МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до самостійних робіт
з курсу
«Теоретична фізика»

для студентів напряму підготовки 6.040303 "Системний аналіз"
галузі знань 0403 "Системні науки та кібернетика"
денної форми навчання

Частина 1
Тема 1 Механіка

2012

Методичні вказівки та завдання до самостійних робіт з курсу “Теоретична фізика” для студентів напряму підготовки 6.040303 “Системний аналіз” галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” денної форми навчання Частина 1. Тема 1. Механіка /Укл.: Г.В. Корніч, О.В. Кривцун, В.І. Кіпріч. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2012. – 58 с.

Методичні вказівки містять теоретичні відомості, індивідуальні завдання до самостійних робіт з курсу “Теоретична фізика” та приклади їх виконання для студентів напряму підготовки 6.040303 “Системний аналіз” галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика” денної форми навчання Частина 1. Тема 1. Механіка.

Укладачі: Г.В. Корніч, професор,
О.В. Кривцун, старший викладач,
В.І. Кіпріч, асистент.

Рецензенти: В.П. Пінчук, доцент,
О.І. Денисенко, доцент.

Відповідальний
за випуск: Г.В. Корніч, професор.

Затверджено
на засіданні кафедри
системного аналізу та
обчислювальної математики
протокол № 8 від 25.04.12 р.

ЗМІСТ

1 МЕХАНІКА

1.1 Рівняння руху

Узагальнені координати

Положення матеріальної точки в просторі визначається її радіус-вектором **r**, компонентами якого є її декартові координати *x*, *y*, *z*. Похідна **r** за часом *t*

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

називається швидкістю, а друга похідна $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – прискоренням точки.

У загальному випадку для визначення положення системи з *N* матеріальних точок у просторі треба задати *N* радіус-векторів, тобто *3N* координат. Число незалежних величин, які однозначно визначають положення системи, називається числом її *ступенів вільності*. Будь-які s величин q_1, q_2, …, q_s , які повністю характеризують положення системи (з s ступенями вільності), називаються її *узагальненими координатами*, а похідні $\dot{q}_i$ - її *узагальненими швидкостями*.

Одночасне завдання всіх координат q і швидкостей $\dot{q}$ повністю визначає стан системи: дозволяє обчислити значення прискорень $\ddot{q}$ і передбачити її подальший рух.

Співвідношення, що зв'язують прискорення з координатами і швидкостями, називаються *рівняннями руху* і є диференціальними рівняннями другого порядку щодо функцій $q(t)$ – траєкторій руху механічної системи.

Принцип найменшої дії

Найбільш загальним формулюванням закону руху механічних систем є *принцип найменшої дії* (*принцип Гамільтона*). Згідно з цим принципом кожна механічна система характеризується певною функцією

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t) \equiv L(q, \dot{q}, t),$$

при цьому між моментами часу $t=t_1$ і $t=t_2$ система займає певні положення, що характеризуються двома наборами значень координат $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$; між цими положеннями система рухається таким чином, щоб інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (1.1)$$

приймав найменше можливе значення (для достатньо малої ділянки траєкторії). Функція *L* називається *функцією Лагранжа* даної системи, а інтеграл (1.1) – *дією*.

Необхідною умовою мінімальності дії *S* є рівність нулю його варіації. Таким чином, принцип найменшої дії можна записати у вигляді

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = 0 \cdot$$

При наявності декількох ступенів вільності в принципі найменшої дії повинні незалежно варіюватися *s* різних функцій $q_i(t)$. Тоді дістанемо *s* рівнянь виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \cdot \qquad (1.2)$$

Це – шукані диференціальні рівняння, що називаються *рівняннями Лагранжа* й складають систему *s* рівнянь другого порядку для *s* невідомих функцій $q_i(t)$. Загальний розв’язок такої системи містить *2s* довільних сталих. Для їх визначення необхідно знати початкові умови, що характеризують стан системи в деякий момент часу.

Властивості функції Лагранжа механічної системи.

1 Функція Лагранжа адитивна, отже, рівняння руху кожної з не взаємодіючих частин системи не можуть містити величини, що відносяться до інших частин даної системи.

2 Множення функції Лагранжа на довільну сталу не впливає на рівняння руху.

3 Функція Лагранжа визначена з точністю до додавання до неї повної похідної від будь-якої функції координат і часу.

Принцип відносності Галілея

По відношенню до довільної *системи відліку* простір є неоднорідним і неізотропним. Те ж саме відноситься у загальному випадку і до часу, який буде неоднорідним. Такі властивості простору і часу вносили б істотні ускладнення в опис механічних явищ.

В класичній (нерелятивістській) механіці постулюється, що завжди можна знайти таку систему відліку, яка називається *інерціальною*, по відношенню до якої простір є однорідним та ізотропним, а час - однорідним. В ній вільне тіло залишається у спокої необмежено довго або рухається рівномірно і прямолінійно.

Наслідками властивостей такої системи відліку є:

- *закон інерції*: в інерціальній системі відліку будь-який вільний рух відбувається із сталою за величиною і напрямом швидкістю;
- *принцип відносності Галілея*: існує нескінченна множина інерціальних систем відліку, що рухаються відносно одна одної прямолінійно і рівномірно. В усіх цих системах властивості простору і часу однакові і всі закони механіки однакові.

Далі будемо розглядати тільки інерціальні системі відліку. Нехай система відліку K' рухається із швидкістю $\mathbf{V}$ відносно системи відліку K. Координати матеріальної точки в цих системах відповідно рівні $\mathbf{r}'$ і $\mathbf{r}$. Тоді мають місце співвідношення

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t,$$
$$t = t',$$

які називаються *перетворенням Галілея*.

Функція Лагранжа вільної матеріальної точки

У простому випадку – вільного руху матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку – функція Лагранжа має наступний вигляд

$$L = \frac{m}{2}v^2,$$

де m – стала невід'ємна величина, яка називається *масою* матеріальної точки.

Відмітимо, що в декартових координатах

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \tag{1.3}$$

в циліндричних

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \tag{1.4}$$

в сферичних

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta. \tag{1.5}$$

Функція Лагранжа системи матеріальних точок

В силу адитивності функції Лагранжа для системи невзаємодіючих точок маємо

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^{\,2}}{2} \qquad ,$$

де a – номер частинки.

Замкнутою називається система матеріальних точок, які взаємодіють тільки між собою. Функція Лагранжа для такої системи

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots) \tag{1.6}$$

($\mathbf{r}_a$ – радіус вектор a -ї точки). Сума

$$T=\sum_a \frac{m_a v_a^{\,2}}{2}$$

називається *кінетичною енергією*, а функція U, що описує взаємодію між частинками і залежить тільки від їх координат, - *потенційною енергією* системи.

Вигляд функції Лагранжа (1.6) показує, що час не тільки однорідний, а й ізотропний. Це означає, що всі рухи, що відбуваються за законами класичної механіки, зворотні.

Знаючи функцію Лагранжа, можна скласти рівняння руху

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\cdot$$

Підставивши сюди (1.6), дістанемо *рівняння Ньютона*:

$$m_a\frac{d\vec{v}_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}\cdot \tag{1.7}$$

Введемо позначення

$$\vec{F}_a=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}\cdot \tag{1.8}$$

Вектор $\mathbf{F}_a$ називається *силою,* що діє на a –у точку.

З виразів (1.4), (1.5) видно, що кінетична енергія в узагальнених координатах, як і раніше будучи квадратичною функцією швидкостей, може залежати і від координат. Загальний вигляд функції Лагранжа замкненої системи:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q)\,, \tag{1.9}$$

де a_{ik} – функція тільки від координат, i, k – номера координат.

Розглянемо незамкнену систему A, що взаємодіє з іншою системою B, рух якої відомий. Тоді система $A + B$ є замкненою, і її функцію Лагранжа можна представити таким чином:

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

де перші два члени – це кінетичні енергії систем *A* і *B*, а третій – їх спільна потенційна енергія. Підставивши замість q_B задані функції часу і опустивши член $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$, що залежить тільки від часу (і тому є повною похідною від деякої іншої функції часу), дістанемо:

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)). \quad (1.10)$$

Таким чином, рух системи в зовнішньому полі описується функцією Лагранжа звичайного типу, але тепер потенційна енергія може залежати від часу явно.

Часто в механічних системах взаємодія між тілами має характер *в'язів*, тобто обмежень (стержнів, ниток, шарнірів тощо), що накладаються на взаємне розташування тіл. При розв'язанні завдань даного розділу, якщо не зазначене протилежне, можна знехтувати як тертям, так і масами «скріплюючих елементів» системи. Таким чином, роль в'язів зводиться до зменшення числа ступенів вільності системи *s* (в порівнянні з числом *3N*).

Приклад 1.1. Знайти функцію Лагранжа та рівняння руху матеріальної точки масою *m*, що рухається по поверхні еліптичного параболоїда, який описується рівнянням $z = ax^2 + by^2$ і розташований в полі тяжіння. Для простоти обчислень покладемо $a = b = 1\ м^{-1}$, тоді $z = x^2 + y^2$. Вісь *z* спрямуємо вертикально вгору (рис. 1.1).

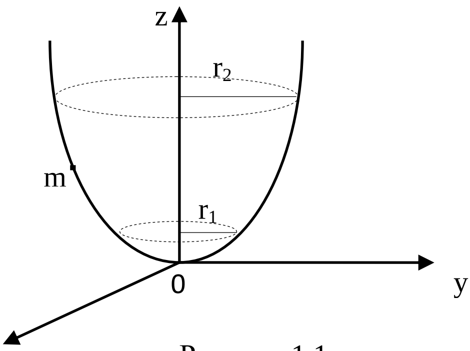

Рисунок 1.1

Розв'язання. Для завдання положення матеріальної точки в просторі в загальному випадку необхідно знати три величини. За умовою задачі між координатами точки *x*, *y* і *z* існує залежність у вигляді рівняння параболоїда, тобто одна в'язь. Отже, дана система має 2 ступеня вільності.

В силу симетрії задачі зручно перейти до циліндричних координат. Тоді функція Лагранжа (1.10) в полі тяжіння з урахуванням формули (1.4) має вигляд

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

де $z = x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$.

Таким чином, $z=r^2$, $\dot{z} = 2r\dot{r}$, і дістанемо остаточно

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) - mgr^2.$$

Підставляючи функцію Лагранжа в рівняння (1.2), дістаємо систему з $s = 2$ диференціальних рівнянь.

Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr(\dot{\varphi}^2 + 4\dot{r}^2 - 2g); \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}(1 + 4r^2);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}(1 + 4r^2) + 8mr\dot{r}^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}).$$

Отже, рівняння руху даної механічної системи мають вигляд

$$\begin{cases} \ddot{r}(1 + 4r^2) = r\dot{\varphi}^2 - 4r\dot{r}^2 - 2gr; \\ \ddot{\varphi} = -\dfrac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r}. \end{cases}$$

Якщо задати початкові значення координат *r, φ* і швидкостей $\dot{r}, \dot{\varphi}$, то можна дістати розв'язок даної системи - функції $r = r(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$, що описують рух матеріальної точки.

1.2 Закони збереження

В механіці функція $I = I(q, \dot{q})$ називається *інтегралом руху* системи, якщо $I(q, \dot{q}) = const$ на кожній траєкторії $q(t)$ даної системи.

Інтеграли руху, що є адитивними або асимптотично адитивними, називаються *законами збереження*.

Інтеграли руху дозволяють дізнатися про деякі властивості цього руху без інтегрування рівнянь руху.

Закон збереження енергії

З (1.9) і (1.10) випливає, що лагранжева функція замкненої системи або системи, яка знаходиться в постійному полі ($q_B(t) \equiv const$), має вигляд

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q),$$

тобто не залежить явно від часу.

Взявши повну похідну функції Лагранжа за часом і здійснивши перетворення, дістаємо наступний вираз:

$$\frac{d}{dt}\left[T(q, \dot{q}) + U(q)\right] = 0 \cdot$$

Звідси видно, що величина в квадратних дужках

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q)$$

залишається незмінною при русі замкненої (або такої, що перебуває в постійному полі) системи. Ця величина називається *енергією* системи. Вона адитивна, оскільки виражається лінійно через функцію Лагранжа. Механічні системи, енергія яких зберігається, називаються *консервативними*.

Закон збереження енергії є результатом того, що лагранжіан не змінюється відносно зсуву за часом, тобто є наслідком однорідності часу.

Закон збереження імпульсу

Закон збереження імпульсу еквівалентний інваріантності лагранжіана щодо зсуву початку координат у просторі (*трансляційна симетрія*), тобто виникає у зв’язку з однорідністю простору.

Вимагатимемо, щоб при нескінченно малому паралельному переносі системи на вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ функція Лагранжа залишилася незмінною, тобто $\delta L=0$. З цієї умови випливає, що

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0 \cdot \qquad (1.11)$$

Таким чином, в замкненій механічній системі векторна величина

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$$

залишається незміною при русі. Вектор **P** називається і*мпульсом* системи. Диференціюючи функцію Лагранжа (1.6), знайдемо:

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a \vec{p}_a \cdot$$

Адитивність імпульсу очевидна. Більш того, на відміну від енергії імпульс системи **P** дорівнює сумі імпульсів окремих частинок $\mathbf{p}_a$ незалежно від наявності взаємодії між ними.

Закон збереження всіх трьох компонент вектора імпульсу має місце лише за відсутності зовнішнього поля. Однак, якщо потенційна енергія в полі не залежить від якої-небудь з декартових координат, то проекція імпульсу на відповідну вісь зберігається.

Також, враховуючи формули (1.7), (1.8), з (1.11) можна зробити ще один висновок

$$\sum_a \vec{F}_a = 0 \cdot$$

Тобто сума сил, що діють на всі частинки замкненої системи, дорівнює нулю.

