

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛИ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВРАЩАЮЩИМСЯ ИНСТРУМЕНТОМ

MODELING OF CONSOLE OSCILLATIONS IN CASE OF FORCING BY ROTATING TOOL

Д.И. Анпилогов

Запорожский национальный технический университет, Украина

D.I. Anpilogov

Zaporizhzhya National Technical University, Ukraine

Abstract

In this paper, a model of oscillations of semi-fixed workpiece in case of forcing by rotating tool is constructed. Two branches of the analytical solutions of the motion equation are conjugate to a smooth function with the loss of workpiece-tool contact, and to a continuous function when it appears.

Keywords: dynamics of a material point, smooth function, conjugation of solutions, mechanical oscillations.

ВВЕДЕНИЕ

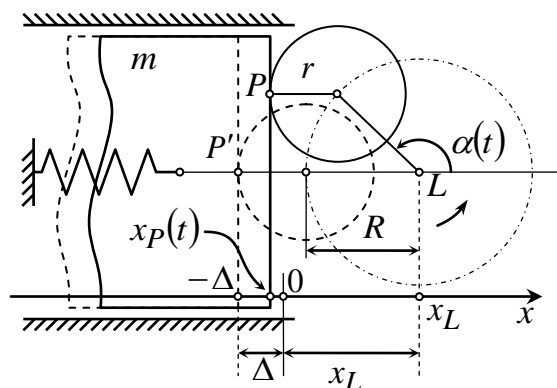
При механической обработке деталей возникают малые колебания как самих деталей, так и обрабатывающего инструмента (резцы, сверла и т.д.) [1]. Изучение этих колебаний оказывается актуальным при конструировании станков с высокой точностью обработки. Работа посвящена построению математической модели таких колебаний.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Постановка задачи. Рассматривается случай, когда инструмент представляет собой ролик с закреплённым на его боковой поверхности шариком радиуса r , немного выступающим за габариты ролика (фиг. 1). Центр шарика вращается по окружности радиуса R (можно считать, что это и есть радиус ролика) с центром в точке L с абсциссой x_L . Угловая скорость ролика $\omega = 2\pi\nu$.

Деталь закреплена консольно и подвергается боковым ударам шарика. Деталь близка по форме к широкой прямоугольной пластине, и удары приходятся на широкую сторону сечения.

Поэтому ограничимся одной степенью свободы, считая возможными изгибные колебания детали только вдоль узкой стороны. Изгибную жёсткость пластины смоделируем наличием пружины жёсткостью C , а поступательную степень свободы – наличием направляющих, вдоль которых движется тело массой m . Эта масса моделирует инерционные свойства пластины при изгибных колебаниях. Требуется построить уравнение движения тела.



Фиг. 1. Геометрия системы

2. Кинематика системы. Положение системы, показанное сплошной линией – произвольное текущее положение при

наличии контакта шарика и тела. Положение точки P контакта шарика и тела в момент t определяется углом $\alpha(t) = \alpha_0 + 2\pi t$ (см. фиг. 1). Наименьшая абсцисса точки P достигается при угле $\alpha = \pi$ и соответствует предварительному натягу Δ . Так названа степень сжатия пружины при максимальном надавливании шарика. Она отмеряется влево от положения $x=0$ и настраивается перед запуском вращения при закреплении детали. Точка P при этом занимает положение P' , а конфигурация системы показана штриховой линией. Очевидно, при этом $x_L + \Delta = R + r$. Тогда абсцисса точки P равна $x_P = x_L + R \cos \alpha - r$,

$$x_P = R + R \cos(\alpha_0 + 2\pi t) - \Delta \quad (1)$$

и не зависит от r .

