

УДК 539.3

Т. І. Левицька, Я. В. Чумаченко

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗАМКНЕНОЇ СКЛАДЕНОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ, ЯКА ЗНАХОДИТЬСЯ ПІД ДІЄЮ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА ТЕМПЕРАТУРИ

Розглядається побудова схеми розрахунку напруженого стану спряжених оболонок, які знаходяться під дією силового навантаження та температурного поля. При цьому використовується метод суперелементів, для якого матриця жорсткості та вектор сил знаходяться при розв'язанні системи диференціальних рівнянь з використанням метода Годунова, що дає можливість розглядати достатньо протяжні окремі секції складених оболонок. Розглянуто приклад розрахунку оболонки, яка складається з конічної, сферичної та циліндричної оболонок з силовим навантаженням і двома варіантами розподілу температур по товщині.

Замкнені оболонки обертання являють собою важливі конструкційні елементи, які використовуються в техніці. Розрахунок її пружного стану для оболонок складеної форми, які знаходяться під дією температури є досить складною задачею [1]. Для складених оболонок обертання задача знаходження пружного стану ускладнюється внаслідок того, що доводиться проводити спряження розв'язків для окремих секцій, які можуть бути досить протяжними.

Для розрахунку напружено-деформованого стану замкненої оболонки обертання при осесиметричному навантаженні будемо використовувати систему диференціальних рівнянь [2]:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(rN_S) - \sin \varphi N_\theta - \frac{r}{R_S} Q_S + r q_S = 0, \\ \frac{d}{ds}(rQ_S) + \frac{r}{R_S} N_S + \cos \varphi N_\theta - r q_S = 0, \\ \frac{d}{ds}(rM_S) - \sin \varphi M_\theta + r Q_S = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} D_N &= D_N(\varepsilon_S + \nu \varepsilon_\theta - (1 + \nu) \varepsilon_T), \\ N_\theta &= D_N(\nu \varepsilon_S + \varepsilon_\theta - (1 + \nu) \varepsilon_T), \\ M_S &= D_M(\chi_S + \nu \chi_\theta - (1 + \nu) \chi_T), \\ M_\theta &= D_M(\nu \chi_S + \chi_\theta - (1 + \nu) \chi_T), \\ D_N &= Eh / (1 - \nu^2), \quad D_M = Eh^3 / (12 \cdot (1 - \nu^2)), \\ \varepsilon_S &= \frac{dU}{ds} + \frac{W}{R_S}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sin \varphi}{r} U + \frac{\cos \varphi}{r} W, \\ \chi_S &= \frac{d\theta_S}{ds}, \quad \chi_\theta = \frac{\sin \varphi}{r} \theta_S, \quad \theta_S = -\frac{dW}{ds} + \frac{U}{R_S}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha T d\zeta, \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \alpha_T T \zeta d\zeta. \quad (2)$$

В цих формулах N_S, N_θ – тангенціальні зусилля, Q_S – перерізує зусилля, M_S, M_θ – згинальні моменти, U, W – переміщення, θ_S – кут повороту нормалі, q_S, q_ζ – тангенціальна та нормальна складові поверхневого навантаження. E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, h – товщина оболонки, R_S – радіус кривини меридіанної лінії. α – температурний коефіцієнт лінійного розширення. Який будемо вважати сталим для одного суперелемента. Прийmemo також, що для нього розподіл температур по товщині має квадратичну залежність, причому $T|_{\zeta=-\frac{h}{2}} = T_0, T|_{\zeta=0} = T_1, T|_{\zeta=\frac{h}{2}} = T_2$.

З урахуванням зроблених припущень величини ε_T, χ_T для одного суперелемента будуть знаходитися за формулами

$$\varepsilon_T = \frac{\alpha}{6}(T_0 + 4T_1 + T_2), \quad \chi_T = \frac{\alpha}{6}(T_2 - T_0). \quad (3)$$

Додатні напрямки переміщень та зусиль наведені на рис. 1.