Якщо рух описується узагальненими координатами q_i, то величини

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (1.12)$$

називаються *узагальненими імпульсами*, а величини

$$\vec{F}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

називаються *узагальненими силами*. В цих позначеннях рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\dot{p}_i = F_i \cdot$$

В загальному випадку узагальнені імпульси p_i не рівні добутку маси частинки на її швидкість, а є лінійними однорідними функціями узагальнених швидкостей q_i .

Завжди існує така система відліку, в якій повний імпульс замкненої механічної системи обертається в нуль. Швидкість цієї системи як цілого є швидкістю переміщення в просторі точки, радіус-вектор якої дається формулою

$$\vec{R} = \frac{\sum m_a \vec{r}_a}{\sum m_a}\cdot$$

Таку точку називають *центром інерції* системи.

Закон збереження моменту імпульсу

Закон збереження моменту імпульсу випливає з ізотропності простору (лагранжіан не змінюється при поворотах системи координат). Згідно з цим при нескінченно малому повороті $\delta\boldsymbol{\varphi}$ системи, її функція Лагранжа не змінюється (тобто $\delta L = 0$). Здійснивши варіювання, в результаті дістаємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_a [\vec{r}_a \vec{p}_a] = 0\cdot$$

Таким чином, при русі замкненої системи зберігається векторна величина

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a \vec{p}_a], \tag{1.13}$$

що називається *моментом імпульсу* (або просто *моментом*) системи.

Закон збереження всіх трьох компонент моменту (відносно довільного початку відліку) має місце тільки для замкненої системи, але в більш обмеженому вигляді цей закон справедливий і для систем, що знаходяться у зовнішньому полі. Завжди зберігається проекція моменту на таку вісь, відносно якої дане поле симетричне, і тому механічні властивості системи не змінюються при повороті навколо цієї осі. При цьому момент повинен бути визначений відносно якої-небудь точки (початку координат), що лежить на цій же осі.

Проекція моменту на будь-яку вісь (назвемо її z) може бути знайдена за формулою

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \tag{1.14}$$

де координата φ є кут повороту навколо осі z. Тоді, враховуючи (1.4) і (1.6), знаходимо, що в циліндричних координатах

$$M_z = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a \cdot$$

Приклад 1.2. Які компоненти імпульсу **P** і моменту **M** зберігаються при русі в наступних полях:

а) однорідне поле, спрямоване вздовж осі z;

б) поле з центральною симетрією, тобто поле, в якому потенційна енергія залежить тільки від відстані до деякої певної точки (центра) в просторі.

Розв'язання. а) в однорідному полі (рис. 1.2) потенційна енергія залежить тільки від координати z, а вздовж осей x та y вона не змінюється, отже, зберігаються компоненти імпульсу P_x і P_y.

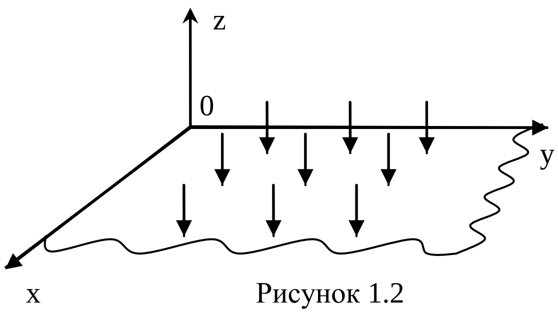

Рисунок 1.2

Однорідне поле, що створюється нескінченною площиною, симетричне відносно будь-якої прямої, перпендикулярної до цієї площини. Тому зберігається проекція M_z моменту, причому початок координат може бути вибраний довільним чином.

б) в центральному полі (рис. 1.3) немає осі, вздовж якої не змінювалась б потенційна енергія, відтак, закон збереження імпульсу не застосовний для жодної з компонент імпульсу **P**.

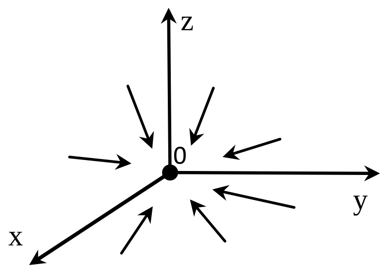

Рисунок 1.3

З іншого боку, при русі в такому полі зберігається проекція моменту на будь-яку вісь, що проходить через центр, і, яка визначена відносно будь-якої точки на цій осі. Таким чином, якщо ця точка належить всім трьом осям, тобто є початком координат, що збігається з центром поля, то зберігаються всі компоненти M_x, M_y, M_z. Іншими словами, зберігається вектор **М** моменту, але визначений не відносно довільної точки простору, а відносно центру поля.

1.3 Інтегрування рівнянь руху

Одновимірний рух

Одновимірним називають рух системи з одним ступенем вільності. Найбільш загальний вигляд лагранжевої функції такої системи, що знаходиться в постійних зовнішніх умовах, є

$$L = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2 - U(q),$$

де $a(q)$ – деяка функція узагальненої координати q. Якщо q є декартова координата (наприклад, x), то

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \qquad (1.15)$$

Немає необхідності виписувати рівняння руху, що відповідає цій функції Лагранжа, простіше відразу виходити з його першого інтеграла – рівняння, що виражає закон збереження енергії. Отже, для функції (1.15) маємо:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Інтегруючи це рівняння шляхом відокремлення змінних, дістаємо

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const}. \qquad (1.16)$$

Оскільки кінетична енергія - величина суттєво додатна, то при русі повна енергія завжди більше потенційної, тобто рух може відбуватися тільки в тих областях простору, де $U(x) < E$ (інакше підкореневий вираз приймає від’ємне або нульове значення).

Нехай, наприклад, залежність $U(x)$ має вигляд, зображений на рис. 1.4. Відзначивши на тому ж графіку рівень повної енергії (горизонтальна пряма), відразу ж можна визначити можливі області руху.

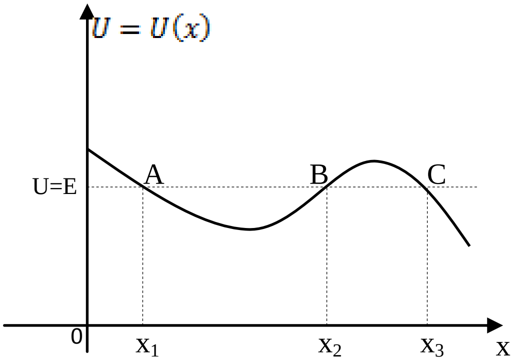

Рисунок 1.4

Точки, в яких

$$U(x) = E\ , \tag{1.17}$$

визначають границі руху. Вони є *точками зупинки*, оскільки в них швидкість дорівнює нулю. Якщо область руху обмежена двома такими точками, то рух відбувається в обмеженій області простору і називається *фінітним* (область *AB* на рис. 1.4). Якщо ж область руху не обмежена або обмежена з одного боку, - рух *інфінітний*, частинка йде у безкінечність (область праворуч від *C* на рис. 1.4).

Одновимірний фінітний рух є коливальним – частинка здійснює рух, що періодично повторюється між двома границями (на рис. 1.4 в *потенційній ямі AB* між точками x_1 і x_2; область *BC* – *потенційний бар'єр*). При цьому згідно із загальною властивістю зворотності (стор. 7) час руху від x_1 до x_2 дорівнює часу зворотного руху від x_2 до x_1. Тому період коливань *T*, тобто час за який точка пройде від x_1 до x_2 й назад, дорівнює подвоєному часу проходження відрізка x_1x_2 або згідно з (1.16)

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

де границі x_1 і x_2 є коренями рівняння (1.17) при даному значенні E.

Рух в центральному полі

Поле, в якому потенційна енергія частинки залежить тільки від відстані r до певної нерухомої точки, називається *центральним*.

З формули (1.13) та прикладу 1.2(б) випливає, що для однієї частинки, що рухається в центральному полі, момент, визначений відносно центру поля дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}] = \mathrm{const}.$$

Таким чином, радіус-вектор частинки, а, отже, і її траєкторія при русі в центральному полі лежать цілком в одній площині – площині, перпендикулярній до **M**. Ввівши в цій площині полярні координати r, φ, напишемо функцію Лагранжа у вигляді

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

(тут ми скористалися формулою (1.4), поклавши в ній $z \equiv 0$).

Ця функція не містить в явному вигляді координату φ. Всяку узагальнену координату q_i , що не входить явним образом у лагранжіан, називають *циклічною*. Для такої координати $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ і в силу рівняння Лагранжа (1.2) дістаємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

тобто відповідний їй узагальнений імпульс (1.12) є інтегралом руху. Ця обставина призводить до суттєвого спрощення задачі інтегрування рівнянь руху при наявності циклічних координат.

В даному випадку узагальнений імпульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

збігається з моментом $M_z = M$ (див. (1.14), вісь z проходить через центр поля і співспрямована з вектором **M,** тоді $M_x = M_y = 0$), і закон збереження моменту набирає вигляду

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}. \qquad (1.18)$$

Повний розв’язок задачі про рух частинки в центральному полі найпростіше дістати, виходячи із законів збереження енергії і моменту, не виписуючи при цьому самих рівнянь руху. Виражаючи $\dot{\varphi}$ через M із (1.18) і підставляючи у вираз для енергії, знаходимо:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)\,. \tag{1.19}$$

Звідси

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{1.20}$$

або, розділяючи змінні та інтегруючи:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + const\,. \tag{1.21}$$

Далі, записавши (1.18) у вигляді

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt\,,$$

підставивши сюди *dt* з (1.20) та інтегруючи, знаходимо:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + const\,. \tag{1.22}$$

Формули (1.21) і (1.22) вирішують в загальному вигляді поставлену задачу. З (1.18) видно, що кут φ завжди змінюється з часом монотонно, тому що $\dot{\varphi}$ ніколи не змінює знак.

Ввівши позначення

$$U_{еф}(r) \equiv U(r) + M^2/(2mr^2)\,, \tag{1.23}$$

вираз (1.19) можна переписати у вигляді $E = m\dot{r}^2/2 + U_{еф}(r)$, і тоді радіальну частину руху можна розглядати як одновимірний рух в полі з «ефективною» потенційною енергією (1.23). Оскільки кінетична енергія – величина невід'ємна, то нерівність

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U_{еф}(r) \geq 0 \tag{1.24}$$

визначає область руху за відстанню від центру. Вираз (1.24) приймає нульове значення, коли радіальна швидкість $\dot{r}$ дорівнює нулю. Це не означає зупинки частинки (як при істинному одновимірному русі), тому що кутова швидкість $\dot{\varphi}$ при цьому не обертається в нуль (див. (1.18)). Рівність $\dot{r} = 0$ означає «точку повороту» траєкторії, в якій функція *r(t)* переходить від зменшення до збільшення або навпаки.

Приклад 1.3. Проінтегрувати рівняння руху механічної системи з прикладу 1.1 (матеріальна точка масою *m*, рухається по поверхні еліптичного параболоїда, що описується рівнянням $z = x^2 + y^2$, розташованого в полі тяжіння).

Побудувати графік «ефективної» потенційної енергії, визначити область руху даної точки (інтеграли руху відомі).

Розв'язання. Як видно з функції Лагранжа даної системи, яка була знайдена раніше в циліндричних координатах:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) - mgr^2$$

кут φ не входить до неї явно, отже, φ – циклічна координата. Тому зберігається узагальнений імпульс p_φ, що збігається із z-компонентою моменту імпульсу:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M_z = \text{const}\cdot$$

Звідси знаходимо

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_z}{mr^2}. \qquad (1.25)$$

Час також не входить явно у функцію Лагранжа, отже, енергія системи є інтегралом руху і дорівнює

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + 4r^2\dot{r}^2) + mgr^2 = \frac{m\dot{r}^2}{2}(1 + 4r^2) + U_{еф}(r) \quad ,(1.26)$$

де (після підстановки (1.25))

$$U_{еф}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2} + mgr^2. \qquad (1.27)$$

Ця функція завжди додатна. Вона має мінімум в точці $r_0 = \sqrt{\dfrac{M_z}{m\sqrt{2g}}}$, і приймає в цій точці значення $U_{еф}(r_0) = M_z\sqrt{2g}$.

($U'_{еф}(r) = -\dfrac{M_z^2}{mr^3} + 2mgr \geq 0$ при $r \geq r_0$, $U'_{еф}(r) < 0$ при $0 < r < r_0$; $U''_{еф}(r) = \dfrac{3M_z^2}{mr^4} + 2mg \geq 0$ для всіх $r \geq 0$, тобто крива ввігнута.) Графік $U_{еф}$ схематично зображений на рис. 1.5. З вигляду графіка випливає, що рух можливий, якщо повна енергія частинки $E \ge U_{еф}(r_0) = M_z\sqrt{2g}$.

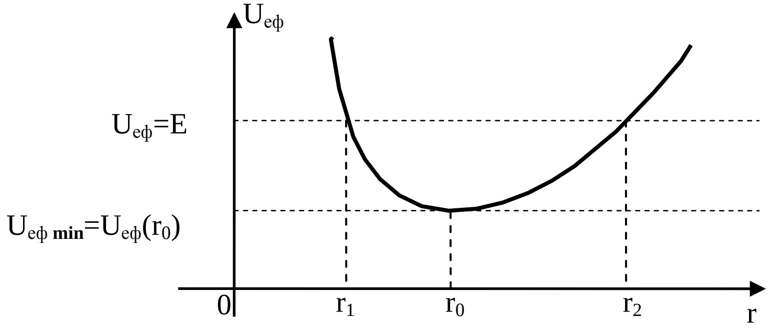

Рисунок 1.5

Виразимо радіальну швидкість з (1.26):

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2[E - U_{еф}(r)]}{m(1+4r^2)}}\,, \tag{1.28}$$

звідси

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\sqrt{1+4r^2}}{\sqrt{E - U_{еф}(r)}}dr = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\sqrt{1+4r^2}}{\sqrt{E - \frac{M_z^2}{2mr^2} - mgr^2}}dr\,. \tag{1.29}$$

Ця формула визначає в неявному вигляді відстань *r* від точки, що рухається, до осі *z* як функцію часу.

