 - 3x^2y + 3y + 5;\qquad D: -2 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1.$
8. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2;\qquad D: x + 2y \leq 4,\ x - 2y \leq 4,\ x \geq 0.$
9. $z = xy - 3x - 2y;\qquad D: 0 \leq\ x \leq 4,\ 0 \leq\ y \leq 4.$
10. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y;\qquad D: x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3.$
11. $z = x^2 - 2y^2 + 5x;\qquad D: x \geq -1,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1.$
12. $z = 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2xy - 4x;\qquad D: x \geq 0,\ y \leq 2,\ y \geq 2x.$
13. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;\qquad D: -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4.$
14. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 2y + 8;\qquad D: 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq\ y \leq 2.$
15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;\qquad D: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x.$

16. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x;$ $\quad$ $D: x \le 3,\ y \ge 0,\ y \le x + 1.$

17. $z = x^2 + y^2 + 9x - xy - 6y + 20;$ $\quad$ $D: -4 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2.$

18. $z = xy - 3x - 2y;$ $\quad$ $D: 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 6 - x.$

19. $z = x^3 - 6xy + 8y^3 + 1;$ $\quad$ $D: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1.$

20. $z = 2xy - 4x - 2y;$ $\quad$ $D: -3 \le x \le 0,\ 0 \le y \le -3x.$

21. $z = xy - x - 2y;$ $\quad$ $D: x \le 3,\ y \le x,\ y \ge 0.$

22. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2;$ $\quad$ $D: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y - 1 \le 0.$

23. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$ $\quad$ $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x.$

24. $z = 4y^3 + 3x^2 + 6x - 12y;$ $\quad$ $D: -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le x.$

25. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;$ $\quad$ $D: x \ge -3,\ y \ge 0,\ x + y + 1 \le 0.$

26. $z = x^2 + y^2 - xy - 4x - 10;$ $\quad$ $D: x \ge 1,\ y \ge 1,\ x + y \le 5.$

27. $z = x^4 + 4xy - 2y^2;$ $\quad$ $D: 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x.$

28. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1;$ $\quad$ $D: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y - 3 \le 0.$

29. $z = x^2y + y^2 + 5x;$ $\quad$ $D: 1 \le x \le 4,\ -1 \le y \le 2.$

30. $z = 3x + y - xy;$ $\quad$ $D: y \ge x,\ y \le 4,\ x \ge 0.$

РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

ЗАВДАННЯ 1.

Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Областю визначення такої функції є множина всіх точок, для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ визначений , тобто

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Множина точок площини , координати яких задовольняють цю нерівність, є кругом із центром O (0,0) радіусом 2, що включає в себе і його межу.

ЗАВДАННЯ 2.

Знайти повний диференціал функції:

а) $z = x^y$; б) $z = x \ln y + \frac{y}{x}$.

Розв'язання. Повний диференціал функції z = f (x, y) можна обчислити за формулою :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Для обчислення частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ потрібно вважати сталою змінну y, а для знаходження $\frac{\partial z}{\partial y}$ змінну x вважаємо сталою. Тоді маємо

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$;

$$dz = (yx^{y-1})\, dx + (x^y \ln x)\, dy.$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{y} + \frac{1}{x}$;

$dz = \left(\ln y - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{x}\right) dy.$

ЗАВДАННЯ 3.

Знайти похідну $\frac{dz}{dt}$ складної функції $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, де $x = t^3+1$, $y = t^2$.

Розв'язання. Якщо z = f (x, y) – складна функція двох змінних , де x і y є функціями змінної t : x = x(t), y = y(t), які диференційовані в точці t, то складна функція z = f (x(t), y(t)) диференційована в точці t і справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Обчислимо частинні похідні для нашого прикладу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\; y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2; \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Підставимо ці похідні в формулу для $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2+y^2}\,3t^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\,2t = -\frac{t^2\,3t^2+(t^3+1)2t}{(t^3+1)^2+t^4} = \frac{-t^4+2t}{t^6+2t^3+t^4+1}.$$

ЗАВДАННЯ 4.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції, заданої неявно рівнянням $z^3 + 2xz + xy^2 - 2 = 0$.