3. Динамика системы. Для моментов времени, когда контакт тела и шарика имеется, на тело действует сила F давления со стороны шарика. Пусть трения при надавливании нет. Тогда эта сила направлена против оси Ox . Уравнение второго закона Ньютона для тела с учётом сил упругой, сопротивления и давления шарика имеет вид $m\ddot{x} = -Cx - K\dot{x}' - F$ (K – коэффициент демпфирования). Обозначая $\omega_0^2 = \frac{C}{m}$, $\beta = \frac{K}{2m}$, $f = \frac{F}{m}$, получаем:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x}' + \omega_0^2 x = -f. \quad (2)$$

Трудности решения этого уравнения таковы. Правая часть присутствует, и она переменна и неизвестна. Неизвестны даже моменты времени, когда она возникает и исчезает, т.е. моменты, когда шарик начинает и прекращает давить на тело. Эти трудности можно преодолеть, сопрягая отдельные аналитические ветви решения методом припасовывания [2].

Известно следующее.

1) Если контакта шарика и тела нет, то $f = 0$ и общее решение (2) есть

$$x = x_{ocs}(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t). \quad (3)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

2) Если контакт шарика и тела есть, то $f \neq 0$. Зависимость $f(t)$ пока неизвестна, но она такова, что контакт сохраняется. Следовательно, движение тела совпадает с движением точки P . Иначе, при наличии контакта сила $f(t)$ такова, что функция (1)

$$x = x_{rot}(t) = R + R \cos(\alpha_0 + 2\pi t) - \Delta \quad (1a)$$

является решением уравнения (2). Здесь принято, что инструмент (рол с шариком) является бесконечно жёстким, и контакт не меняет характер его движения (шарик движется предустановленным образом независимо от наличия контакта). Теперь проблема заключается в том, чтобы решения $x_{ocs}(t)$ и $x_{rot}(t)$ сопрячь в единое целое, т.е. организовать переход от $x_{rot}(t)$ к $x_{ocs}(t)$ в момент потери контакта и обратный переход в момент его появления.

4. Сопряжение решений при потере контакта. Пусть контакт шарика и тела утрачивается в момент t^* . Естественно положить

$$\begin{cases} x_{osc}(t^*) = x_{rot}(t^*) \\ x'_{osc}(t^*) = x'_{rot}(t^*) \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя сюда (3) и (1a), получаем линейную систему для нахождения параметров A и B . Этим самым из общего решения (3) будет выделено такое частное решение, которое сопрягается с предшествующей ему вращательной компонентной $x_{rot}(t)$ до функции, гладкой в точке t^* . Можно даже доказать, что при выполнении системы (4) выполняется также соотношение $x''_{osc}(t^*) = x''_{rot}(t^*)$.

Определим момент t^* . Если выражение для силы f , получаемое из (2), принимает положительное значение, то предположение о направлении этой силы сделано правильно. Если же окажется, что $f < 0$, то направление силы потребуется

изменить на противоположное. Тогда шарик притягивал бы тело, а не отталкивал его, чего не может быть. Иначе, выражение для f остаётся правильным лишь до тех пор, пока оно положительно. Поэтому моментом t^* отрыва тела от шарика будем считать такой момент, начиная с которого выполняется неравенство $f \leq 0$.

Вплоть до отрыва (1а) есть решение (2). Дифференцируя (1а) и подставляя в (2), можно получить:

$$\frac{f}{R} = (4\pi^2 v^2 - \omega_0^2) \cos \psi + 4\pi\beta v \sin \psi - \omega_0^2 (1 - \delta).$$

Здесь обозначено $\psi(t) = \alpha_0 + 2\pi t$, $\delta = \frac{\Delta}{R}$.

Тогда t^* есть корень уравнения

$$(4\pi^2 v^2 - \omega_0^2) \cos \psi + 4\pi\beta v \sin \psi = \omega_0^2 (1 - \delta).$$

С точностью до $2k\pi$, $k \in Z$, методом введения дополнительного угла отсюда можно получить только два разных решения. Если в момент отрыва угол α лежит в первой или второй четверти, то следует выбрать то из них, для которого $x'_{osc}(t^*) = x'_{rot}(t^*) < 0$, поскольку после отрыва от шарика тело продолжает двигаться против оси Ox . Если же в момент отрыва угол α лежит в третьей или четвертой четверти, то следует выбрать то решение, для которого $x'_{osc}(t^*) = x'_{rot}(t^*) > 0$, поскольку после отрыва от шарика тело продолжает двигаться вдоль оси Ox .

