К.ф.-м.н. Нечипоренко Н.А., к.ф-м.н. Белая Н.И.
Запорожский национальный технический университет, Украина

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $V_{\alpha,A}$ – класс табличных функций $g=\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$g_i \le g_{i+1}, \quad i=\overline{1,N-1}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i = A, \tag{2}$$

где $\alpha_i \ge 0, \quad i=\overline{1,N}$ и A – заданные вещественные числа.

Требуется восстановить функцию $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, принадлежащую классу $V_{\alpha,A}$ и заданную своими приближенными значениями $f=\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$. В качестве восстанавливающей примем функцию $y \in V_{\alpha,A}$, которая удовлетворяет условию

$$\delta(y) = \min_{g\in V_{\alpha,A}} \delta(g), \tag{3}$$

где $\delta(g)$ – мера приближения функции f функцией g:

$$\delta(g) = \max_{1\le i\le N} .|f_i - g_i|$$

Решим сначала следующую вспомогательную задачу.
Пусть требуется найти функцию $y \in V$, такую, что

$$\delta(y) = \min_{g\in V} \delta(g), \tag{4}$$

где V – множество табличных функций g, удовлетворяющим условиям (1).
Рассмотрим следующий пошаговый алгоритм А.

Шаг 1. Положить $s=2,\ k_1=0, \quad B=\min\limits_{1\le j\le N} f_j$

Шаг 2. Вычислить $f_{k_s} = \min\limits_{k_s+1\le j\le N} f_j$.

Шаг 3. Найти $\delta_{s-1} = (f_{m_s} - f_{k_s})/2$, где $f_{m_s} = \max\limits_{k_{s-1}+1\le j<N} f_j$.

Шаг 4. Проверить: $f_{k_s} + \delta_{s-1} \le B$? Если да, то положить

$$y_j = B, \quad j=\overline{k_{s-1}+1, k_s}, \qquad k_{s-1}=k_s, \quad s=s-1,$$

в противном случае положить $y_j = f_{k_s} + \delta_{s-1}, \quad j=\overline{k_{s-1}+1, k_s}$.

Шаг 5. Проверить $k_s < N$? Если да, то перейти к шагу 6, в противном случае закончить вычисления.

Шаг 6. Положить $B = y_{k_s}, \quad s=s+1$, и перейти к шагу 2.

Нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 1. Алгоритм А дает решение задачи (4).

Перейдем теперь к решению задачи (3).

Пусть функция у построена в результате выполнения алгоритма А и является, следовательно, решением задачи (4). Если оказалось, что $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j y_j = A$, то решение задачи (3) найдено.

Пусть это не так и $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j y_j > A$. Так как $\alpha_j \ge 0,\ j=\overline{1,N}$, то для выполнения условия (2) необходимо уменьшить значения функции y. Попытаемся удовлетворить условиям (1) и (2), уменьшая значения y_j так, чтобы оставалось справедливым соотношение

$$|f_j - y_j| \le \delta_i, \quad \forall j \in [k_i+1, k_{i+1}], \quad i=\overline{1,s-1}. \tag{5}$$

Обозначим $I=\{1,2,\dots,N\}$. $\Phi(y) = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j y_j$, и сохраняя обозначения, принятые в алгоритме А, рассмотрим следующий алгоритм В.

Шаг 1. Положить $i=1$, $B = \min\limits_{1\le j\le k_2} f_j - \delta_1$.

Шаг 2. Положить $r_i = m_{i+1}$.

Шаг 3. Определить $J=\{k_i+1, \dots, r_i-1\}$.

Шаг 4. Найти $f_{l_i} = \max\limits_{j\in J} f_j$.

Шаг 5. Положить $y_j = y_j - \varepsilon, \quad \forall j \in J$, где

$$\varepsilon = \min(y_{k_i+1} - B, y_{l_i} - f_{l_i} + \delta_i).$$

Шаг 6. Проверить: $\Phi(y) = A$? Если да, то закончить вычисления.

Шаг 7. Проверить $\Phi(y) > A$? Если да, то перейти к шагу 9.