Переписавши (1.25) у вигляді $d\varphi = \frac{M_z}{mr^2}dt$ і, виразивши *dt* з (1.28), знаходимо

$$\varphi = \frac{M_z}{\sqrt{2m}}\int \frac{\sqrt{1+4r^2}}{r^2\sqrt{E - U_{еф}(r)}}dr = \frac{M_z}{\sqrt{2m}}\int \frac{\sqrt{1+4r^2}}{r^2\sqrt{E - \frac{M_z^2}{2mr^2} - mgr^2}}dr\,. \tag{1.30}$$

Це рівняння визначає зв'язок між *r* і *φ*, тобто рівняння траєкторії. Формули (1.29) і (1.30) дають відповідь на перше питання задачі.

Для знаходження області руху частинки розв'язуємо нерівність (1.24), підставивши до неї вираз (1.27):

$$E-\frac{M_z^2}{2mr^2}-mgr^2\geq 0; \qquad r^4-\frac{E}{mg}r^2+\frac{M_z^2}{2m^2g}\leq 0\cdot$$

Вирішуючи квадратне рівняння відносно *r²*, знаходимо

$$r_1^2=\frac{E-\sqrt{E^2-2M_z^2g}}{2mg}=z_1, \qquad r_2^2=\frac{E+\sqrt{E^2-2M_z^2g}}{2mg}=z_2,$$

при цьому, для того щоб дискримінант був невід'ємним, повинно виконуватися співвідношення $E\geq M_z\sqrt{2g}$, що узгоджується з отриманим раніше результатом. Оскільки в циліндричних координатах координата $r \geq 0$, то розв'язком вихідної нерівності є відрізок між

$$r_1=\sqrt{\frac{E-\sqrt{E^2-2M_z^2g}}{2mg}} \quad \text{і} \quad r_2=\sqrt{\frac{E+\sqrt{E^2-2M_z^2g}}{2mg}}\ .$$

Значення r_1 і r_2 визначають радіуси двох горизонтальних кіл, розташованих на поверхні даного еліптичного параболоїда на висоті z_1 і z_2 відповідно, між якими міститься вся траєкторія матеріальної точки. У випадку, коли енергія частинки $E=M_z\sqrt{2g}$, рух відбувається на висоті z = E/(2mg) по горизонтальному колу радіусу $r=\sqrt{z}$.

Кеплерова задача

Найважливішим випадком центральних полів є поля, в яких потенційна енергія обернено пропорційна *r*. Сюди відносяться ньютонівські поля тяжіння і кулонівські електростатичні поля; перші мають характер тяжіння, а другі можуть бути як полями тяжіння, так і відштовхування.

Потенційна енергія в полі тяжіння має вигляд

$$U=-\frac{\alpha}{r} \tag{1.31}$$

з додатною сталою α. Підставляючи цей вираз в (1.23), дістаємо

$$U_{еф}(r)=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}\ .$$

Графік цієї «ефективної» потенційної енергії зображений на рис. 1.6. З цього графіка видно, що при E > 0 рух частинки буде інфінітним, а при E < 0 – фінітним.

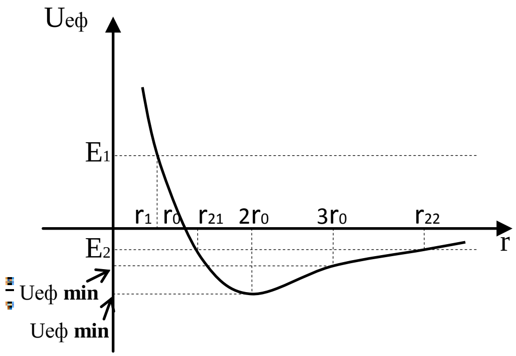

Рисунок 1.6

Підставляючи (1.31) в (1.22) і здійснюючи інтегрування, дістаємо рівняння траєкторії

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2 / M^2}} + \text{const}\cdot$$

Вибираємо початок відліку кута φ так, щоб const = 0, і вводимо позначення

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{1.32}$$

перепишемо формулу траєкторії у вигляді

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi\cdot \tag{1.33}$$

Це - рівняння конічного перетину з фокусом на початку координат; *p* і *e* – *параметр* і *ексцентриситет* орбіти. З (1.33) випливає, що точка з φ = 0 є найближчою до центру поля, тобто фокусу траєкторії (*перигелій* орбіти).

З рівнянь (1.32), (1.33) випливає, що при E < 0 орбіта є еліпсом (фінітний рух), а при E > 0 і при E = 0 – відповідно, гіперболою, що огинає центр поля, і параболою (інфінітний рух).

Приклад 1.4. Проінтегрувати рівняння руху матеріальної точки (з масою *m*, енергією *E* і моментом **M**) в полі відштовхування, в якому $U(r) = \alpha / r \quad (\alpha > 0)$. Побудувати графік «ефективної» потенційної енергії, визначити область руху. Знайти залежність координат частинки від часу.

Розв'язання. Оскільки дане поле – центральне, рух відбувається в одній площині, тому зручно використовувати полярні координати. Для даного поля $U_{еф}(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$ завжди більше нуля (полярний радіус $r \geq 0$). Відтак, енергія частинки $E = T + U_{еф}$ може бути тільки додатною.

Знаходимо похідні для побудови графіка:

$U'_{еф}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{M^2}{mr^3} < 0$, отже, «ефективна» потенційна енергія монотонно спадає;

$U''_{еф}(r) = \frac{2\alpha}{r^3} + \frac{3M^2}{mr^4} > 0$, тобто крива ввігнута. Графік $U_{еф}$ зображений на рис. 1.7.

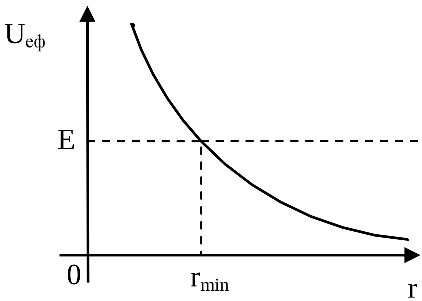

Рисунок 1.7

З графіка видно, що рух завжди інфінітний, оскільки область руху обмежена тільки з одного боку значенням r_{min} .

Для знаходження рівняння траєкторії $\varphi = \varphi(r)$ підставляємо в формулу (1.22) вираз для заданої потенційної енергії, дістаємо:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-\frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2mE - \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} =$$

$$= \int \frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - \frac{2m\alpha}{M^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}}.$$

Вводимо заміну $\frac{1}{r} \equiv z$, тоді інтеграл приймає вигляд:

$$\varphi = -\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - \frac{2m\alpha}{M^2}\cdot z - z^2}}.$$

Для того, щоб привести інтеграл до табличного, представляємо підкореневий вираз як різницю квадратів:

$$\frac{2mE}{M^2} - \frac{2m\alpha}{M^2}\cdot z - z^2 = \frac{2mE}{M^2} - 2\cdot\frac{m\alpha}{M^2}\cdot z - \left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 + \left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 - z^2 =$$

$$= \frac{2mE}{M^2} + \left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 - \left\{\left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 + 2\frac{m\alpha}{M^2}z + z^2\right\} = \left(\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}\right)^2 - \left(\frac{m\alpha}{M^2} + z\right)^2.$$

Таким чином,

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{m\alpha}{M^2} + z\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}\right)^2 - \left(\frac{m\alpha}{M^2} + z\right)^2}} = \arccos\frac{\frac{m\alpha}{M^2} + z}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}} + const =$$

$$= \arccos\frac{\frac{m\alpha}{M^2} + \frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^2\alpha^2}{M^4}}} + const = \arccos\frac{\frac{m\alpha}{M^2} + \frac{1}{r}}{\frac{m\alpha}{M^2}\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}} + const =$$

$$= \arccos\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{r}}{\frac{1}{p}\cdot e} + const.$$

Тут були введені позначення (1.32). Вибираємо початок відліку так, щоб const = 0, проводимо перетворення, дістаємо:

$$\frac{1}{p}e \cdot \cos\varphi = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \cdot$$

Остаточно рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \cdot \qquad (1.34)$$

Це рівняння гіперболи, яка проходить мимо центру поля, як показано на рис. 1.8.

При $\varphi = 0$ з (1.34) дістаємо відстань перигелію

$$r_{min} = \frac{p}{e-1} = \frac{p(e+1)}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}(e+1) = a(e+1), \qquad (1.35)$$

де

$$a = \frac{\alpha}{2E} \qquad (1.36)$$

- «піввісь» гіперболи.

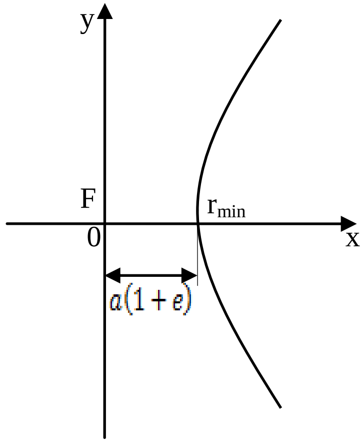

Рисунок 1.8

Знайдемо залежність координат частинки від часу. Для цього підставляємо вираз U(r) = α / r в формулу (1.21), знаходимо:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(r^2 - \frac{\alpha}{E}r - \frac{M^2}{2mE}\right)}} =$$

$$=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\dfrac{\alpha}{E}r-\dfrac{M^2}{2mE}}}\,.$$

Перетворюємо підкореневий вираз:

$$r^2-\frac{\alpha}{E}r-\frac{M^2}{2mE}=r^2-2\frac{\alpha}{2E}r+\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2-\frac{M^2}{2mE}=$$

$$=\left(r-\frac{\alpha}{2E}\right)^2-\left(\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2+\frac{M^2}{2mE}\right)=\left(r-\frac{\alpha}{2E}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^2\left(1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}\right)=$$

$$=(r-a)^2-a^2e^2\,.$$

В останньому тотожному перетворенні були використані позначення (1.32), (1.36).

Інтеграл для t приймає наступний вигляд:

$$t=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{(r-a)^2-a^2e^2}}\,.$$

Робимо заміну: $\qquad r-a=a\,e\,\mathrm{ch}\xi\,,$

тоді $\qquad r=a(e\,\mathrm{ch}\xi+1);\qquad dr=a\,e\,\mathrm{sh}\xi\,d\xi\,.$

Таким чином, враховуючи, що $2E=\dfrac{\alpha}{a}$ (див. (1.36)), маємо:

$$t=\sqrt{\frac{m}{2E}}\int\frac{a(e\,\mathrm{ch}\xi+1)\cdot ae\,\mathrm{sh}\xi d\xi}{\sqrt{a^2e^2\mathrm{ch}^2\xi-a^2e^2}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{a(e\,\mathrm{ch}\xi+1)\cdot ae\,\mathrm{sh}\xi d\xi}{ae\,\mathrm{sh}\xi}=$$

$$=a\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int(e\,\mathrm{ch}\xi+1)\,d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\xi+\xi)+\mathrm{const}.$$

Вибираючи початок відліку часу так, щоб обернути const на нуль, дістанемо остаточно наступне параметричне представлення залежності r від t:

$$r(\xi)=a(e\,\mathrm{ch}\xi+1)\,,\qquad t(\xi)=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\,\mathrm{sh}\xi+\xi)\,,\qquad (1.37)$$

де параметр ξ змінюється від $-\infty$ до $+\infty$.

Оскільки при $\xi = 0$, $\mathrm{sh}\xi = 0$ і $\mathrm{ch}\xi = 1$, то $t(0) = 0$, а $r(0) = a(e+1) = r_{\min}$. Це означає, що в момент часу $t = 0$, частинка перебуває в перигелії. Через цей же параметр ξ можна виразити і декартові координати частинки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (див. рис. 1.8).

З (1.34) маємо: $p+r=er\cos\varphi=ex$, враховуючи, що з (1.35) $p=a(e^2-1)$, дістаємо

$$ex=p+r=a(e^2-1)+a(e\,\mathrm{ch}\xi+1)=ae(e+\mathrm{ch}\xi).$$

Звідси знаходимо

$$x(\xi)=a(\mathrm{ch}\xi+e). \qquad (1.38)$$

Тоді

$$y=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{a^2(e\,\mathrm{ch}\xi+1)^2-a^2(\mathrm{ch}\xi+e)^2}=$$
$$=a\sqrt{e^2\mathrm{ch}^2\xi+2e\,\mathrm{ch}\xi+1-\mathrm{ch}^2\xi-2e\,\mathrm{ch}\xi-e^2}=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi(e^2-1)-(e^2-1)}=$$
$$=a\sqrt{e^2-1}\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-1}=a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\xi.$$

Таким чином,

$$y(\xi)=a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\xi. \qquad (1.39)$$

Отже, залежність від часу дається параметричними рівняннями (1.37) – (1.39).

1.4 Малі коливання

Вільні одновимірні коливання

Дуже поширений тип руху механічних систем – це *малі коливання*, які система здійснює поблизу свого положення стійкої рівноваги. Розглянемо випадок, коли система має один ступінь вільності, тобто її положення задається однією узагальненою координатою q.

Потенційна енергія $U(q)$ системи, що знаходиться в положенні стійкої рівноваги q_0 , досягає свого мінімуму, тому $U'(q_0)=0$. Відхилення від такого положення призводить до виникнення сили $-dU/dq$ (див. (1.8)), що прагне повернути систему назад. Розкладемо функцію $U(q)$ в ряд Тейлора в околі точки q_0 ; через малість $q - q_0$ обмежимося першими членами розкладу:

$$U(q)=U(q_0)+U'(q_0)(q-q_0)+\tfrac{1}{2}U''(q_0)(q-q_0)^2.$$

Будемо відраховувати потенційну енергію від положення рівноваги, тобто покладемо $U(q_0)=0$, і введемо позначення

$$x = q - q_0$$

для відхилення координати від її рівноважного значення. Тоді, залишаючи в розкладанні $U(q)$ перший незникаючий член і поклавши

$q_0 = 0$, дістанемо вираз для потенційної енергії системи, що здійснює малі коливання:

$$U(x) = kx^2/2,$$

де $k = U''(q_0) > 0$, оскільки q_0 – точка мінімуму функції U(q).

