

С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ В
УСЛОВИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

В статье получена матрица жесткости вязкоупругого волокнистого композиционного материала. На основе метода конечных элементов предложена методика исследования вязкоупругого поведения композита. Проведен расчет композитной пластины и цилиндра в трехмерной постановке в условиях вязкоупругого деформирования. Рис.5., Ист.16.

Использование композитов в качестве конструкционных материалов позволяет направлено регулировать свойства, вес и геометрические параметры при создании конструкций, а также улучшать другие эксплуатационные характеристики. Часто при оптимизации свойств композиционных материалов возникает необходимость введения полимерных или эластомерных компонентов, как правило, в качестве матрицы. В современных силовых конструкциях чаще всего применяют волокнистые композиционные материалы, представляющие сравнительно податливую матрицу, армированную высокопрочными и высокомодульными волокнами. Именно из таких композиционных материалов методами непрерывной намотки или укладки создаются типичные элементы силовых конструкций – многослойные оболочки и панели. Механическое поведение таких композитов проявляется по-разному: ползучесть при постоянном напряжении, релаксация напряжений при постоянной деформации, затухание динамических эффектов, зависимость диаграммы напряжение-деформация от скорости нагружения и другие. Учет вязкоупругих свойств в значительной степени влияет на процесс деформирования, что достаточно серьезно отражается на сложности моделирования и расчета напряженно-деформированного состояния композитных конструкций.

Учету ползучести в композиционных материалах посвящена работа М.З. Кановича и Н.Н. Трофимова [1]. В ней приведены основные соотношения для расчета напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек.

В работе [2] авторами представлена модель и определяющие соотношения для связи между напряжениями и деформациями в однонаправленном композите с вязкоупругой матрицей и упругим волокном. Для описания вязкоупругих свойств матрицы использованы уравнения Вольтерра с ядрами ползучести в виде функций Миттаг-Леффлера. Разработана итерационная процедура определения эффективных параметров композита по известным механическим характеристикам волокна и матрицы.

На основе реологической модели Фойгта В.Г. Маликовым и Ю.М. Шашковым получены аналитические зависимости в матричной форме для оценки напряженно-деформированного состояния многослойного композиционного цилиндра при вязкоупругом поведении материала [3]. Показаны особенности применения полученных зависимостей при наличии цилиндрической ортотропии вязкоупругих свойств материалов композитного цилиндра.

В статье Б.Е. Победри [4] рассмотрены изотропная и структурно анизотропная среды, а также «простые» композиты. Для «сложных» композитов предложен метод канонических операторов. Описана возможность получения оценок точности решения квазистатических задач теории вязкоупругости.

В [5] С.Д. Акбаровым дан обзор исследований вязкоупругих композиционных материалов и элементов конструкций, проведенных с применением метода начальных несовершенств.

В работах А.А. Каминского, М.Ф. Селиванова [6, 7] рассмотрен эффективный метод для определения функции деформирования композита на основе дробно-экспоненциального представления функций деформирования материалов компонент. Функция деформирования представляется в виде функции некоторого оператора базового класса или их суммы. Представление в таком виде позволяет эффективно применять метод операторных цепных дробей. Для получения вязкоупругого решения был использован принцип Вольтерра.

Х. Альтенбахом, В.А. Федоровым исследовалась неустановившаяся ползучесть однонаправленного композита квадратного строения с упругими волокнами квадратного поперечного сечения [8, 9]. При этом была разработана структурная модель композита. Ползучесть матрицы описывалась законом Нортон. Получены две группы основных и разрешающих уравнений неустановившейся ползучести: статически и кинематически согласованных, стационарные решения которых позволяют получить формулы для второй стадии ползучести композита в виде, подобном формулам закона Нортон.

В работе [10] авторов В.П. Голуба, Ю.М. Кобзаря, П.В. Фернати рассмотрена линейность длительного вязкоупругого деформирования высокомолекулярных органических волокон. Функция влияния в определяющем уравнении линейной вязкоупругости задана степенным ядром типа ядра Абеля.

Описание напряженно-деформированного состояния композиционного материала методом конечных элементов (МКЭ) на основе наследственной теории Больцмана-Вольтерра представлено в работах [11, 12].