Серединна поверхня оболонки утворена обертанням лінії, рівняння якої буде задаватися в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Тоді диференціальний оператор $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \cdot \frac{d}{dt}$. При цьому необхідно врахувати, що $r(t) = y(t)$.

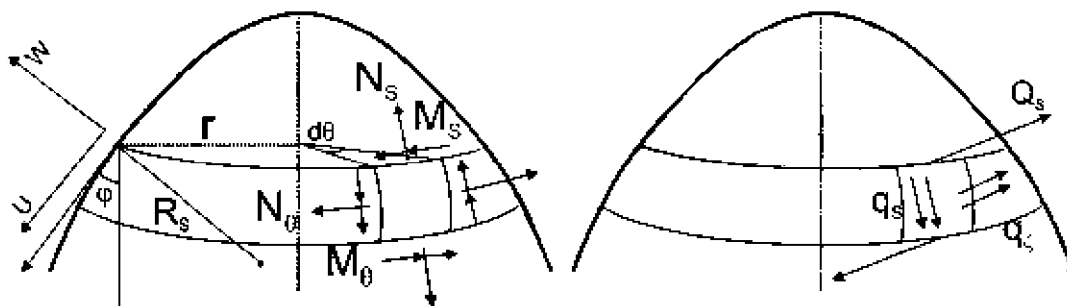


Рис. 1. Додатні напрямки зусиль та переміщень

Функції $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$, що входять в рівняння (1)-(2) будуть обчислюватися за формулами:

$$\sin \varphi = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \quad \cos \varphi = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \quad (4)$$

Тут φ – кут нахилу дотичної до осі обертання (рис. 1).

Радіус кривини R_S лінії обертання визначається виразом

$$R_S = -\frac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}. \quad (5)$$

Величини $\frac{dr}{ds}$, $\frac{d(\cos \varphi)}{ds}$ та $\frac{d(\sin \varphi)}{ds}$, що входять в рівняння, знаходяться таким чином

$$\frac{dr}{ds} = \sin \varphi \frac{d(\cos \varphi)}{ds} = -\sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \sin \varphi \cdot \frac{1}{R_S};$$

$$\frac{d(\sin \varphi)}{ds} = \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\cos \varphi \cdot \frac{1}{R_S}. \quad (6)$$

З використанням цих операцій рівняння рівноваги (1) переписуться у вигляді

$$\begin{cases} \sin \varphi \cdot N_S + r \cdot \frac{dN_S}{ds} - \sin \varphi N_\theta - \frac{r}{R_S} Q_S + r q_S = 0, \\ \sin \varphi \cdot Q_S + r \cdot \frac{dQ_S}{ds} + \frac{r}{R_S} N_S + \cos \varphi N_\theta - r q_\zeta = 0, \\ \sin \varphi \cdot M_S + r \cdot \frac{dM_S}{ds} - \sin \varphi M_\theta + r Q_S = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При введенні невідомих $y_1 = N_S$, $y_2 = Q_S$, $y_3 = M_S$, $y_4 = U$, $y_5 = W$, $y_6 = -\theta_S$ система (1) приводиться до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій, яка в матричній формі має вигляд

де $B = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$, $A(t) = |a_{ij}(t)|$ – лінійний оператор системи (7), елементи якої мають наступні значення: $a_{11} = a_{33} = -\frac{\sin \varphi}{r}(1 - \nu)$, $a_{12} = a_{54} = \frac{1}{R_S}$,

$$a_{14} = \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2),$$

$$a_{15} = -a_{24} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2),$$

$$a_{21} = a_{45} = -\frac{1}{R_S} - \frac{\nu \cos \varphi}{r}, \quad a_{22} = -\frac{\sin \varphi}{r},$$

$$a_{25} = -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} D_N (1 - \nu^2), \quad a_{32} = -1,$$

$$a_{36} = -\frac{\sin^2 \varphi}{r^2} D_M (1 - \nu^2), \quad a_{41} = \frac{1}{D_N},$$

$$a_{44} = a_{66} = -\nu \frac{\sin \varphi}{r}, \quad a_{56} = 1, \quad a_{63} = -\frac{1}{D_M};$$