5. Сопряжение решений при появлении контакта. Определим момент появления контакта. Пусть до появления контакта правый (по рисунку) край тела движется по закону

$$x_1(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t),$$

где числа A , B известны из рассмотрения утраты предыдущего контакта.

Пусть точка P , которой шарик вступит в контакт, движется по закону

$$x_2(t) = R + R \cos(\alpha_0 + 2\pi t) - \Delta.$$

Контакт возникает при попытке нарушения неравенства $x_1 < x_2$ (выполнение неравенства $x_1 > x_2$ означает взаимное проникновение шарика и тела друг внутрь друга). Следовательно, момент появления контакта есть решение уравнения

$$x_1(t) = x_2(t). \quad (5)$$

Это уравнение является трансцендентным, и построение его аналитического решения невозможно. Однако, несложно его решить численно методом половинного деления.

Заметим, выполнение уравнения (5) обеспечивает непрерывность уравнения движения, возникающего при сопряжении компонент x_1 и x_2 , однако гладкостью сопряжённое решение, вообще говоря, уже не обладает.

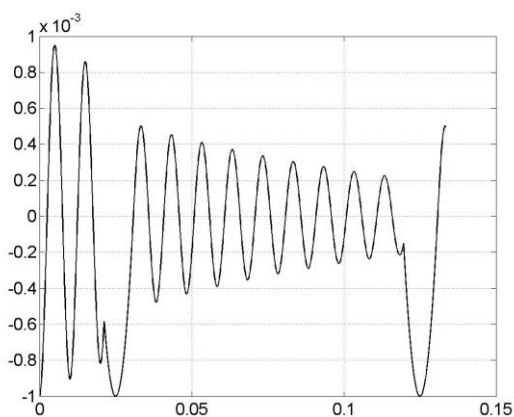
Сформулируем следующую гипотезу о характере столкновения. Если

- движение шарика является неотвратно неизменным;
 - тело и шарик – недеформируемые (абсолютно твёрдые);
 - контакт возник и существует некоторое конечное время, начиная с момента – решения уравнения (5),
- то следует предположить, что телу, поскольку оно находится в контакте, шарик навяжет свою скорость движения. Иначе, в момент t^* появления контакта скорость тела скачком меняется от значения $\left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=t^*}$

до значения $\left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=t^*}$. Дальнейшее движение тела описано в предыдущем пункте.

6. Пример расчёта уравнения движения. На фиг 2 изображён график уравнения движения $x(t)$, построенный по изложенной выше методике. Точки перехода от ветви $x_{osc}(t)$ к ветви $x_{rot}(t)$ наглядно прослеживаются в виде соответствующих изломов графика. Точки

обратного перехода (от вращательной ветви к колебательной) не видны, поскольку они являются точками гладкости и ничем не выделяются.



Фиг. 2. График уравнения движения детали при контакте с инструментом

На рассмотренном примере можно сделать вывод о работоспособности построенной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена модель колебаний консольно закреплённой детали при возбуждении взаимодействием детали с вращающимся инструментом. Обеспечено сопряжение ветвей аналитических решений до гладкой функции при утрате контакта и до непрерывной функции при его появлении.

Эта модель может являться средством проведения дальнейших исследований. Так, интерес представляют зависимости амплитуды отклонения при контакте от частоты вращения инструмента и от коэффициента демпфирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Altintas Y. Manufacturing automation : metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design / Yusuf Altintas. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 382 p.
- [2] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Пановко Я.Г. – М. : Наука, 1971. – 240 с.