Также на МКЭ с применением метода Фурье основывается расчет оболочечных конструкций, приведенный в работе Фомичева Ю.И. [13].

При расчетах наиболее часто композиционный материал представляется в виде однородного анизотропного материала с упругими свойствами, зависящими от упругих свойств структурных компонентов и объемной доли каждого из них в композите. Для решения упругих задач механики композитов разработано значительное количество методик. Однако, часто эти методики неприменимы для расчета вязкоупругих композитов. В данной работе для расчета используется МКЭ как один из наиболее универсальных и эффективных методов с применением пространственно-временной аппроксимации.

Представим пространственно-временную аппроксимацию перемещений в виде

$$u_m(t) = u_m(t_{n-1}) N_{n-1}(t) + u_m(t_n) N_n(t), \quad (1)$$

где $u_m(t_{n-1})$, $u_m(t_n)$ – вектор перемещений в узлах t_{n-1} и t_n соответственно в пространственном направлении m , $N_{n-1}(t)$ и $N_n(t)$ – базисные функции, определяемые соотношениями:

$$N_{n-1}(t) = 1 - \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad N_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (2)$$

Тогда

$$u_m \llbracket \llbracket = u_m \llbracket_{n-1} \left(1 - \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right) + u_m \llbracket_n \left(\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right). \quad (3)$$

Чтобы получить матрицу жесткости конечного элемента для композиционного материала в условиях вязкоупругого деформирования рассмотрим вариацию упругой энергии деформирования для отдельного конечного элемента в момент времени t :

$$\delta \tilde{W} = \iiint_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (4)$$

где для описания вязкоупругих свойств композиционного материала воспользуемся тензором вязкоупругих напряжений в виде [14]:

$$\tilde{\sigma}^{ij} \llbracket \llbracket = H_0^{ijkl} \varepsilon_{kl} \llbracket \llbracket - \left(H_0^{ijkl} - H_\infty^{ijkl} \right) \int_0^t e^{-\tau} \varepsilon_{kl} \llbracket \llbracket d\tau, \quad (5)$$

где H_0^{ijkl} – мгновенный тензор упругих постоянных композиционного материала, H_∞^{ijkl} – длительный тензор упругих постоянных.

Для определения тензора деформаций конечного элемента представим перемещения $u_m \llbracket \llbracket$ в виде:

$$u_m \llbracket \llbracket = \sum_{s=1}^8 u_m^s \llbracket \llbracket (x_1^s, x_2^s, x_3^s) \llbracket \llbracket N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket = u_m^s \llbracket \llbracket N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket. \quad (6)$$

Тогда

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} \left(C_l^m \frac{\partial u_m \llbracket \llbracket}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial u_m \llbracket \llbracket}{\partial x_l} \right). \quad (7)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} u_m \llbracket \llbracket &= u_m^s \llbracket \llbracket_{n-1} \llbracket \llbracket N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket \left(1 - \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right) + u_m^s \llbracket \llbracket_n \llbracket \llbracket N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket \left(\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right) = \\ &= \left(u_m^s \llbracket \llbracket_{n-1} \llbracket \llbracket \left(1 - \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right) + u_m^s \llbracket \llbracket_n \llbracket \llbracket \left(\frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \right) \right) \cdot N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket = \\ &= u_m^s \llbracket \llbracket N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket, \end{aligned} \quad (8)$$

Получаем

$$\varepsilon_{kl}(t) = \frac{1}{2} u_m^s \llbracket \llbracket \left(C_l^m \frac{\partial N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s \llbracket \llbracket (x_1, x_2, x_3) \llbracket \llbracket}{\partial x_l} \right). \quad (9)$$

Подставляя (5) и (9) в (4), запишем следующие соотношения:

Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W} = & \iiint_V \left(H_0^{ijkl} \cdot \frac{1}{2} u_m^s \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) - \right. \\ & \left. \left(H_0^{ijkl} - H_\infty^{ijkl} \right) e^{-\leftarrow \tau} \frac{1}{2} u_m^s \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) d\tau \right) \times \\ & \times \delta \left(\frac{1}{2} u_m^s \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) \right) dV. \end{aligned} \quad (10)$$