$$a_{13} = a_{16} = a_{23} = a_{26} = a_{31} = a_{34} = a_{35} = a_{42} = a_{43} = a_{46} = a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{55} = a_{61} = a_{62} = a_{64} = a_{65} = 0; \quad q^T = (q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6),$$

$$q_1 = -q_S - \frac{\sin \varphi}{r} D_N (1 - \nu^2) \varepsilon_T,$$

$$q_2 = q_\zeta + D_N \frac{\cos \varphi}{r} (1 - \nu^2) \varepsilon_T,$$

$$q_3 = -D_M \frac{\sin \varphi}{r} (1 - \nu^2) \chi_T, \quad q_4 = (1 + \nu) \varepsilon_T,$$

$$q_5 = 0, \quad q_6 = -(1 + \nu) \chi_T.$$

Для розрахунку напружено-деформованого стану складної оболонки застосуємо метод, що використовує суперелементи, локальні матриці жорсткостей яких знаходяться розв'язанням систем ди-

ференціальних рівнянь методом Годунова, що має підвищену точність рішення [3]. Суть цього методу полягає в ортогоналізації проміжних рішень, що дозволяє знаходити локальні матриці жорсткостей для суперелементів, які являють собою достатньо довгі ділянки оболонок обертання.

При побудові локальної матриці жорсткості використовуємо таку послідовність кроків.

Для заповнення локальної матриці жорсткості суперелементів слід вирішити послідовність крайових двоточкових задач для однорідної системи

$$\frac{1}{B} \frac{dy}{dt} = Ay; \quad (9)$$

$$\begin{matrix} y_4(t_0) = 1 & y_4(t_0) = 0 & y_4(t_0) = 0 \\ y_5(t_0) = 0 & y_5(t_0) = 1 & y_5(t_0) = 0 \\ 1) y_6(t_0) = 0, & 2) y_6(t_0) = 0, & 3) \dots, & 6) y_6(t_0) = 0 \\ y_4(t_1) = 0, & y_4(t_1) = 0, & & y_4(t_1) = 0 \\ y_5(t_1) = 0 & y_5(t_1) = 0 & & y_5(t_1) = 0 \\ y_6(t_1) = 0 & y_6(t_1) = 0 & & y_6(t_1) = 1 \end{matrix} \quad (10)$$

Тоді перший стовпець локальної матриці жорсткості $K^{(e)}$ заповниться як вектор рішень для 1-го варіанту умов, другий – для варіанту 2, ..., шостий стовпець буде відповідати 6-му варіанту з (10).

Рішенням неоднорідної задачі (8) при нульових граничних умовах $y_4(t_0) = 0, y_5(t_0) = 0, y_6(t_0) = 0, y_4(t_1) = 0, y_5(t_1) = 0, y_6(t_1) = 0$ знаходиться вектор зусиль, діючих на лівому та на правому краях у локальній системі координат цих країв, що буде мати вигляд

$$f^{(e)} = (f_1^{(e)} \quad f_2^{(e)} \quad f_3^{(e)} \quad f_4^{(e)} \quad f_5^{(e)} \quad f_6^{(e)})^T. \quad (11)$$

Для формування глобальної матриці жорсткості та векторів силових навантажень слід побудувати локальні матриці жорсткості та зусиль у вузлах для глобальної системи координат. Це перетворення буде здійснюватися по формулам

$$\overline{K}^{(e)} = T^T \cdot K^{(e)} \cdot T \cdot \theta, \quad \overline{f}^{(e)} = -T^T \cdot f^{(e)} \cdot \theta, \quad (12)$$

$$\text{де } T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & & & & \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & \\ & & & 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$0 = 2\pi \begin{pmatrix} -R_0 & & & & & \\ & R_0 & & & & \\ & & R_0 & & & \\ & & & R_1 & & \\ & 0 & & & -R_1 & \\ & & & & & -R_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тут $\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, \cos \varphi_1, \sin \varphi_1, R_0 = y(t_0), R_1 = y(t_1)$ – величини, знайдені за формулами (4), (5) для початкового та кінцевого вузлів суперелемента, матриця θ з'являється внаслідок урахування реакцій суперелемента на кінцях.