Розв′язання . Якщо функцію z = z (x, y) задано неявно рівнянням

F(x, y, z) = 0, то частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна знайти за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Для нашого прикладу F(x, y, z) = $z^3 + 2xz + xy^2 - 2$. Дістаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2z + y^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2z+y^2}{3z^2+2x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy}{3z^2+2x}.$$

Зауважимо, що рівняння F(x, y, z) = 0 можна розглядати як рівняння функції x = x (y, z), тоді

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Якщо рівняння F(x, y, z) = 0 задає неявно функцію y = y (x, z), то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

ЗАВДАННЯ 5.

Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

S: $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ в точці $M_0(2, 1, -3)$.

Розв'язання . Якщо поверхня S задається у неявному вигляді рівнянням F(x, y, z) = 0, то рівняння дотичної площини до поверхні S у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$F'_X(M_0)(x - x_0) + F'_Y(M_0)(y - y_0) + F'_Z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{F'_X(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_Y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_Z(M_0)}.$$

Якщо рівняння поверхні S задано у явному вигляді z = f (x, y), то рівняння дотичної площини записується так:

$$z - z_0 = f'_X(M_0)(x - x_0) + f'_Y(M_0)(y - y_0),$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x-x_0}{f'_X(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Для нашого прикладу запишемо рівняння поверхні у вигляді:

$x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$, тобто F(x, y, z) = $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$.

Обчислимо значення частинних похідних:

$F'_X = 2x$; $F'_X(M_0) = 4$;

$F'_Y = -8y$; $F'_Y(M_0) = -8$;

$F'_Z = 4z$; $F'_Z(M_0) = -12$.

Підставимо ці значення у формулу дотичної площини:

$4(x-2) - 8(y-1) - 12(z+3) = 0,$

$4x - 8y - 12z - 36 = 0,$

$x - 2y - 3z - 9 = 0$ – рівняння дотичної площини.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z+3}{-12}.$$

ЗАВДАННЯ 6.

Знайти частинні похідні другого порядку функції

$z = \ln(x^3+2y^2-xy)$.

Розв'язання. Частинні похідні вищих порядків складаються послідовно одна від другої:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x; \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y; \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y; \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

При цьому $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Знаходимо спочатку для нашого прикладу похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{1}{x^3+2y^2-xy}(3x^2-y) = \frac{3x^2-y}{x^3+2y^2-xy};$$

$$z'_y = \frac{1}{x^3+2y^2-xy}(4y-x) = \frac{4y-x}{x^3+2y^2-xy}.$$

Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = \left(\frac{3x^2-y}{x^3+2y^2-xy}\right)'_x = \frac{6x\left(x^3+2y^2-xy\right)-(3x^2-y)(3x^2-y)}{(x^3+2y^2-xy)^2} = \frac{12xy^2-3x^4-y^2}{(x^3+2y^2-xy)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{4y-x}{x^3+2y^2-xy}\right)'_y = \frac{4\left(x^3+2y^2-xy\right)-(4y-x)(4y-x)}{(x^3+2y^2-xy)^2} = \frac{4x^3-8y^2+4xy-x^2}{(x^3+2y^2-xy)^2};$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{3x^2-y}{x^3+2y^2-xy}\right)'_y = \frac{-\left(x^3+2y^2-xy\right)-(3x^2-y)(4y-x)}{(x^3+2y^2-xy)^2} = \frac{2x^3+2y^2-12x^2y}{(x^3+2y^2-xy)^2};$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{4y-x}{x^3+2y^2-xy}\right)'_x = \frac{-\left(x^3+2y^2-xy\right)-(4y-x)(3x^{2-y})}{(x^3+2y^2-xy)^2} = \frac{2x^3+2y^2-12x^2y}{(x^3+2y^2-xy)^2}.$$

Як бачимо, $z''_{xy} = z''_{yx}$.

ЗАВДАННЯ 7.

Для функції $z = x^2 + y^2x$ у точці $M_0(1, 2)$ знайти :

а) похідну $\frac{\partial z}{\partial l}$ за напрямом вектора $\bar{l} = (2, -2)$;

б) напрям вектору, у якому функція зростає з максимальною швидкістю.

<u>Розв'язання</u>. Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial l}$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\bar{l}$, тобто координати одиничного вектора $\bar{l}^{\circ} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|}$.