Приняв следующие обозначения:

$$K = \frac{1}{4} \iiint_V \left(H_0^{ijkl} \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) \right) dV, \quad (11)$$

$$\Delta K = \frac{1}{4} \iiint_V \left(H_0^{ijkl} - H_\infty^{ijkl} \right) \left(C_l^m \frac{\partial N_s}{\partial x_k} + C_k^m \frac{\partial N_s}{\partial x_l} \right) \left(C_j^m \frac{\partial N_s}{\partial x_i} + C_i^m \frac{\partial N_s}{\partial x_j} \right) dV, \quad (12)$$

Получаем

$$\delta\tilde{W} = \left(K u_m^s \left(\int_0^t \Delta K u_m^s \left(e^{-\leftarrow \tau} \right) d\tau \right) \right) \delta u_m^s, \quad (13)$$

где матрицы K , ΔK находятся на основе моментной схемы аналогично работе [15].

Используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta\Pi = \delta\tilde{W} - \delta A, \quad (14)$$

где

$$\delta A = \int_S \left[P_m \cdot N_s \left(x_1, x_2, x_3 \right) u_m^s \right] \delta S \quad (15)$$

и обозначив

$$P = \int_S \left[P_m \cdot N_s \left(x_1, x_2, x_3 \right) \right] \delta S, \quad (16)$$

получаем систему разрешающих уравнений вида

$$K u_m^s \left(\int_0^t \Delta K u_m^s \left(e^{-\leftarrow \tau} \right) d\tau \right) = P. \quad (17)$$

Разобьем период времени от 0 до t на $n-1$ временной интервал, тогда уравнение (17) можно записать в виде

$$Ku_m^s \supseteq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta Ku_m^s \left(e^{-\epsilon \tau} \right) d\tau = P. \quad (18)$$

Возьмем разбиение на временные интервалы таким, чтобы оно совпадало с разбиением на временные конечные элементы. Пусть t принадлежит $n-1$ конечному элементу, т.е. $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ (а именно примем $t = t_n$), тогда перемещение аппроксимируются функцией (1):

$$K \left(u_m^s \left(e^{-\epsilon t} \right) \left(1 - \frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) + u_m^s \left(e^{-\epsilon t} \right) \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Delta K \left(u_m^s \left(e^{-\epsilon \tau} \right) \left(1 - \frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) + u_m^s \left(e^{-\epsilon \tau} \right) \left(\frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) e^{-\epsilon \tau} d\tau = P, \quad (19)$$

или

$$Ku_m^s \supseteq \Delta K \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(u_m^s \left(e^{-\epsilon \tau} \right) \left(\frac{t_{i+1} - \tau}{t_{i+1} - t_i} \right) + u_m^s \left(e^{-\epsilon \tau} \right) \left(\frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \right) e^{-\epsilon \tau} d\tau = P. \quad (20)$$

После математических преобразований получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{K} u_m^s \supseteq P + \sum_{i=1}^{n-2} Q_i + \tilde{Q}_{n-1}, \quad (21)$$

где P – вектор внешних нагрузок,

$$\tilde{K} = K - \Delta K \left(1 - \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left(e^{-\epsilon t_{n-1} - t_n} \right) \right) \quad (22)$$

– матрица жесткости вязкоупругого материала в момент времени t ,

$$Q_i = \Delta K \left(u_m^s \left(e^{-\epsilon t} \right) \left(\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_{n-1} - t_n} \right) e^{t_i - t_n} \right) + u_m^s \left(e^{-\epsilon t} \right) \left(e^{t_{i+1} - t_n} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{t_{i+1} - t_n} - e^{t_i - t_n} \right) \right) \right) \quad (23)$$

– вектор дополнительной нагрузки, обусловленный влиянием i -го временного конечного элемента,

$$\tilde{Q}_{n-1} = \Delta K u_m^s \left(\frac{1}{t_n - t_{n-1}} \left(-e^{t_{n-1} - t_n} \right) e^{t_{n-1} - t_n} \right) \quad (24)$$

– вектор дополнительной нагрузки, обусловленный влиянием $n-1$ -го временно-конечного элемента.

Описанная методика реализована в рамках программного комплекса «МИРЕЛА+» [16], с помощью которого решены следующие задачи.