Розв'язувальна система лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження переміщень в місцях стику оболонкових суперелементів буде мати вигляд

$$K \cdot \overline{\delta} = \overline{f}, \quad (14)$$

де $K = \sum_e \overline{K}^{(e)}$ – глобальна матриця жорсткості,

$\overline{f} = \sum_e \overline{f}^{(e)}$ – глобальний вектор зусиль,

$\overline{\delta}^T = (\overline{U}_1, \overline{W}_1, -0_{s1}, \dots, \overline{U}_k, \overline{W}_k, -0_{sk})$ – глобальні

переміщення точок в місцях стику. Знак \sum_e позначає процес ансамблювання, що використовується в методі скінчених елементів.

Внаслідок симетрії локальних матриць жорсткостей глобальна матриця також буде симетрична, її можна записати як стрічкову матрицю і для вирішення (14) використовувати матричні операції із стрічковими матрицями. Оскільки отримана матриця жорсткості в глобальній системі координат, то зручно задавати переміщення, паралельні осям координат θx та θy .

Завдання переміщень та кутів повороту у відповідних вузлах дозволяє отримати єдиний розв'язок. Після вирішення, в місцях стику суперелементів будемо мати переміщення в глобальній системі координат.

Для знаходження напруженого стану суперелемента, з глобального рішення $\overline{\delta}$ вибираються переміщення на його кінцях $\overline{\delta}^{(e)}$ і після цього вони перераховуються в переміщення в локальній системі координат

$$\delta^{(e)} = T \cdot \overline{\delta}^{(e)}. \quad (15)$$

$$\begin{matrix} y_4(t_0) = \delta_1^{(e)}, & y_5(t_0) = \delta_2^{(e)}, & y_6(t_0) = \delta_3^{(e)}, \\ y_4(t_1) = \delta_4^{(e)}, & y_5(t_1) = \delta_5^{(e)}, & y_6(t_1) = \delta_6^{(e)}, \end{matrix} \quad (16)$$

де $\delta_1^{(e)}, \dots, \delta_6^{(e)}$ – елементи матриці $\delta^{(e)}$.

Запропонована схема була програмно реалізована на персональному комп'ютері.

Розглянемо складену оболонку обертання форма перерізу якої площиною, що проходить через вісь симетрії, зображена на рисунку 2. На торцях оболонка жорстко зашлемлена.

Рівняння ліній для I, II, III секцій мають вигляд:

I: $x = 0,6t - 0,8$, $y = -0,1t + 0,3$, t змінюється від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$;

II: $x = 0,283 \cos t$, $y = 0,283 \sin t$, t змінюється від $t_1 = 2,3562$ до $t_2 = 0,7854$;

III: $x = 0,2t + 0,2$, $y = 0,2$, t змінюється від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$.

Товщини секцій мають значення $h_I = h_{II} = h_{III} = 0,02$ м. Модулі Юнга та коефіцієнти лінійного розширення мають значення

$$E_I = E_{III} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad E_{II} = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

$$\alpha_I = \alpha_{III} = 0,11 \cdot 10^{-4} 1/\text{град},$$

$$\alpha_{II} = 0,166 \cdot 10^{-4} 1/\text{град}.$$

Коефіцієнт Пуассона приймемо однаковим для всіх секцій $\nu_I = \nu_{II} = \nu_{III} = 0,3$. Поверхневе навантаження нормальне до поверхні обертання для всіх секцій і

приймає значення $q_S = 0$, $q_C = 5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$. Для

оболонки із заданими параметрами були обчислені переміщення точок серединної поверхні, тангенціальні та перерізуючі зусилля та згинальні моменти. На графіках (рис. 3, 4) наведені результати для розподілу температур по товщині

$T_0 = 400^\circ$, $T_1 = 100^\circ$, $T_2 = 50^\circ$ (неперервна лінія) і для розподілу температур

$T_0 = 50^\circ$, $T_1 = 50^\circ$, $T_2 = 50^\circ$ (лінія з позначками +).