Обчислимо частинні похідні в точці $M_0(1, 2)$:

$$z'_x = 2x + y^2; \quad z'_x(M_0) = 6.$$

$$z'_y = 2xy; \qquad z'_y(M_0) = 4.$$

Знайдемо одиничний вектор $\bar{l}^{\circ}$:

$$|\bar{l}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\bar{l} = (2, -2) = 2\bar{i} - 2\bar{j};$$

$$\bar{l}^{\circ} = \frac{2\bar{i} - 2\bar{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}.$$

Тоді $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Застосувавши формулу для $\frac{\partial z}{\partial l}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Похідна за напрямом $\bar{l}$ характеризує швидкість зміни функції за цим напрямом. Тому існує напрям, за яким функція зростає з максимальною швидкістю. Цей напрям задається градієнтом функції:

$$\overline{\text{gradz}} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\bar{j}.$$

Для нашого прикладу $\overline{\text{gradz}}$ в т. M_0:

$$\overline{\text{gradz}}\,(M_0) = 6\,\bar{i} + 4\,\bar{j}.$$

ЗАВДАННЯ 8.

Знайти точки локального екстремуму функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти локальні екстремуми функції

$z = f(x, y)$, потрібно :

1) знайти частинні похідні z'_x та z'_y;

2) розв'язати систему рівнянь

$\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{cases}$ та знайти критичні точки M_i функції $z = f(x, y)$;

3) обчислити частинні похідні другого порядку;

4) для кожної критичної точки M_i обчислити значення

$A = z''_{xx}(M_i))$, $B = z''_{xy}(M_i)$, $C = z''_{yy}(M_i)$ и $\Delta = AC - B^2$.

Якщо $\Delta > 0$, то в точці M_i функція $z = f(x, y)$ має екстремум, причому, при $A < 0$ – локальний максимум, при $A > 0$ – локальний мінімум.

Якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці M_i не має. Якщо $\Delta = 0$, то для вирішення питання про існування екстремуму потрібне додаткове дослідження.

Для нашого прикладу $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Обчислимо частинні похідні: $z'_x = 3x^2 - 3y$; $z'_y = 3y^2 - 3x$.

2. Знайдемо критичні точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} => \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} => \begin{cases} y = y^4 \\ x = y^2 \end{cases} => \begin{cases} y(1 - y^3) = 0 \\ x = y^2 \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} y_1 = 0;\ y_2 = 1 \\ x_1 = 0;\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Маємо дві критичні точки: $M_1(0,0);\ M_2(1,1)$.

3. Обчислимо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = 6x$; $z''_{xy} = -3$; $z''_{yy} = 6y$.

4. Для точки $M_1(0,0)$ маємо:

A = 0; B = -3; C = 0; $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$ => екстремуму в точці $M_1(0,0)$ не має.

Для точки $M_2(1,1)$ маємо:

A = 6; B = -3; C = 6; $\Delta = A\,C - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0;\ A > 0$.

Отже, $M_2(1,1)$ – точка локального мінімуму і $z_{min} = z(1,1) = -1$.

ЗАВДАННЯ 9.

Знайти умовний екстремум функції z = x + y за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Розв’язання. Нехай треба знайти екстремум функції z = f (x, y) за умови φ (x,y) = 0. Побудуємо функцію Лагранжа:

L (x, y, λ) = f (x, y) + λ φ (x, y).

Стаціонарні точки M_i умовного екстремуму визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0\ , \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0\ . \end{cases}$$

Ця система виражає необхідні умови умовного екстремуму функції z = f (x, y).

Далі необхідно з'ясувати, чи є знайдені точки точками екстремуму. Для цього обчислимо значення другого диференціала функції L (x, y, λ)

$$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2,$$

де dx і dy задовольняють умову зв'язку

$$\varphi'_x\ dx + \varphi\ '_y\ dy = 0.$$

Тоді, якщо $d^2L(M_i) > 0,$ то функція $z = f(x, y)$ у точці M_i має умовний мінімум, а якщо $d^2L(M_i) < 0 -$ умовний максимум.