Определено напряженно-деформированное состояние консольной резиновой пластины, армированной волокнами в плоскости z_2Oz_3 , под действием растягивающей нагрузки (рис.1). Размеры плиты: ширина – $a=0,2$ м, длина – $b=0,2$ м, толщина $h=0,03$ м. Физические постоянные волокон $E_C^0=10^9$ Па, $\mu_C^0=0,3$, $E_C^\infty=10^9$ Па, $\mu_C^\infty=0,3$ и матрицы $E_R^0=10^7$ Па, $\mu_R^0=0,49$, $E_R^\infty=0,5 \cdot 10^7$ Па, $\mu_R^\infty=0,49$. Диаметр волокон $d_C=3 \cdot 10^{-4}$, частота армирования $i_C=15000$ волокон/м. Растягивающая нагрузка равна $\sigma=10^4$ Па.

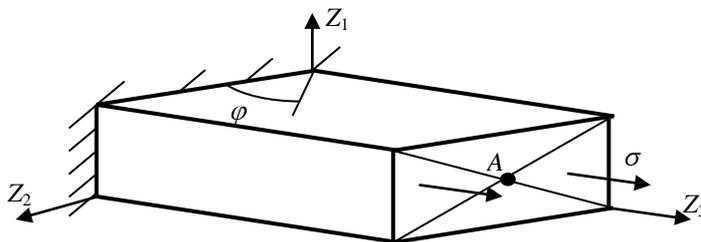


Рис.1. Консольная пластина под действием растягивающей нагрузки.

Расчет проводился для различных углов армирования φ . Распределение упругих и вязкоупругих (при времени $t=10$ с) напряжений показано на рис.2. На рис.3 представлен график максимальных перемещений центральной точки A свободного края пластины в зависимости от времени.

Напряжения σ_{33} в закреплении несколько выше на краях пластины, а минимальное значение принимают приблизительно посередине пластины. При малых углах армирования упругие и вязкоупругие напряжения различаются незначительно, при этом вязкоупругие напряжения несколько больше упругих. При увеличении угла армирования вязкоупругие напряжения становятся значительно ниже упругих, хотя характер распределения изменяется незначительно.

Кроме того, определено напряженно-деформированное состояние ортотропной цилиндрической оболочки, нагруженной радиальной сосредоточенной силой (рис.4). Цилиндрическая оболочка выполнена из резины 2959 с физическими величинами: $E_R^0=5,28 \cdot 10^6$ Па, $E_R^\infty=2,22 \cdot 10^6$ Па, $\nu_R=0,49$ и полиамидного корда 23КНТС: $E_C=1277,5 \cdot 10^6$ Па, $G_C=490 \cdot 10^6$ Па. Диаметр волокон: $d_C=0,7 \cdot 10^{-3}$ м, частота армирования: $i_C=1100$ нитей/м. Радиус оболочки: $R=0,112$ м, относительная толщина: $h/R=0,03156$, длина образующей: $L=2,37R$. Оболочка свободно оперта по торцам и нагружена посередине пролета радиальной сосредоточенной силой: $P=98$ Н.

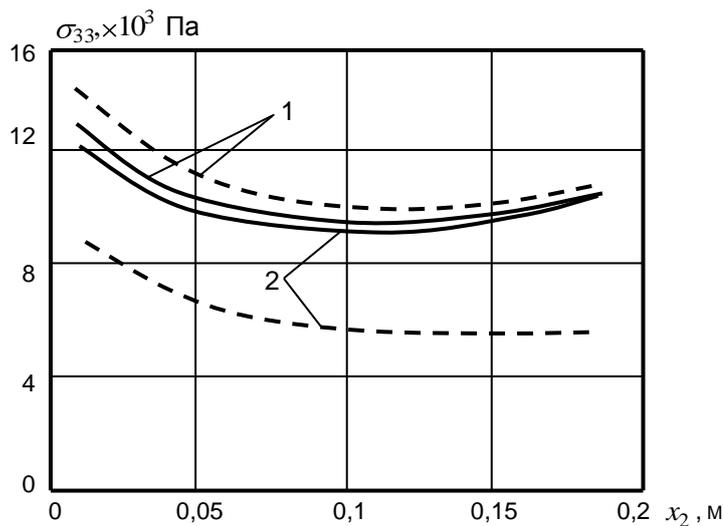


Рис.2. Распределение напряжений σ_{33} по ширине пластины в закреплении (— — упругих, ---- вязкоупругих): 1 — $\varphi = 30^\circ$; 2 — $\varphi = 60^\circ$.