Враховуючи, що $\dot{x} = \frac{d}{dt}(q - q_0) = \dot{q}$ (оскільки q_0 = const), запишемо загальний вираз для кінетичної енергії системи з одним ступенем вільності:

$$T = ½a(q)\dot{q}^2 = ½a(q)\dot{x}^2.$$

З урахуванням малості коливань також замінюємо функцію a(q) її значенням при $q = q_0$. Введемо для стислості позначення a(q) = m (тут величина m співпадає з масою тільки, якщо x – декартова координата), тоді дістанемо остаточно вираз для лагранжевої функції системи, що здійснює одновимірні малі коливання:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{1.40}$$

Підставляючи цю функцію в рівняння (1.2) для s = 1, знаходимо рівняння руху

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

або

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{1.41}$$

де введено позначення

$$\omega = \sqrt{k/m}. \tag{1.42}$$

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (1.41) має вигляд

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t. \tag{1.43}$$

Цей вираз може бути записаний також як

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{1.44}$$

де зв'язок між a, α, c_1 і c_2 дається формулами

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \mathrm{tg}\alpha = -\frac{c_2}{c_1}. \tag{1.45}$$

Таким чином, поблизу положення стійкої рівноваги система здійснює гармонічний коливальний рух. Коефіцієнт a при періодичному множнику в (1.44) називається *амплітудою* коливань, а аргумент косинуса – їх *фазою*; α є початкове значення фази, яке залежить від вибору початку відліку часу. Величина ω називається *циклічною частотою* коливань, надалі ми будемо називати її просто *частотою*.

Частота є основною характеристикою коливань, що не залежить від початкових умов руху. Згідно з формулою (1.42) вона цілком визначається властивостями механічної системи (тільки у випадку малих коливань).

З (1.40) випливає, що енергія системи, яка здійснює малі коливання, дорівнює

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}\left(\left[\frac{d}{dt}(a\cos(\omega t+\alpha))\right]^2+\omega^2\left[a\cos(\omega t+\alpha)\right]^2\right)=$$

$$=\frac{m}{2}a^2\left([-\omega\sin(\omega t+\alpha)]^2+\omega^2\cos^2(\omega t+\alpha)\right)=\frac{m}{2}a^2\omega^2\cdot \qquad (1.46)$$

Таким чином,

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2\cdot$$

Розглянемо комплексний вираз

$$ae^{i\alpha}e^{i\omega t}=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\omega t+i\sin\omega t)=a(\cos\alpha\cos\omega t+i\cos\alpha\sin\omega t+$$

$$+i\sin\alpha\cos\omega t+i^2\sin\alpha\sin\omega t)=a[(\cos\alpha\cos\omega t-\sin\alpha\sin\omega t)+i(\cos\alpha\sin\omega t+$$

$$+\sin\alpha\cos\omega t)]=a[\cos(\omega t+\alpha)+i(\sin\omega t+\alpha)]=a\cos(\omega t+\alpha)+ia(\sin\omega t+\alpha).$$

В кінцевому виразі перший доданок, що є дійсною частиною початкового комплексного числа, як випливає з (1.44), є координатою коливальної системи. Тому для більшої зручності залежність $x = x(t)$ часто представляють у вигляді дійсної частини комплексного виразу

$$x=\mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\},$$

де A – комплексна стала, яка дорівнює

$$A=ae^{i\alpha}.$$

Сталу A називають *комплексною амплітудою*; її модуль збігається із звичайною амплітудою, а аргумент – з початковою фазою.

Приклад 1.5. Знайти частоту коливань точки с масою m, здатної рухатися по колу радіуса r (рис. 1.9) і прикріпленою до пружини, інший кінець якої закріплений в точці A. Пружина у вертикальному положенні, маючи довжину l, натягнута з силою F.

Розв'язання. Дана система має один ступінь вільності (положення точки *m* на заданій кривій). В якості узагальненої координати виберемо кут φ, що дорівнює відхиленню радіус-вектора матеріальної точки, проведеного з центру кола, від вертикалі.

Нехай l_0 – довжина вільної пружини, тоді в вертикальному положенні (при $\varphi = 0$) її подовження дорівнює $\Delta l = l - l_0$, і потенційна енергія пружини в цьому положенні, тобто в стані рівноваги, є

$$U_0 = \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 \cdot$$

Сила F, що діє на пружину в цьому положенні, дорівнює $k\,\Delta l$, отже, $\Delta l = F/k$.

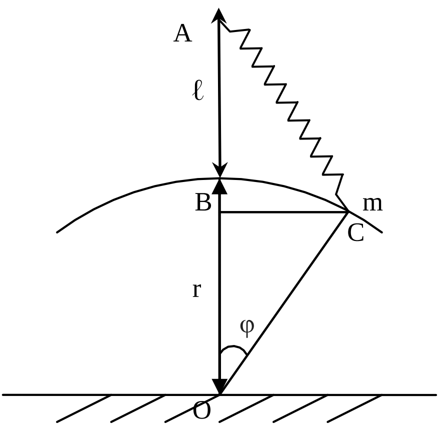

Рисунок 1.9

Коли частинка знаходиться в точці *C*, довжина пружини дорівнює $l + \delta l$, а її видовження: $(l + \delta l) - l_0 = (l - l_0) + \delta l = \Delta l + \delta l$, і потенційна енергія в точці *C*

$$U_C = \frac{k}{2}(\Delta\ell + \delta\ell)^2 = \frac{k}{2}((\Delta\ell)^2 + 2\Delta\ell\,\delta\ell + (\delta\ell)^2) \approx \frac{k}{2}(\Delta\ell)^2 + k\Delta\ell\delta\ell =$$

$$= U_0 + k \cdot \frac{F}{k} \cdot \delta\ell = U_0 + F\delta\ell.$$

Таким чином, потенційна енергія пружини з точністю до малих величин вищого порядку дорівнює $U = U_C - U_0 = F\delta\ell.$

У свою чергу $\delta\ell = |AC| - \ell$. З рис. 1.9 випливає, що

$$|AB| = (r - r\cos\varphi) + \ell; \quad |BC| = r\sin\varphi;$$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = (\ell + r(1-\cos\varphi))^2 + (r\sin\varphi)^2 =$$

$$= \ell^2 + 2r\ell(1-\cos\varphi) + r^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + r^2\sin^2\varphi =$$

$$= (\ell^2 + 2r\ell + r^2) - 2r\ell\cos\varphi - 2r^2\cos\varphi + r^2 = r^2 + (\ell + r)^2 - 2r(\ell + r)\cos\varphi.$$

Розглянемо функцію

$$|AC| = f(\varphi) = \sqrt{r^2 + (\ell + r)^2 - 2r(\ell + r)\cos\varphi};$$

$$f(0) = \sqrt{r^2 + (\ell + r)^2 - 2r(\ell + r)} = \sqrt{(r - (\ell + r))^2} = \ell;$$

$$f'(\varphi) = \frac{-2r(\ell + r)(-\sin\varphi)}{2\sqrt{r^2 + (\ell + r)^2 - 2r(\ell + r)\cos\varphi}} = \frac{r(\ell + r)\sin\varphi}{f(\varphi)};$$

$$f'(0) = 0;$$

$$f''(\varphi) = \frac{r(\ell + r)\cos\varphi \cdot f(\varphi) - r(\ell + r)\sin\varphi \cdot f'(\varphi)}{f^2(\varphi)};$$

$$f''(0) = \frac{r(\ell + r)\ell - 0}{\ell^2} = \frac{r(\ell + r)}{\ell}.$$

Розклад функції $f(\varphi)$ в околі точки $\varphi = 0$ до членів другого порядку має вигляд:

$$f(\varphi) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1}\varphi + \frac{f''(0)}{2}\varphi^2 = \ell + 0 + \frac{\varphi^2}{2}\frac{r(\ell + r)}{\ell}.$$

Тоді

$$\delta\ell = |AC| - \ell = f(\varphi) - \ell \approx \frac{r(\ell + r)}{2\ell}\varphi^2,$$

і потенційна енергія системи визначається формулою

$$U(\varphi) = F\delta\ell = \frac{Fr(\ell + r)}{2\ell}\varphi^2.$$

Кінетична енергія дорівнює (з урахуванням того, що $x = r\cdot\sin\varphi$, $y = r\cdot\cos\varphi$):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Енергія системи є

$$E = T + U = \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{Fr(\ell + r)}{2\ell}\varphi^2 = \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{F(\ell + r)}{mr\ell}\varphi^2\right) =$$

$$= \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\varphi^2\right).$$

Зіставимо цю формулу з другим тотожнім виразом в (1.46). Тут роль коефіцієнта *m* відіграє добуток mr^2, узагальнена координата *x* – це кут φ, і

$$\omega^2 = \frac{F(\ell + r)}{r\ell m}.$$

Таким чином, частота коливань є

$$\omega = \sqrt{\frac{F(\ell + r)}{r\ell m}}.$$

Вимушені коливання

Перейдемо до розгляду коливань у системі, на яку діє змінне зовнішнє поле; такі коливання називають *вимушеними* на відміну від розглянутих вище *вільних* коливань. Оскільки коливання передбачаються малими, то зовнішнє поле повинно бути досить слабким. При цій умові, зовнішнє поле можна врахувати додаванням до власної потенційної енергії $\frac{1}{2}kx^2$ доданка $-x\mathrm{F}(t)$, де $\mathrm{F}(t)$ – зовнішня «сила», що діє на систему в положенні рівноваги і є заданою функцією часу. Так що функція Лагранжа буде:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\,x^2}{2} + xF(t). \tag{1.47}$$

Відповідне рівняння руху (див. (1.2)) є

$$m\ddot{x}^2 + k\,x = F(t),$$

або

$$\ddot{x}^2 + \omega^2\,x = \frac{1}{m}F(t), \tag{1.48}$$

де ω – частота вільних коливань.

Рівняння (1.48) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням із сталими коефіцієнтами, загальний розв’язок якого отримують у вигляді суми: $x = x_0 + x_1$, де x_0 – загальний розв’язок однорідного рівняння (1.41), а x_1 – частинний інтеграл неоднорідного рівняння (1.48).

Рівняння (1.48) може бути також проінтегровано в загальному вигляді при довільній змушуючий силі $\mathrm{F}(t)$ наступним чином. Перепишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

або

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t), \qquad (1.49)$$

де введено комплексну величину

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \qquad (1.50)$$

Рівняння (1.49) вже не другого, а першого порядку. Без правої частини його розв'язком було б $\xi = Ae^{i\omega t}$ із сталою A. За загальним правилом, шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $\xi = A(t)e^{i\omega t}$ і для функції $A(t)$ дістаємо рівняння

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}.$$

Інтегруючи його, одержимо розв'язок рівняння (1.49) у вигляді

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}dt + \xi_0\right\}, \qquad (1.51)$$

де стала інтегрування ξ_0 являє собою значення ξ в момент часу $t = 0$. Загальний розв'язок $x(t)$ дається уявною частиною виразу (1.51), поділеній на ω, тобто

$$x(t) = \frac{\mathrm{Im}\{\xi(t)\}}{\omega}. \qquad (1.52)$$

Оскільки функція Лагранжа (1.47) у загальному випадку явно залежить від часу, енергія системи, що здійснює вимушені коливання, не зберігається. Система набуває енергію за рахунок джерела зовнішньої сили. Знайдемо квадрат модуля комплексного числа ξ. За означенням з рівності (1.50)

$$|\xi|^2 = (\dot{x})^2 + (\omega x)^2 = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2.$$

Тоді формула (1.46) приймає вигляд

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2 = \frac{m}{2}a^2\omega^2.$$

З останньої рівності випливає, що амплітуда коливань дорівнює

$$a = \frac{|\xi|}{\omega}. \qquad (1.53)$$

Приклад 1.6. Визначити вимушені коливання системи (з власною частотою ω і «узагальненою» масою m) під впливом сили $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$, якщо в початковий момент часу $t = 0$ система покоїться в положенні рівноваги $(x = 0, \dot{x} = 0)$.

Розв'язання. Оскільки $x = 0, \dot{x} = 0$, то $\xi_0 = \dot{x}_0 + i\omega x_0 = 0$, з урахуванням цього, підставляючи задану силу в формулу (1.51), дістаємо

$$\xi = e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m} F_0 e^{-\alpha t}\cos(\beta t)e^{-i\omega t}dt\right\} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \cos(\beta t)e^{-(\alpha+i\omega)t}dt\right\} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}z,$$

де інтеграл у фігурних дужках позначений літерою z.