Для нашого прикладу

$$f(x, y) = x + y, \quad \varphi\ (x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Тоді функція Лагранжа має вигляд:

$$L\ (x, y, \lambda) = x + y + \lambda\ (x^2 + y^2 - 1).$$

Знайдемо її частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Із першого рівняння маємо $x = -\frac{1}{2\lambda}$, із другого $y = -\frac{1}{2\lambda}$. Підставляючи ці значення в третє рівняння, дістанемо

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0, \text{ звідки } \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Знайшовши відповідні значення x і y, дістанемо дві точки:

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ при } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далі необхідно з'ясувати, чи є знайдені точки точками екстремуму. Для цього знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$L''_{xx} = 2\lambda,\; L''_{yy} = 2\lambda,\; L''_{xy} = 0,$$

та диференціал другого порядку

$$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2 = 2\lambda(dx)^2 + 2\lambda(dy)^2.$$

Оскільки при $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ другий диференціал $d^2L > 0$, то в точці M_1 маємо умовний мінімум:

$$z(M_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

Відповідно при $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ другий диференціал $d^2L < 0$ і в точці M_2 маємо умовний максимум:

$$z(M_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

ЗАВДАННЯ 10.

Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2y\,(2- x-y)$

в області D: трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Розв’язання. Правило відшукання точок, у яких функція $z = f\,(x, y)$ досягає своїх найбільшого й найменшого значень, базується на такій послідовності обчислень:

1) знаходять критичні точки, які лежать усередині області D;

2) на границі області D за допомогою рівнянь границі функцію

$z = f\,(x, y)$ зводять до функції однієї змінної, для якої знаходять критичні точки;

3) знаходять значення функції в усіх знайдених точках і в кутових точках границі, серед цих значень вибирають найбільше та найменше.

Проведемо обчислення для нашого прикладу.

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy\,(4 - 3x\ -2y),$$
$$z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(2 - x - 2y).$$

Визначимо критичні точки, які лежать у даному трикутнику. Оскільки всередині трикутника $x > 0,\ y > 0$, то прирівнявши $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Критична точка $M_1\ \left(1, \frac{1}{2}\right)$ лежить усереденi трикутника.

Значення функції $z(M_1) = 1\frac{1}{2}\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

2. На сторонах трикутника x = 0 і y = 0 значення функції дорівнює нулю. Знайдемо значення функції на стороні x + y = 6: y = 6 – x, $0 \leq x \leq 6$, і наша функція двох незалежних змінних перетворюється на функцію однієї змінної

$$z_1 = z(x) = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x).$$

Знайдемо її критичні точки. Для цього, прирівнявши $z'(x)$ до нуля, дістанемо:

$$-48x + 12x^2 = 0; \quad 12x\,(x - 4) = 0;$$

$$x = 4 \quad (x = 0 \text{ – кутова точка}).$$

При цьому y = 6 – x = 2. Отже, $M_2(4,2)$ – критична точка.

Обчислимо значення функції у цій точці та на кінцях інтервалу $M_3(0; 6)$ і $M_4\,(6,0)$:

$$z(M_2) = -128; \quad z\,(M_3) = z\,(M_4) = 0.$$

3. Порівняємо всі добуті значення. Отже, найменше й найбільше значення функції треба шукати серед таких її значень:

$z = \frac{1}{4}$ в точці $M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$ всередині трикутника;

$z = -128$ в точці $M_2(4;2)$;

$z = 0$ у вершинах трикутника $M_3(0; 6)$ і $M_4(6; 0)$

і на сторонах трикутника x = 0 і y = 0.

Отже, $z_{\text{найб}} = z\,(1;\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$; $z_{\text{найм}} = z\,(4;2) = -128$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів : затв. МОНУ / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 577 с.

2. Денисюк В.П., Ренета В.К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навчальний посібник:У 4ч. - К. НАУ, 2005.

3. Дубовик В. П. Вища математика: Навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : «А.С.К.», 2005. – 648 с.Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. вищих навч. закл. / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – 2-ге вид. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

4. Кривуца В. Г. Вища математика: практикум: навчальний посібник для студ. вищих навч. закладів / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Вид. 2-ге, перероб. і доп. – К. : Центр навч. літератури, 2005. – 536 с.

5. Литвин І. І. Вища математика: навч. посібник: рек. МОНУ / І. І. Литвин, О. М. Конончук, Г. О. Желізняк. – 2-ге вид. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 368 с.

6. Мазур К. І. Вища математика: навчальний посібник. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних / К. І. Мазур, Т. І. Олешко, В. І. Трофименко ; за заг. ред. Т. І. Олешко. – Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 104 с.

7. Практикум з вищої математики: навчальний посібник: рек. МОНУ. Ч. 1 / Ю. М. Бардачов, В. В. Крючковський, О. В. Цибуленко та ін. – Херсон : Олді-плюс, 2010. – 390 с.