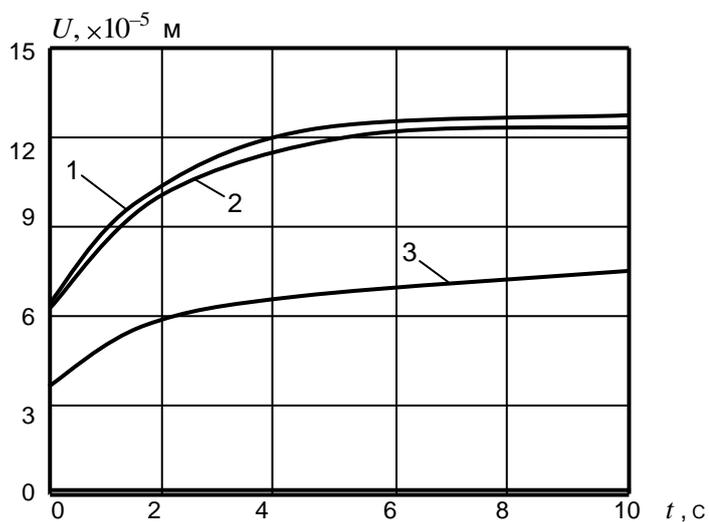


Рис.3. Распределение максимальных перемещений центральной точки A свободного края пластины: 1 — $\varphi = 0^\circ$; 2 — $\varphi = 30^\circ$; 3 — $\varphi = 60^\circ$.

На рис.5 приведены результаты численного исследования распределения прогиба по образующей цилиндра.

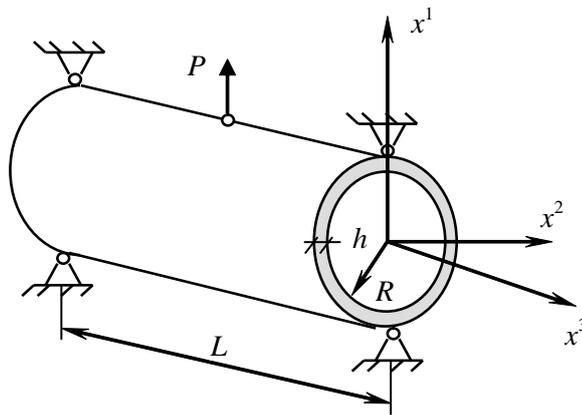


Рис.4. Расчетная схема цилиндрической оболочки, нагруженной сосредоточенной силой

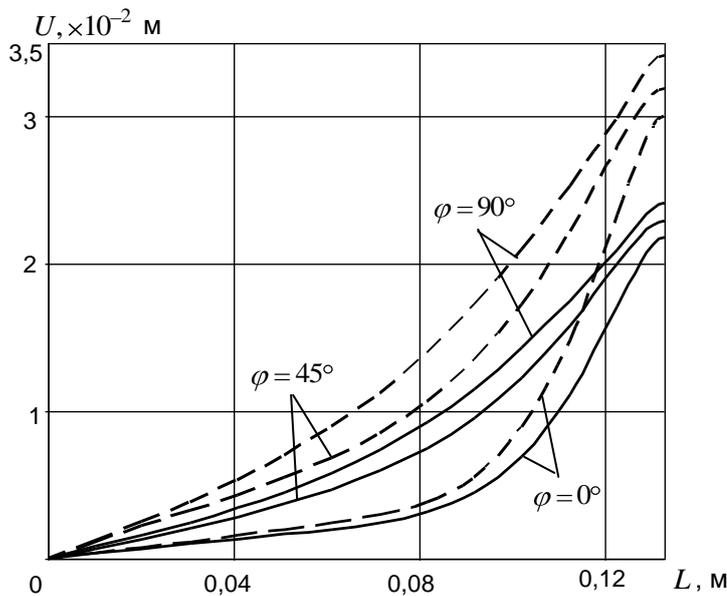


Рис. 5. Распределение прогиба по образующей цилиндрической оболочки при разных углах армирования φ :
 — — — — упругое решение, - - - - вязкоупругое решение.