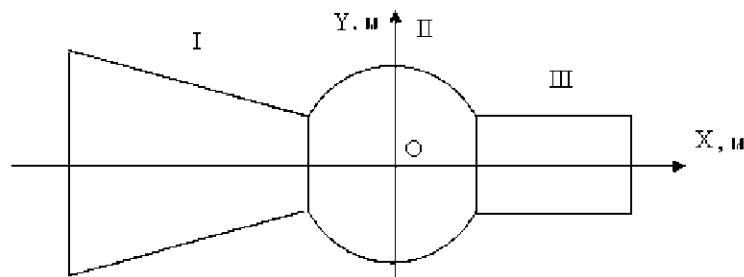


Рис. 2. Складена оболонка обертання

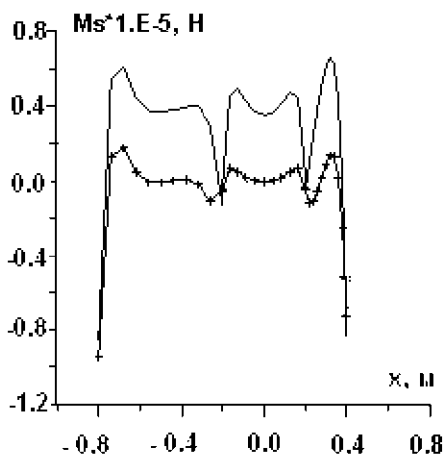


Рис. 3. Тангенціальний момент M_S

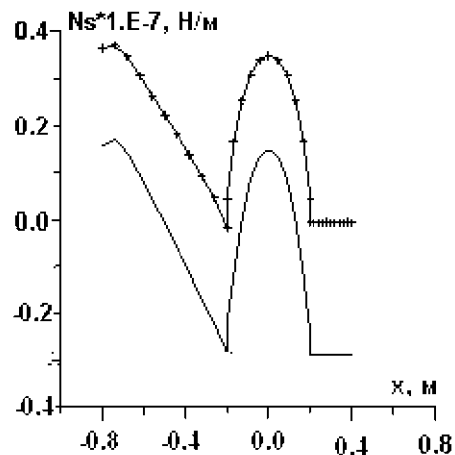


Рис. 4. Тангенціальне зусилля N_S

Як видно з рисунків, найбільш збурюючий фактор пружного стану – це точки на поверхні, для яких в середніх лініях є точки з різкою зміною геометрії. Також достатньо впливово діє температурний фактор при переході з однорідного розподілу температури по товщині оболонки до неоднорідного. Таким чином видно, що для аналізу термопружного стану оболонки потрібні досить докладні картини для зусиль, що забезпечує метод суперелементів.

Перелік посилань

1. Дослідження поведінки циліндричної оболонки зі зломом при нагріві. Халко Б./ Математичні проблеми механіки неоднорідних структур /Т. 1/ Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН України. – Львів, 2000.
2. Термоупругость. Коваленко А.Д. – К.: «Вища школа», 1975. – 216 с.
3. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Григоренко Я.М. – К.: «Наукова думка», 1973. – 228 с.

Поступила в редакцию 12.05.2008

Рассматривается построение схемы расчета напряженного состояния составных оболочек, которые находятся под действием силовой нагрузки и температурного поля. При этом используется метод суперэлементов, для которого матрица жесткости и вектор сил находятся при решении системы дифференциальных уравнений с использованием метода Годунова, что дает возможность рассматривать достаточно протяженные отдельные секции сопряженных оболочек. Рассмотрен пример расчета оболочки, состоящей из конической, сферической и цилиндрической оболочек, с силовой нагрузкой и двумя вариантами распределения температур по толщине.

The construction of the circuit of account of the intense condition of compound environments is considered which are under action of force loading and temperature field. Thus the method of superelements is used, for which matrix of rigidity and vector of forces are at the decision of system of the differential equations with use of a Godunov's method, which enables to consider extended enough separate of section of the connected shells. The example of account of a shell is considered which consists of conic, spherical and cylindrical shells with force loading, and two variants of distribution of temperatures on thickness.