Тоді з (1.52)

$$x(t) = \frac{\mathrm{Im}\{\xi(t)\}}{\omega} = \frac{\mathrm{Im}\left\{\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}z\right\}}{\omega} = \frac{F_0}{m\omega}\mathrm{Im}\left\{e^{i\omega t}z\right\}. \tag{1.54}$$

Введемо позначення $\gamma = \alpha + i\omega$ і розглянемо інтеграл

$$z = \int_0^t e^{-(\alpha+i\omega)t}\cos\beta t dt = \int_0^t e^{-\gamma t}\cos\beta t dt \cdot$$

Здійснивши двічі інтегрування частинами, маємо

$$\int_0^t e^{-\gamma t}\cos\beta t dt = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}\cos\beta t) + \frac{\beta}{\gamma^2}e^{-\gamma t}\sin\beta t - \frac{\beta^2}{\gamma^2}\int_0^t e^{-\gamma t}\cos\beta t dt,$$

тобто

$$z = \frac{\gamma - \gamma e^{-\gamma t}\cos\beta t + \beta e^{-\gamma t}\sin\beta t}{\gamma^2} - \frac{\beta^2}{\gamma^2}z \cdot$$

Звідси

$$z = \int_0^t e^{-\gamma t}\cos\beta t dt = \frac{\gamma + e^{-\gamma t}(\beta\sin\beta t - \gamma\cos\beta t)}{\gamma^2 + \beta^2}. \tag{1.55}$$

Вираз в знаменнику дорівнює

$$\gamma^2 + \beta^2 = (\alpha + i\omega)^2 + \beta^2 = \alpha^2 + i2\omega\alpha + (i\omega)^2 + \beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) + i2\alpha\omega.$$

Множимо чисельник і знаменник дробу в (1.55) на комплексно-спряжене число $(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) - i2\alpha\omega$ і робимо зворотну підстановку для γ, дістаємо

$$z = \frac{[(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) - i2\alpha\omega]}{(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}\left\{(\alpha + i\omega) + e^{-(\alpha+i\omega)t}(\beta\sin\beta t - (\alpha + i\omega)\cos\beta t)\right\}\cdot$$

Для стислості викладів введемо наступні позначення:

$$C = \alpha^2 + \beta^2 - \omega^2; \quad B = \beta\sin\beta t - \alpha\cos\beta t,$$

де B і C – дійсні числа. Тоді

$$\mathrm{z}=\frac{[\mathrm{C}-i2\alpha\omega]}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\left\{(\alpha+i\omega)+e^{-(\alpha+i\omega)\mathrm{t}}(\mathrm{B}\text{-}i\omega\cos\beta\mathrm{t})\right\}.$$

Розглянемо тепер величину $e^{i\omega\mathrm{t}}\mathrm{z}$, уявна частина якої згідно (1.54), нас цікавить. При цьому будемо використовувати формулу Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$:

$$e^{i\omega\mathrm{t}}\mathrm{z}=\frac{[\mathrm{C}-i2\alpha\omega]}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}e^{i\omega\mathrm{t}}\left\{(\alpha+i\omega)+e^{-\alpha\mathrm{t}}e^{-i\omega\mathrm{t}}(\mathrm{B}\text{-}i\omega\cos\beta\mathrm{t})\right\}=\frac{[\mathrm{C}-i2\alpha\omega]}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\times$$

$$\times\left\{e^{i\omega\mathrm{t}}(\alpha+i\omega)+e^{-\alpha\mathrm{t}}(\mathrm{B}\text{-}i\omega\cos\beta\mathrm{t})\right\}=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\mathrm{C}e^{i\omega\mathrm{t}}(\alpha+i\omega)+$$

$$+\mathrm{C}e^{-\alpha\mathrm{t}}(\mathrm{B}\text{-}i\omega\cos\beta\mathrm{t})+e^{i\omega\mathrm{t}}(2\alpha\omega^2-i2\alpha^2\omega)+e^{-\alpha\mathrm{t}}(\text{-}i2\alpha\omega\mathrm{B}+2\alpha\omega^2\cos\beta\mathrm{t})\}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\mathrm{C}(\cos\omega\mathrm{t}+i\sin\omega\mathrm{t})(\alpha+i\omega)+\mathrm{CB}e^{-\alpha\mathrm{t}}-i\mathrm{C}e^{-\alpha\mathrm{t}}\omega\cos\beta\mathrm{t}+$$

$$+2\alpha\omega(\cos\omega\mathrm{t}+i\sin\omega\mathrm{t})(\omega-i\alpha)\text{-}i2\alpha\omega\mathrm{B}e^{-\alpha\mathrm{t}}+2\alpha\omega^2e^{-\alpha\mathrm{t}}\cos\beta\mathrm{t}\}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\mathrm{C}(\alpha\cos\omega\mathrm{t}+i\omega\cos\omega\mathrm{t}+i\alpha\sin\omega\mathrm{t}-\omega\sin\omega\mathrm{t})+\mathrm{CB}e^{-\alpha\mathrm{t}}-$$

$$-i\mathrm{C}e^{-\alpha\mathrm{t}}\omega\cos\beta\mathrm{t}+2\alpha\omega(\omega\cos\omega\mathrm{t}-i\alpha\cos\omega\mathrm{t}+i\omega\sin\omega\mathrm{t}+\alpha\sin\omega\mathrm{t})\text{-}$$

$$\text{-}i2\alpha\omega\mathrm{B}e^{-\alpha\mathrm{t}}+2\alpha\omega^2e^{-\alpha\mathrm{t}}\cos\beta\mathrm{t}\}.$$

Тепер виділимо уявну частину і зробимо зворотну підстановку для B:

$$\mathrm{Im}\{e^{i\omega\mathrm{t}}\mathrm{z}\}=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\mathrm{C}(\omega\cos\omega\mathrm{t}+\alpha\sin\omega\mathrm{t})-\mathrm{C}e^{-\alpha\mathrm{t}}\omega\cos\beta\mathrm{t}-$$

$$-2\alpha\omega(\alpha\cos\omega\mathrm{t}-\omega\sin\omega\mathrm{t})\text{-}2\alpha\omega\mathrm{B}e^{-\alpha\mathrm{t}}\}=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\cos\omega\mathrm{t}(\mathrm{C}\omega-2\alpha\omega^2)+$$

$$+\sin\omega\mathrm{t}(\alpha\mathrm{C}+2\alpha\omega^2)-\mathrm{C}e^{-\alpha\mathrm{t}}\omega\cos\beta\mathrm{t}-2\alpha\omega(\beta\sin\beta\mathrm{t}-\alpha\cos\beta\mathrm{t})e^{-\alpha\mathrm{t}}\}=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{C}^2+4\alpha^2\omega^2}\{\omega(\mathrm{C}-2\alpha^2)\cos\omega\mathrm{t}+\alpha(\mathrm{C}+2\omega^2)\sin\omega\mathrm{t}-$$

$$-e^{-\alpha\mathrm{t}}\omega[\cos\beta\mathrm{t}(\mathrm{C}-2\alpha^2)+2\alpha\beta\sin\beta\mathrm{t}]\}.$$

Підставляємо вираз для C і ділимо на ω

$$\frac{\mathrm{Im}\{e^{i\omega\mathrm{t}}\mathrm{z}\}}{\omega}=\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2-2\alpha^2)\cos\omega\mathrm{t}+$$

$$+\frac{\alpha}{\omega}(\alpha^2+\beta^2-\omega^2+2\omega^2)\sin\omega\mathrm{t}-e^{-\alpha\mathrm{t}}[\cos\beta\mathrm{t}(\alpha^2+\beta^2-\omega^2-2\alpha^2)+$$

$$+2\alpha\beta\sin\beta\mathrm{t}]\}=$$

$$=\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$

$$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t-e^{-\alpha t}[-(\alpha^2+\beta^2-\omega^2-2\alpha^2)\cos\beta t+$$

$$+2\alpha\beta\sin\beta t]\}.$$

Для однорідного вигляду формули перетворимо вираз у знаменнику наступним чином:

$$(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2=\alpha^4+\beta^4+\omega^4+2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\omega^2-\beta^2\omega^2)=$$

$$=(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2.$$

Остаточно дістаємо рівняння руху даної системи:

$$x(t)=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$

$$+\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t]\}.$$

Приклад 1.7. Визначити кінцеву амплітуду коливань системи (з власною частотою ω і «узагальненою» масою m) після дії сталої сили F_0. Сила діє протягом обмеженого часу T (рис. 1.10); до моменту $t = 0$ система покоїться в положенні рівноваги.

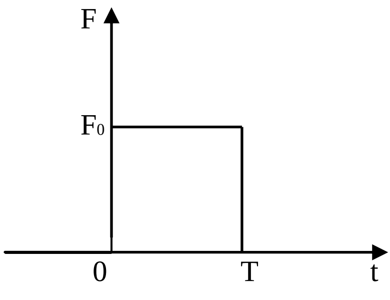

Рисунок 1.10

Розв’язання.

І спосіб. Знайдемо спочатку рівняння руху системи, на яку діє сила F_0. Оскільки спочатку система покоїлася ($x=0, \dot{x}=0$), то $\xi_0=0$. Тоді з (1.51) дістаємо

$$\xi(\mathrm{t})=e^{i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{\mathrm{m}}\mathrm{F}_0 e^{-i\omega t}\mathrm{dt}\right\}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}}e^{i\omega t}\left\{\int_0^t e^{-i\omega t}\mathrm{dt}\right\}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}}\frac{e^{i\omega t}}{(-i\omega)}\left(e^{-i\omega t}\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}}\frac{ie^{i\omega t}}{\omega}\left(e^{-i\omega t}-1\right)=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}i(1-e^{i\omega t})=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}(\sin\omega \mathrm{t}+i(1-\cos\omega \mathrm{t})).$$

За формулою (1.52) знаходимо

$$\mathrm{x(t)}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}(1-\cos\omega \mathrm{t})\cdot$$

Дійсна частина ξ згідно (1.50) є швидкістю

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t})=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}\sin\omega \mathrm{t}\cdot$$

Оскільки при $t>\mathrm{T}$ система здійснює вільні коливання, шукаємо розв’язок у вигляді (див. (1.43))

$$\mathrm{x(t)}=\mathrm{c}_1\cos\omega(\mathrm{t}-\mathrm{T})+\mathrm{c}_2\sin\omega(\mathrm{t}-\mathrm{T});$$

тоді

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t})=-\omega \mathrm{c}_1\sin\omega(\mathrm{t}-\mathrm{T})+\omega \mathrm{c}_2\cos\omega(\mathrm{t}-\mathrm{T}).$$

З умов неперервності x і $\dot{x}$ при $t=\mathrm{T}$ знаходимо:

$$\begin{cases}\mathrm{x(T)}=\dfrac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}(1-\cos\omega\mathrm{T})=\mathrm{c}_1\cos 0+\mathrm{c}_2\sin 0\\ \dot{\mathrm{x}}(\mathrm{T})=\dfrac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}\sin\omega\mathrm{T}=-\omega\mathrm{c}_1\sin 0+\omega\mathrm{c}_2\cos 0\end{cases},$$

$$\begin{cases}\mathrm{c}_1=\dfrac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}(1-\cos\omega\mathrm{T})\\ \mathrm{c}_2=\dfrac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sin\omega\mathrm{T}\end{cases}.$$

Як випливає з (1.45) амплітуда коливань є

$$a=\sqrt{\mathrm{c}_1^2+\mathrm{c}_2^2}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sqrt{(1-\cos\omega\mathrm{T})^2+\sin^2\omega\mathrm{T}}=$$

$$=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sqrt{1-2\cos\omega\mathrm{T}+(\cos^2\omega\mathrm{T}+\sin^2\omega\mathrm{T})}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sqrt{2(1-\cos\omega\mathrm{T})}=$$

$$=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\omega\mathrm{T}}{2}}=\frac{2\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sin\frac{\omega\mathrm{T}}{2}.$$

II спосіб. При $t>\mathrm{T}$ система здійснює вільні коливання навколо положення $x=0$. При цьому, оскільки сила F_0 діяла протягом проміжку часу від 0 до Т, то, замінюючи в (1.51) верхню границю інтегрування на Т, дістаємо

$$\xi(t)=e^{i\omega t}\left\{\int_0^T \frac{1}{m}F_0e^{-i\omega t}dt\right\}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\left\{\int_0^T e^{-i\omega t}dt\right\}=\frac{F_0}{m}\frac{e^{i\omega t}}{(-i\omega)}\left(e^{-i\omega t}\Big|_0^T\right)=$$

$$=\frac{F_0}{m}\frac{ie^{i\omega t}}{\omega}\left(e^{-i\omega T}-1\right)=\frac{F_0}{m\omega}i(\cos\omega T-i\sin\omega T-1)e^{i\omega t}=$$

$$=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}[\sin\omega\mathrm{T}+i(\cos\omega\mathrm{T}-1)]e^{i\omega t}.$$

Відповідно до формули (1.53) амплітуда дорівнює $a=\frac{|\xi|}{\omega}$; знаходимо

$$|\xi|=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}\sqrt{(1-\cos\omega\mathrm{T})^2+\sin^2\omega\mathrm{T}}=\frac{2\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega}\sin\frac{\omega\mathrm{T}}{2}.$$

Таким чином, в момент часу t = Т амплітуда коливань досягає значення

$$a=\frac{2\mathrm{F}_0}{\mathrm{m}\omega^2}\sin\frac{\omega\mathrm{T}}{2}$$

і надалі вже не змінюється.

1.5 Рух твердого тіла

Кутова швидкість

Тверде тіло можна визначити в механіці як систему матеріальних точок, відстані між якими незмінні.

Для опису руху твердого тіла введемо дві системи координат: «нерухому», тобто інерціальну систему *XYZ*, і рухому систему координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, яка жорстко зв’язана з твердим тілом, і її початок координат суміщений з центром інерції тіла.

Для однозначного завдання положення твердого тіла відносно нерухомої системи координат необхідно задати 6 величин. Три компоненти радіус-вектора **R** вказують положення початку *O* рухомої системи (рис. 1.11). Орієнтація ж осей цієї системи відносно нерухомої визначається трьома незалежними кутами. Таким чином, будь-яке тверде тіло являє собою механічну систему з шістьма ступенями вільності.

Довільне нескінченно мале переміщення твердого тіла можна подати як суму паралельного перенесення, при якому всі точки зміщуються на однаковий відрізок $d\mathbf{R}$, і повороту на кут $d\boldsymbol{\varphi}$ навколо осі, що проходить через точку O.

Позначимо радіус-вектор довільної точки твердого тіла в рухомій системі координат за допомогою $\mathbf{r}$, а радіус-вектор тієї ж точки в нерухомій системі – за допомогою $\check{\mathbf{r}}$. Тоді нескінченно мале переміщення цієї точки $d\check{\mathbf{r}}$ дорівнює: $d\check{\mathbf{r}} = d\mathbf{R} + [d\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}]$. Розділивши цю рівність на час dt, протягом якого відбулося розглянуте переміщення, дістанемо співвідношення швидкостей

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{V}} + [\vec{\Omega}\vec{\mathrm{r}}], \tag{1.56}$$

де введені такі позначення: $\mathbf{v} = d\check{\mathbf{r}}\,/dt$, $\mathbf{V} = d\mathbf{R}\,/dt$, $\boldsymbol{\Omega} = d\boldsymbol{\varphi}\,/dt$.