Выводы. Из полученных результатов можно заметить, что перемещения свободного края пластины с течением времени значительно возрастают. Максимальная величина перемещений, как упругих, так и вязкоупругих, наблюдается при угле армирования 0° , а с увеличением угла уменьшается, что объясняется тем, что начинают работать волокна, модуль упругости которых значительно выше модуля упругости матрицы. По результатам расчета цилиндрической оболочки видно, что вязкоупругое решение также значительно отличается от упругого, особенно при продольном расположении волокон. Перемещения нарастают с приближением к точке приложения силы, увеличение составляет до 40%.

Список литературы

1. Канович, М.З. Сопrotивление композиционных материалов [Текст] / М.З. Канович, Н.Н. Трофимов. – М.: Мир, 2004. – 504 с.
2. Klasztorny, M. Constitutive equations of viscoelasticity and estimation of viscoelastic parameters of unidirectional fibrous polymeric composites [Текст] / M. KLASZTORNY, A.P. WILSZYNSKI // J. Compos. Mater. – 2000. – V. 34, № 19. – P. 1624–1639.
3. Маликов, В.Г. Напряженно-деформированное состояние многослойного композиционного цилиндра при вязкоупругом поведении материала [Текст] / В.Г. Маликов, Ю.М. Шашков // Пробл. машиностр. и надеж. машин. – 2002. – № 2. – С. 42–45.
4. Победря, Б.Е. Методы аппроксимации в теории вязкоупругости [Текст] / Б.Е. Победря // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. н. – 2000. – № 3. – С. 124–126.
5. Akbarov, S.D. Three-dimensional stability loss problems of the viscoelastic composite materials and structural members = Трехмерные задачи потери устойчивости композитных материалов и элементов конструкций [Текст] / S.D. Akbarov // Прикладная механика. – 2007. – V. 43, № 10. – С. 3–27.
6. Каминский, А.А. Об одном методе определения характеристик вязкоупругого деформирования композитов [Текст] / А.А. Каминский, М.Ф. Селиванов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 9–21.
7. Каминский, А.А. Об одном подходе к определению характеристик деформирования вязкоупругих материалов [Текст] / А.А. Каминский, М.Ф. Селиванов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 41–50.
8. Федоров, В.А. Структурные модели упругости и ползучести однонаправленного композита при поперечном сдвиге [Текст] / В.А. Федоров // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007 – Т. 13, № 4 – С. 441–451.
9. Альтенбах, Х. Структурные модели упругости и ползучести однонаправленного композита при продольном сдвиге [Текст] / Х. Альтенбах, В.А. Федоров // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 4. – С. 437–448.
10. Голуб, В.П. К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении [Текст] / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 97–106.
11. Киричевский, В.В. Вязкоупругое деформирование конструкций из композиционного материала [Текст] / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2003. – № 12 (70). – С. 226–231.
12. Киричевский, В.В. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования [Текст] / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, В.А. Толоч // Труды двенадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинордных композитов». – Изд-во НИИШП, Москва, 15–19.10.2001, Т. 1. – 2001. – С. 147–151.
13. Фомичев, Ю.И. Напряженно-деформированное состояние многослойных ортотропных оболочечных конструкций в проблеме расчета резинордных композитов и шин [Текст] / Ю.И. Фомичев // VIII симпозиум «Проблемы шин и резинордных композитов. Дорога, шина, автомобиль». – Т. 2. – Москва: НИИ шинной промышленности. – 1997. – С. 418–423.
14. Киричевский, В.В. Матрица жесткости пространственного конечного элемента для исследования конструкций из композиционных материалов [Текст] / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, А.Д. Карпушин // Весник Восточноукр. гос. ун-та. – 1999. – № 3(18). – С. 109–116.
15. Нарусберг, В.Л. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов [Текст] / В.Л. Нарусберг, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1988. – 299 с.
16. Киричевский, В.В. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «MIRELA+» [Текст] / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. – К.: Наук. думка, 2005. – 392 с.