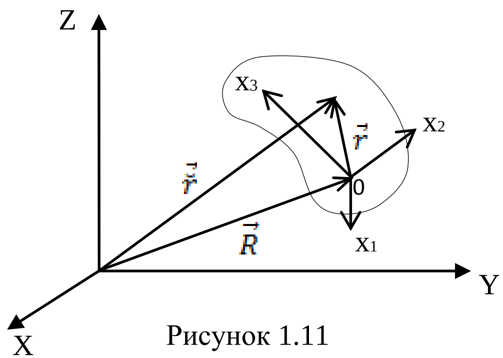

Рисунок 1.11

Вектор $\mathbf{V}$ є швидкістю центру інерції твердого тіла, або швидкістю *поступального* руху. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ називається *кутовою швидкістю* обертання твердого тіла; його напрям (як і напрям $d\boldsymbol{\varphi}$) збігається з напрямом осі обертання.

При виведенні формули (1.56) властивості початку координат як центру інерції поки що не були використані.

Задамо нову систему координат, жорстко зв'язану з тілом, шляхом паралельного перенесення старої системи з точки O на відстань $\mathbf{a}$ в точку O'. Швидкість переміщення початку O' цієї системи позначимо через $\mathbf{V}'$, а кутову швидкість її обертання – через $\boldsymbol{\Omega}'$.

Розглянемо знову якусь точку твердого тіла і позначимо її радіус-вектор відносно початку O' через $\mathbf{r}'$. Тоді $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ і в результаті підстановки в (1.56) дістанемо наступні співвідношення між швидкостями:

$$\vec{V}' = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{a}], \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega}. \tag{1.57}$$

Друга з цих рівностей означає, що кутова швидкість обертання навколо всіх паралельних осей однакова, і можна говорити просто про кутову швидкість тіла $\boldsymbol{\Omega}$.

З першої формули (1.57) видно, що якщо **V** і $\boldsymbol{\Omega}$ (в даний момент часу) взаємно перпендикулярні, то вектори **V** і [$\boldsymbol{\Omega}$**a**] компланарні. Відтак, будуть компланарними також вектори **V**' і **V**. Отже, вектор **V**', як і вектор **V**, теж перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Тобто, якщо **V** і $\boldsymbol{\Omega}$ взаємно перпендикулярні при будь-якому виборі початку координат *O*, то вони будуть взаємно перпендикулярні і при будь-якому іншому виборі початку координат *O*'.

В цьому ж випадку перпендикулярності векторів **V** і $\boldsymbol{\Omega}$, провівши аналогічні міркування, з формули (1.56) можна зробити висновок, що швидкості **v** всіх точок тіла лежать в одній площині, перпендикулярній до $\boldsymbol{\Omega}$. Варіюючи вибір точки *O*', можна домогтися того, щоб швидкість

$$\vec{V} = \vec{v} - [\vec{\Omega}\vec{r}]$$

стала рівною нулю (при цьому точка *O*' може опинитися за межами тіла). В результаті рух твердого тіла буде представлений тільки як обертання навколо осі, яку називають *миттєвою віссю обертання* тіла.

Тензор інерції

Для обчислення кінетичної енергії твердого тіла розглянемо його як дискретну систему матеріальних точок, тоді

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}.$$

Підставляючи сюди (1.56), дістанемо

$$T = \sum_a \frac{m_a}{2}(\vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{r}_a])^2 = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_a m_a[\vec{\Omega}\vec{r}_a]^2 = T_{\text{пост}} + T_{\text{об}},$$

де $\mu = \Sigma m_a$ – маса тіла. Тут було використано ту обставину, що початок рухомої системи координат обрано в центрі інерції, відтак, $\Sigma m_a \mathbf{r}_a = 0$.

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла може бути представлена у вигляді суми кінетичних енергій поступального і обертального рухів. Причому такий поділ T на дві незалежні частини можливий саме через вибір центра інерції тіла в якості початку координат.

Розкриваючи квадрат векторного добутку, знаходимо

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_a m_a \{\Omega^2 r_a^2 - (\vec{\Omega}\vec{r}_a)^2\} \cdot$$

Перепишемо кінетичну енергію обертання в тензорних позначеннях, тобто через компоненти x_i , Ω_i векторів **r**, $\boldsymbol{\Omega}$.

$$T_{об} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Omega_i\Omega_k \sum_a m_a \{\delta_{ik}(\sum_\ell x_{\ell a}^2) - x_{ia}x_{ka}\},$$

де δ_{ik} – одиничний тензор, компоненти якого дорівнюють одиниці при $i = k$ і нулю при $i \neq k$, і $\sum_{\ell=1}^{3} x_{\ell a}^2 = \vec{r}_a^{\,2}$.

Ввівши тензор

$$I_{ik} = \sum_a m_a \{\delta_{ik}(\sum_\ell x_{\ell a}^2) - x_{ia}x_{ka}\}, \qquad (1.58)$$

дістанемо остаточний вираз для кінетичної енергії твердого тіла у вигляді

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k \; . \qquad (1.59)$$

Тоді функція Лагранжа твердого тіла дорівнюватиме

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\Omega_i\Omega_k - U \, . \qquad (1.60)$$

Потенційна енергія є в загальному випадку функцією шести змінних, що визначають положення твердого тіла.

Тензор I_{ik} називається *тензором моментів інерції* або просто *тензором інерції* тіла. З означення (1.58) випливає, що він симетричний, тобто $I_{ik} = I_{ki}$. Випишемо в явному вигляді його компоненти:

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

(тут опущений індекс підсумовування *a* при *m* і координатах *x*, *y*, *z*). Компоненти I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} називаються осьовими моментами інерції.

Тензор інерції – адитивний, тобто моменти інерції тіла дорівнюють сумам моментів інерції його частин.

Якщо тверде тіло можна розглядати як суцільне, то в означенні (1.58) сума замінюється інтегралом по об’єму тіла, а маса m_a - масою $\rho d\upsilon$, що міститься в елементі об’єму $d\upsilon$ (ρ – густина маси):

$$I_{ik} = \int \rho \{ \delta_{ik} (\sum_{\ell} x_{\ell a}^2) - x_{ia} x_{ka} \} d\nu \, .$$

Шляхом відповідного вибору напрямів осей x_1, x_2, x_3 можна привести тензор інерції до діагонального вигляду. Ці напрями називаються *головними осями інерції*, а відповідні значення тензора – *головними моментами інерції*; позначимо їх як I_1, I_2, I_3 (або I_x, I_y, I_z). При такому виборі осей x_1, x_2, x_3 обертальна кінетична енергія виражається особливо просто:

$$\mathrm{T}_{\text{об}} = \tfrac{1}{2} (\mathrm{I}_1 \Omega_1^2 + \mathrm{I}_2 \Omega_2^2 + \mathrm{I}_3 \Omega_3^2) \, . \qquad (1.61)$$

Тіло, у якого всі три головні моменти інерції різні, називають *асиметричною дзиґою*.

Якщо два головних моменти інерції дорівнюють один одному, $I_1 = I_2 \neq I_3$, то тверде тіло називається *симетричною дзиґою*. В цьому випадку вибір напряму головних осей в площині x_1x_2 довільний.

Якщо ж всі три головні моменти інерції співпадають, то тіло називають *кульовою дзиґою*. В цьому випадку в якості головних осей можна взяти будь-які три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр інерції.

Якщо у тіла є деяка симетрія, то напрямки головних осей інерції мають ту ж симетрію.

Так, якщо тіло має площину симетрії, то центр інерції і дві головні осі інерції лежать в цій площині, а третя головна вісь – перпендикулярна до неї. Випадком такого роду є система частинок, розташованих в одній площині, наприклад, x_1x_2. Тоді для всіх частинок $x_3 = 0$, і головні моменти інерції

$$\mathrm{I}_1 = \sum \mathrm{m} \mathrm{x}_2^2, \quad \mathrm{I}_2 = \sum \mathrm{m} \mathrm{x}_1^2, \quad \mathrm{I}_3 = \sum \mathrm{m} (\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2^2),$$

так що

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \, .$$

Якщо тіло має вісь симетрії якого-небудь порядку, то центр інерції лежить на цій осі. З нею ж збігається одна з головних осей інерції, а дві інші – перпендикулярні до неї. Прикладом такого тіла є система частинок, розташованих вздовж однієї прямої лінії. Якщо вибрати цю пряму в якості осі x_3, то для всіх частинок $x_1 = x_2 = 0$, і тому два головних моменти інерції співпадають, а третій дорівнює нулю:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \sum \mathrm{m}\mathrm{x}_3^2, \quad \mathrm{I}_3 = 0. \tag{1.62}$$

Таку систему називають *ротатором*. Він має всього дві (а не три) обертальні ступені вільності, оскільки обертання прямої навколо самої себе не має сенсу.

Іноді виявляється зручніше обчислити тензор інерції I'_{ik} , визначений відносно не центру інерції, а відносно іншого початку O':

$$I'_{ik} = \sum m\{\, \delta_{ik}(\sum_{\ell} x'^2_{\ell}\,) - x'_i x'_k \,\}.$$

Тоді, якщо відстань OO' дається вектором **a**, то $\mathbf{r} = \mathbf{r'} + \mathbf{a}$, $x_\mathrm{i} = x_\mathrm{i} + \mathrm{a_i}$; враховуючи також, що $\Sigma \mathrm{m}\mathbf{r} = 0$ за означенням точки O, знайдемо:

$$\mathrm{I}'_{\mathrm{ik}} = \mathrm{I}_{\mathrm{ik}} + \mu(\mathrm{a}^2\delta_{\mathrm{ik}} - \mathrm{a_i a_k}). \tag{1.63}$$

За цією формулою, знаючи I'_{ik} , можна легко обчислити шуканий тензор I_{ik} .

Приклад 1.8. Визначити головні моменти тонкого однорідного стержня довжиною l і масою μ.

Розв’язання. Через те що товщиною стержня можна знехтувати, він має всього два обертальні ступені вільності, і його головні моменти інерції даються формулами (1.62) (див. рис. 1.12), в яких сума замінюється інтегралом.

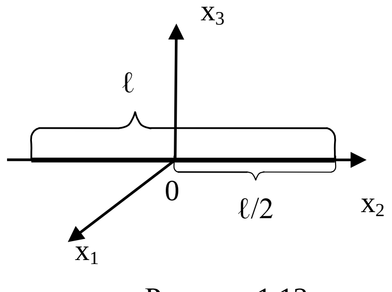

Рисунок 1.12

Оскільки стержень однорідний, то центр інерції, а отже і початок координат, знаходяться на його середині. Нехай маса одиниці довжини стержня дорівнює γ, тоді:

$$I_3 = 0, \quad I_1 = I_2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \gamma x^2 dx = 2\gamma \int_0^{\ell/2} x^2 dx = 2\gamma \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\ell/2} = \frac{2\gamma}{3}\frac{\ell^3}{8} = (\gamma\ell)\frac{\ell^2}{12}.$$

В останньому виразі добуток у дужках є масою стержня μ. Таким чином, головні моменти інерції стержня:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu\ell^2, \quad I_3 = 0.$$

Приклад 1.9. Знайти кінетичну енергію циліндра (радіуса R, масою μ), що котиться по площині. Маса циліндра розподілена по його об'єму таким чином, що одна з головних осей інерції паралельна осі циліндра і проходить на відстані a від неї; момент інерції відносно цієї головної осі є I.

Розв'язання. Вводимо куг φ між вертикаллю і перпендикуляром, проведеним з центру інерції C на вісь циліндра, що проходить через точку O (рис. 1.13).

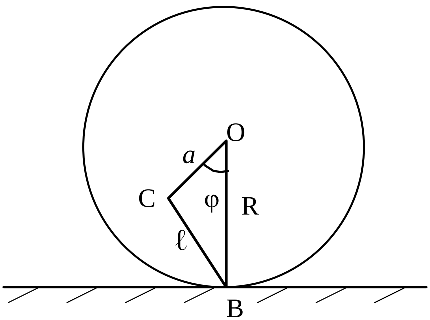

Рисунок 1.13

Оскільки головна вісь паралельна осі циліндра, центр ваги C лежить на її середині. Центр інерції здійснює одночасно поступальний і обертальний рух, його швидкість **V** при цьому завжди знаходиться в площині рисунка. Кутова швидкість обертання циліндра $\dot{\varphi}$ спрямована вздовж осі, тобто перпендикулярна площині рисунка і швидкості **V**. Отже, рух циліндра в кожний момент часу можна розглядати як чисте обертання навколо миттєвої осі, що співпадає з лінією його дотику з нерухомою площиною. Кутова швидкість цього обертання дорівнює $\dot{\varphi}$, оскільки кутова швидкість обертання навколо паралельних осей однакова.

Швидкість центру інерції $V = \dot{\varphi}\ell$, де $\ell = BC$ - відстань від миттєвої осі до *C*. За теоремою косинусів з трикутника *OBC* знаходимо $\ell^2 = \ell^2(t) = a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi(t)$. Звідси

$$V = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi}.$$

Повна кінетична енергія

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Приклад 1.10. Знайти кінетичну енергію однорідного конуса масою μ з кутом при вершині 2α і висотою *H*, основа якого котиться по площині, а вершина постійно знаходиться в точці над площиною на висоті, що дорівнює радіусу основи (так що вісь конуса паралельна площині). Головні моменти інерції конуса відомі.

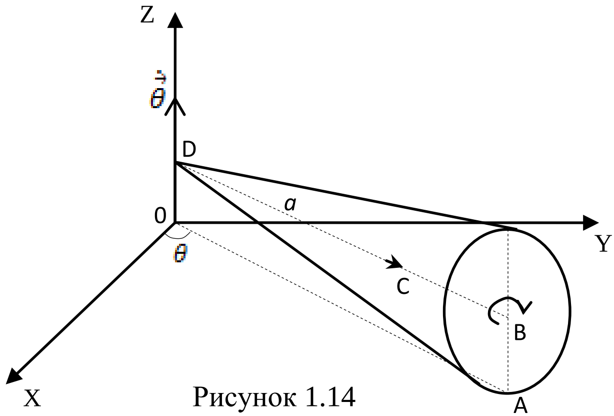

Рисунок 1.14

Розв'язання. Вводимо кут θ між віссю *X* і проекцією осі конуса на площину *XY* (рис. 1.14). Як відомо, центр ваги однорідного конуса знаходиться на його осі на відстані $a = 3H/4$ від вершини.

Введемо рухому систему координат x_1, x_2, x_3, жорстко зв'язану з конусом. При цьому початок відліку цієї системи співпадає з центром інерції конуса *C*, а осі розташовані так, як показано на рис. 1.15.

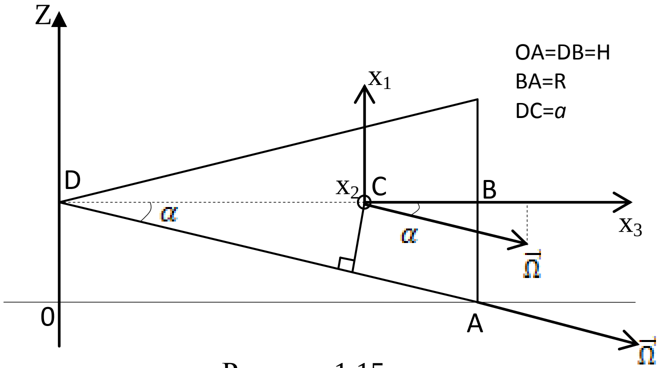

Рисунок 1.15

З одного боку центр інерції *C* обертається навколо осі *Z* по колу радіуса *a*, тому його швидкість $V = a\dot{\theta}$. З іншого боку твірна конуса *DA* проведена в точку його дотику з площиною, є миттєвою віссю його обертання. Центр інерції *C* знаходиться на відстані $a\sin\alpha$ від цієї осі і тому $V = a\sin\alpha \cdot \Omega$, де Ω - кутова швидкість обертання точки *C* навколо *DA*. З цих двох рівнянь знаходимо

$$\Omega = \frac{V}{a\sin\alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}.$$

Проекція вектора $\boldsymbol{\Omega}$ на головні осі інерції (вісь x_2 спрямовуємо перпендикулярно до осі конуса і прямої *DA*): $\Omega_1 = \Omega\sin\alpha = \dot{\theta}$,

$$\Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Omega\cos\alpha = \frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}\cos\alpha = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha.$$

З (1.59) і (1.61) виражаємо кінетичну енергію конуса і підставляємо знайдені значення *V* і кутових швидкостей:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) = \frac{\mu(a\dot{\theta})^2}{2} + \frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}^2 + I_2 \cdot 0 + I_3(\dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha)^2).$$

Підставляючи сюди вираз для *a*, табличні значення головних моментів інерції однорідного конуса

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \frac{3}{20}\mu\left(\mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{H}^2}{4}\right), \quad \mathrm{I}_3 = \frac{3}{10}\mu\mathrm{R}^2,$$

а також співвідношення $R = H\mathrm{tg}\alpha$, де $R = BA$ – радіус основи конуса, дістаємо

$$T = \frac{\mu}{2}\dot{\theta}^2\frac{9}{16}H^2 + \frac{3}{40}\mu H^2\left(tg^2\alpha + \frac{1}{4}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{3}{20}\mu H^2 tg^2\alpha ctg^2\alpha\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\mu H^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{16} + \frac{1}{20}tg^2\alpha + \frac{1}{80} + \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{2}\mu H^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{10} + \frac{tg^2\alpha}{20}\right) =$$

$$= \frac{3}{40}\mu H^2\dot{\theta}^2\left(6 + \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}\right) = \frac{3}{40}\mu H^2\dot{\theta}^2\left(\frac{5cos^2\alpha + 1}{cos^2\alpha}\right).$$

Остаточно для кінетичної енергії маємо:

$$\mathrm{T} = \frac{3\mu\mathrm{H}^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + 5\right)\cdot$$

Момент імпульсу твердого тіла

Величина імпульсу системи залежить від вибору точки, відносно якої він був визначений. Знайдемо вираз для моменту імпульсу **M** тіла відносно центру інерції, тобто початку рухомої системи координат. В цьому випадку момент імпульсу визначається тільки обертанням тіла і не залежить від того, рухається центр інерції чи покоїться, тобто швидкість **V** в (1.56) дорівнює нулю. Тоді згідно з (1.13)

$$\vec{\mathrm{M}} = \sum[\vec{\mathrm{r}}_a\vec{\mathrm{p}}_a] = \sum \mathrm{m}_a[\vec{\mathrm{r}}_a\vec{\mathrm{v}}_a] = \sum \mathrm{m}_a[\vec{\mathrm{r}}_a[\vec{\Omega}\vec{\mathrm{r}}_a]] = \sum \mathrm{m}_a\{\mathrm{r}_a^2\vec{\Omega} - \vec{\mathrm{r}}_a(\vec{\mathrm{r}}_a\vec{\Omega})\},$$

або в тензорних позначеннях:

$$\mathrm{M}_i = \sum_a \mathrm{m}_a\{\Omega_i\sum_\ell \mathrm{x}_{\ell a}^2 - \mathrm{x}_{ia}\sum_k \Omega_k\mathrm{x}_{ka}\} = \sum_k \Omega_k\left\{\sum_a \mathrm{m}_a(\delta_{ik}\sum_\ell \mathrm{x}_{\ell a}^2 - \mathrm{x}_{ia}\mathrm{x}_{ka})\right\},$$

де за означенням (1.58) вираз у фігурних дужках є компонентою тензора інерції I_{ik}.

Таким чином, для проекції вектора **M** на i -у вісь знаходимо наступний вираз:

$$\mathrm{M}_i = \sum_k \mathrm{I}_{ik}\Omega_k, \quad (i = 1,2,3)$$

Якщо осі x_1, x_2, x_3 спрямовані вздовж головних осей інерції тіла, то ця формула дає:

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{I}_1\Omega_1, \quad \mathrm{M}_2 = \mathrm{I}_2\Omega_2, \quad \mathrm{M}_3 = \mathrm{I}_3\Omega_3.$$

Зокрема для кульової дзиґи, коли всі три головні моменти інерції збігаються, маємо просто:

$$\vec{M} = I\vec{\Omega},$$

тобто вектор моменту пропорційний кутовій швидкості і має однаковий з ним напрям.

В загальному випадку довільного тіла вектор **M** не співпадає за своїм напрямом з вектором ***Ω***, і лише при обертанні тіла навколо будь-якої з його головних осей інерції **M** і ***Ω*** мають однаковий напрям.

Рівняння руху твердого тіла

Оскільки тверде тіло має в загальному випадку шість ступенів вільності, то загальна система рівнянь руху повинна складатися з шести незалежних рівнянь. Підставимо функцію Лагранжа твердого тіла (1.60) в рівняння (1.2).

Перші три рівняння Лагранжа по відношенню до координат центру інерції можна записати у векторному вигляді наступним чином:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}},$$

де $\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \mu\vec{V} = \vec{P}$ - повний імпульс тіла;

$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}$ - повна сила, що діє на тіло.

Остаточно знаходимо перше векторне рівняння руху:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}.$$

Для інших трьох рівнянь руху по відношенню до «обертальних координат» у векторному вигляді дістанемо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}}.$$

Диференціюючи функцію Лагранжа (1.60) за компонентами вектора ***Ω***, знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k = M_i.$$

Змінення потенційної енергії при повороті на нескінченно малий кут $\boldsymbol{\delta\varphi}$ дорівнює:

$$\partial \mathrm{U} = -\sum \vec{\mathrm{f}}\,\delta\vec{\mathrm{R}} = -\sum \vec{\mathrm{f}}[\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{\mathrm{r}}] = -\delta\vec{\varphi}\sum[\vec{\mathrm{r}}\vec{\mathrm{f}}] = -\vec{\mathrm{K}}\delta\vec{\varphi}\,, \qquad (1.64)$$

тут **f** – сила, що діє на частинку тіла, причому Σ**f** = **F**;
вектор [**rf**] називається *моментом сили* **f**, так що

$$\vec{\mathrm{K}} = \sum[\vec{\mathrm{r}}\vec{\mathrm{f}}]$$

є сумою всіх моментів сил, що діють на тіло. З (1.64) випливає, що

$$\vec{\mathrm{K}} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\vec{\varphi}}\,.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\vec{\varphi}} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\vec{\varphi}} = \vec{\mathrm{K}}\,.$$

Тоді друге векторне рівняння руху є:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}}{\mathrm{dt}} = \vec{\mathrm{K}}\,.$$

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 2.1

Для наступних систем, що знаходяться в однорідному полі тяжіння (прискорення сили тяжіння g):

- визначити число ступенів вільності і вибрати зручні узагальнені координати;
- знайти функцію Лагранжа;
- написати рівняння руху.

2.1.1 Плоский маятник з масою m_2 (довжина нитки l), точка підвісу якого, з масою m_1 в ній, може здійснювати рух вздовж горизонтальної прямої (рис. 2.1).

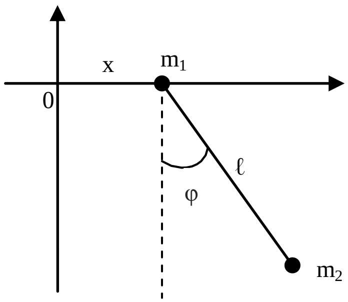

Рисунок 2.1

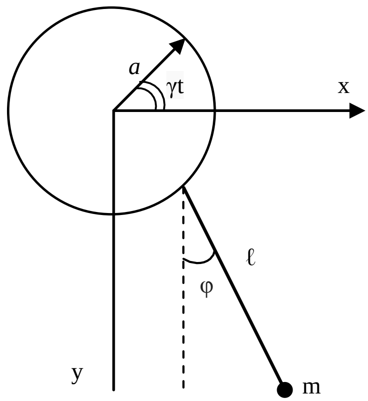

Рисунок 2.2

2.1.2 Плоский маятник (довжина нитки l, маса m), точка підвісу якого рівномірно рухається по вертикальному колу із сталою частотою γ (рис. 2.2).

2.1.3 Плоский маятник (довжина нитки l, маса m), точка підвісу якого здійснює горизонтальні коливання за законом $a \cdot \cos\gamma t$.

2.1.4 Плоский маятник (довжина нитки l, маса m), точка підвісу якого здійснює вертикальні коливання за законом $a \cdot \cos\gamma t$.

2.1.5 Нитка довжиною l, один кінець якої закріплений, а на іншому - метеріальна точка масою m, обертається в горизонтальній площині.

2.1.6 Матеріальна точка масою m рухається по гладкій поверхні вдовж направляючої, яка описується рівнянням $y = a \cdot sin(bx)$ ($[a] = м$, $[b] = м^{-1}$) (рис. 2.3).

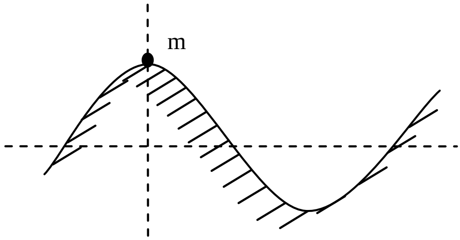

Рисунок 2.3

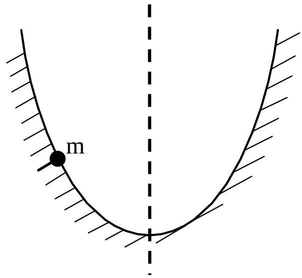

Рисунок 2.4

2.1.7 Матеріальна точка масою m рухається по гладкій поверхні вдовж направляючої, яка описується рівнянням $y = ax^2$ ($[a] = м^{-1}$) (рис. 2.4).

2.1.8 Матеріальна точка масою m кинута під кутом α до горизонту.

2.1.9 Матеріальна точка масою m, прикріплена пружиною жорсткістю C до нерухомої опори, здійснює горизонтальні коливання (рис. 2.5) (потенційна енергія пружини $U = Cx^2/2$, де x – зміщення матеріальної точки від її положення рівноваги).

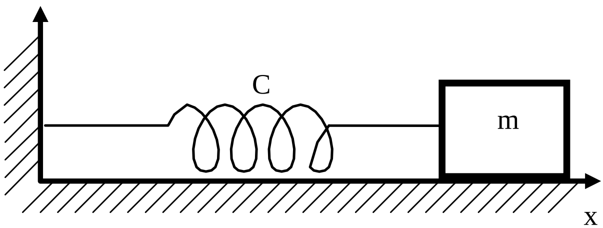

Рисунок 2.5

2.1.10 Матеріальна точка масою m рухається по поверхні конуса (з кутом 2α при вершині), розташованого вертикально, вершиною вниз.

2.1.11 Матеріальна точка масою m рухається по поверхні сфери радіуса l (сферичний маятник).

Завдання 2.2

Які компоненти імпульсу $\boldsymbol{P}$ і моменту $\boldsymbol{M}$ зберігаються при русі в наступних полях (вказати, як розташована система координат).

2.2.1 Поле п’яти точок нерівномірно розташованих на одній прямій.

2.2.2 Поле однорідного конуса.

2.2.3 Поле однорідного кругового тора.

2.2.4 Поле однорідного еліптичного параболоїда, заданого рівнянням $z = x^2 + y^2$.

2.2.5 Поле однорідного еліптичного параболоїда, заданого рівнянням $z = 2x^2 + y^2$.

2.2.6 Поле нескінченної однорідної площини з круглим отвором.

2.2.7 Поле нескінченної однорідної площини з квадратним отвором.

2.2.8 Поле нескінченної однорідної циліндричної поверхні, показаної на рис. 2.6.

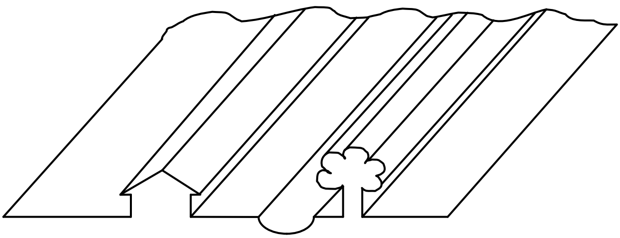

Рисунок 2.6

2.2.9 Поле нескінченної однорідної циліндричної поверхні, показаної на рис. 2.7.

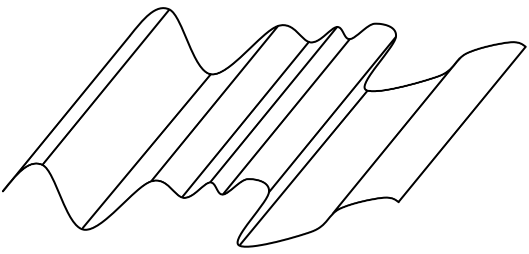

Рисунок 2.7

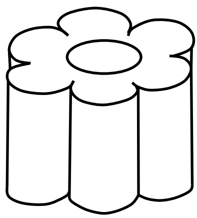

Рисунок 2.8

2.2.10 Поле нескінченно довгого тіла, переріз якого показаний на рис. 2.8, неоднорідного за радіальною координатою.

2.2.11 Поле двох нескінченних однорідних співвісних циліндрів.

Завдання 2.3

2.3.1 Проінтегрувати рівняння руху системи, що описана в умові завдання 2.1.1.

В завданнях **2.3.2 – 2.3.4** визначити залежність періоду коливань від енергії *E* при русі частинки масою *m* в полях із заданою потенційною енергією. Побудувати графік потенційної енергії, визначити область руху.

2.3.2 $U = A|x|^n$.

2.3.3 $U = -U_0/\mathrm{ch}^2\alpha x$, $-U_0 < E < 0$.

2.3.4 $U = U_0 \mathrm{tg}^2\alpha x$.

Проінтегрувати рівняння руху наступних систем (завдання **2.3.5**, **2.3.6**), що знаходяться в полі тяжіння (інтеграли руху вважати відомими). Визначити область руху.

2.3.5 Сферичний маятник – матеріальна точка *m*, що рухається по поверхні сфери радіуса *l*.

2.3.6 Матеріальна точка *m*, що рухається по поверхні конуса (з кутом 2α при вершині), розташованого вертикально, вершиною вниз.

2.3.7 Знайти залежність координат частинки (з масою *m* і моментом **M**) від часу при русі в полі $U = -\alpha / r$ ($\alpha > 0$) з енергією $E = 0$ (по параболі).

2.3.8 Знайти залежність координат частинки (з масою *m* і моментом **M**) від часу при русі в полі $U = -\alpha / r$ ($\alpha > 0$) з енергією $E > 0$ (по гіперболі).

У завданнях **2.3.9 – 2.3.11** проінтегрувати рівняння руху матеріальної точки (з масою *m*, енергією *E* і моментом **M**) в центральному полі $U = -\alpha / r^2$, $\alpha > 0$. Побудувати графік «ефективної» потенційної енергії, визначити область руху.

2.3.9 При $E > 0$, $\dfrac{M^2}{2m} > \alpha$.

2.3.10 При $E>0, \quad \frac{M^2}{2m}<\alpha\cdot$

2.3.11 При $E<0, \quad \frac{M^2}{2m}<\alpha\cdot$

Завдання 2.4

2.4.1 Знайти частоту коливань маятника (див. завдання 2.1.1**)**, точка підвісу якого (з масою m_1 в ній) здатна здійснювати рух в горизонтальному напрямку, за умови $\varphi \ll 1$.

2.4.2 Знайти частоту коливань точки з масою *m*, здатної рухатися по прямій і прикріпленої до пружини, інший кінець якої закріплений в точці *A* (рис. 2.9) на відстані *l* від прямої. Пружина, маючи довжину *l*, натягнута з силою *F*.

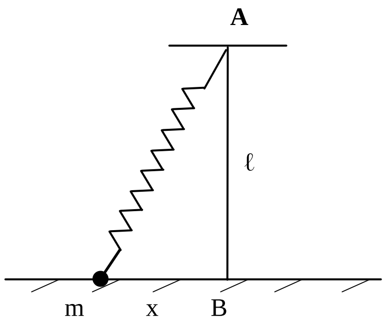

Рисунок 2.9

2.4.3 Визначити форму кривої, при гойданні вздовж якої (в полі тяжіння) частота коливань не залежить від амплітуди. *Вказівка.* Застосувати натуральний спосіб завдання руху *s=s(t)*, де *s* – дугова координата частинки.

В завданнях **2.4.4** – **2.4.6** визначити вимушені коливання системи (з власною частотою ω і «узагальненою» масою *m*) під впливом сили F(*t*), якщо в початковий момент часу $t=0$ система покоїться в положенні рівноваги $(x=0, \dot{x}=0)$ для випадків:

2.4.4 $F(t) = a\cdot t$.

2.4.5 $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$.

2.4.6 $F(t) = f \cdot \cos(\gamma t + \beta)$, $(\gamma \neq \omega)$.

В завданнях **2.4.7 – 2.4.10** визначити кінцеву амплітуду коливань системи (з власною частотою ω і «узагальненою» масою m) після дії заданої зовнішньої сили (до моменту $t = 0$ система покоїться в положенні рівноваги).

2.4.7 Сила змінюється за законом $F = 0$ при $t < 0$, $F = F_0 t/T$ при $0 < t < T$, $F = F_0$ при $t > T$ (рис. 2.10).

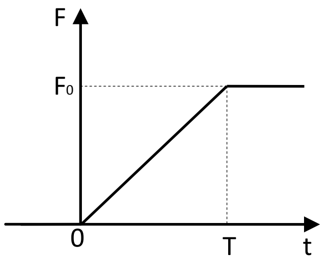

Рисунок 2.10

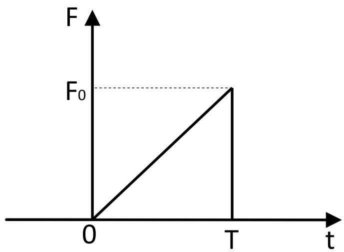

Рисунок 2.11

2.4.8 Сила діє протягом часу від нуля до T за законом $F = F_0 t/T$ (рис. 2.11).

2.4.9 Сила змінюється протягом часу від нуля до $T = 2\pi/\omega$ за законом $F = F_0 \sin\omega t$ (рис. 2.12).

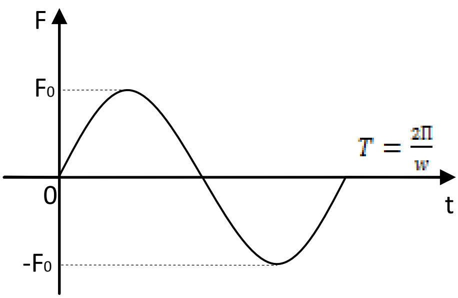

Рисунок 2.12

2.4.10 Сила змінюється протягом часу від нуля до $T = \pi/(2\omega)$ за законом $F = F_0 \cos\omega t$ (рис. 2.13).

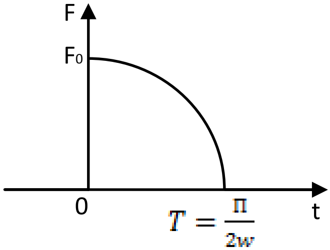

Рисунок 2.13

2.4.11 Виразити амплітуду і початкову фазу коливань через початкові значення x_0 і υ_0 координати і швидкості.

Завдання 2.5

В завданнях **2.5.1 – 2.5.3** визначити головні моменти інерції для молекул, що розглядаються як системи частинок, що знаходяться на незмінних відстанях одна від одної.

2.5.1 Молекула з атомів, розташованих на одній прямій. Маси атомів і відстані між ними відомі. *Вказівка*. Скористатися формулою (1.63).

2.5.2 Трьохатомна молекула у вигляді рівнобедреного трикутника (рис. 2.14) з основою *a* і висотою *h*. Маси атомів, що лежать в основі трикутника, дорівнюють m_1, що знаходиться у вершині - m_2.

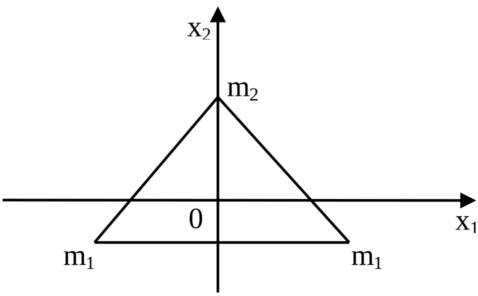

Рисунок 2.14

2.5.3 Чотирьохатомна молекула з атомами, розташованими у вершинах правильної трикутної піраміди (рис. 2.15) з ребром основи *a* і висотою *H*. Маси атомів, що лежать в основі піраміди, дорівнюють m_1, у вершині - m_2.

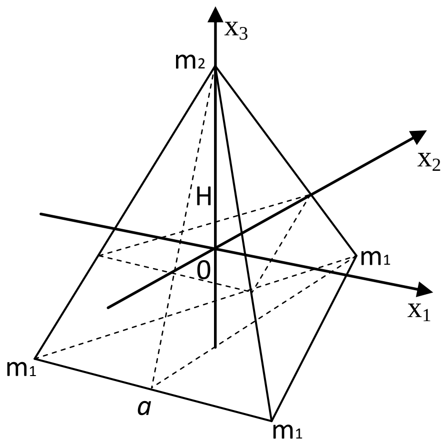

Рисунок 2.15

В завданнях **2.5.4 – 2.5.8** визначити головні моменти інерції суцільних однорідних тіл.

2.5.4 Куля радіуса *R* і масою μ.

2.5.5 Круговий циліндр радіуса *R*, висотою *H* і масою μ.

2.5.6 Прямокутний паралелепіпед з довжиною ребер *a*, *b*, *c* і масою μ.

2.5.7 Круговий конус з висотою *H*, радіусом основи *R* і масою μ.

2.5.8 Тривісний еліпсоїд з півосями *a*, *b*, *c* і масою μ.

2.5.9 Знайти кінетичну енергію системи, зображеної на рис. 2.16; *OA* і *AB* – тонкі однорідні стержні довжиною *l* і масою μ, шарнірно скріплені в точці *A*. Стержень *OA* обертається (в площині рисунка) навколо точки *O*, а кінець *B* стержня *AB* ковзає вздовж осі *Ox*. Головні моменти інерції тонкого стержня вважати відомими.

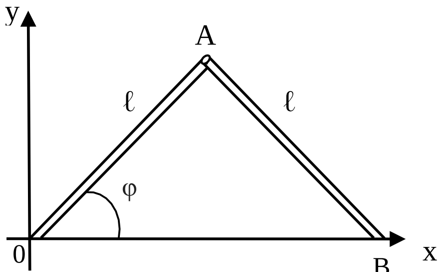

Рисунок 2.16

2.5.10 Знайти кінетичну енергію однорідного циліндра радіуса a і масою μ, що котиться по внутрішній стороні циліндричної поверхні радіуса R (рис. 2.17). Момент інерції відносно осі циліндра відомий.

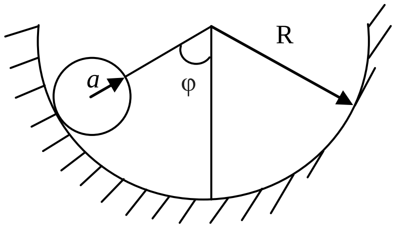

Рисунок 2.17

2.5.11 Знайти кінетичну енергію однорідного конуса масою μ з кутом при вершині 2α і висотою H, що котиться по площині (рис. 2.18). Головні моменти інерції конуса відомі.

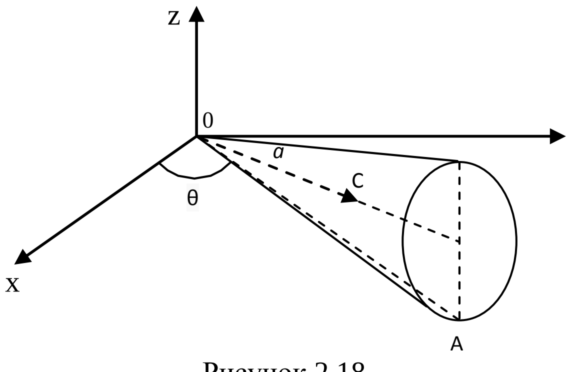

Рисунок 2.18

3 ЛІТЕРАТУРА

3.1 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика в 10 т. Т.1 Механика. – М: Наука, 1988. – 216 с.

3.2 И. В. Савельев. Основы теоретической физики в 2 т. Т.1. – М: Наука, 1991. – 496 с.

3.3 М. А. Павловский, Л. Ю. Акинфиева, О. Ф. Бойчук. Теоретическая механика. Динамика: Учебник. – К.: Выща школа, 1990. – 480 с.

3.4 М. А. Павловський. Теоретична механіка: Підручник. –- К.: Техніка, 2002. – 512 с.

3.5 А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Курс теоретической механики, 2 т. – М.: Высшая школа, 1966. – 411 с.

3.6 А. М. Токар. Теоретична механіка. Кінематика: Методи і задачі: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 2001. – 416 с.

3.7 А. М. Токар. Теоретична механіка. Динаміка: Методи і задачі: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 2006. – 440 с.