Шаг 8. Положить $y_j = y_j + \varepsilon_1, \quad \forall j \in J$ где $\varepsilon_1 = (A - \sum_{j\in I} \alpha_j y_j) / \sum_{j \in J} \alpha_j$, и закончить вычисления.

Шаг 9. Проверить $y_{k_i} = B$? Если да, то перейти к шагу 11.

Шаг 10. Проверить $l_i > k_i + 1$? Если да, то положить $r_i = l_i$ и перейти к шагу 3.

Шаг 11. Проверить $i=s-1$? Если да, то закончить вычисления.

Шаг 12. Положить $i=i+1$, $B = y_{k_i}$ и перейти к шагу 2.

Теорема 2. Пусть y – функция, полученная в результате последовательного выполнения алгоритмов A и B. Тогда y является либо решением задачи (3), либо минимизирует функционал $\Phi(y)$ на множестве табличных функций, удовлетворяющих соотношениям (1), (5).

Доказательство. Докажем сначала первую часть утверждения.

Построенная функция y удовлетворяет условиям (1), (5) – это обеспечивается на шаге 5 алгоритма B. Пусть y удовлетворяет также условию (2). Тогда, учитывая, что $\min_{g \in V_{a,A}} \delta(g) \ge \delta_i, \quad i = \overline{1, s-1}$, приходим к выводу, что y – решение задачи (3).

Предположим теперь, что для некоторого i, $1 \le i < s-1$, после выполнения шага 5 алгоритма A оказалось $\Phi(y) < A$, то есть $\sum_{j \in I \setminus J} \alpha_j y_j + \sum_{j \in J} \alpha_j (y_j - \varepsilon) < A$. Но поскольку $\sum_{j \in I} \alpha_j y_j > A$, то будет существовать $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, такое, что увеличив значения y_j, $j \in J$, на величину ε_1, получим функцию, удовлетворяющую соотношениям (1), (5) и (2), то есть являющуюся решением задачи (3). Очевидно, что ε_1 можно определить из уравнения

$$\sum_{j \in I \setminus J} \alpha_j y_j + \sum_{j \in J} \alpha_j (y_j + \varepsilon_1) = A.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в результате выполнения алгоритмов A и B построена функция y такая, что $\Phi(y) > A$. Покажем, что y доставляет функционалу $\Phi(y)$ минимальное значение на указанном в теореме множестве функций.

Предположим противное. Пусть существует табличная функция g, удовлетворяющая соотношениям (1), (5), и такая, что $\Phi(g) < \Phi(y)$.

Поскольку все $\alpha_j \ge 0$, то будет существовать n, $1 \le n \le N$, такое, что

$$g_n < y_n \tag{6}$$

Так как по предположению функция g удовлетворяет условию (5), то индекс n не должен совпадать с теми индексами j, для которых

$$\left| y_j - f_j \right| = \delta_i, \quad j \in [k_i + 1, k_{i+1}], \quad i = \overline{1, s-1}.$$

Но тогда для некоторого j, $j<n$, будет справедливо соотношение $g_j > g_n$, что противоречит условию монотонности функции g.

Теорема доказана.

Предположим, что в результате выполнения алгоритмов A и B решение задачи (3) не найдено. Это означает, что мы не можем добиться выполнения соотношения (2), если значения y_j, $j = \overline{1, N}$, удовлетворяют условиям (1), (5). Попытаемся удовлетворить этому соотношению, уменьшая значения y_j, $j = \overline{1, N}$, так, чтобы оставались справедливыми соотношения (1) и

$$\left| f_j - y_j \right| \le \delta, \quad j = \overline{1, N}, \tag{7}$$

где $\delta = \max_{1 \le i \le s-1} \delta_i$.

Обозначим $M=\{1,2,\dots,s-1\}$ и, сохраняя принятые ранее обозначения, рассмотрим следующий алгоритм C.

Шаг 1. Найти $\delta = \max_{i \in M} \delta_i = \delta_r$.

Шаг 2. Определить $J=\{r\}$, $K=\{k_r+1, \ \dots, \ k_{r+1}\}$.

Шаг 3. Положить $M=M \setminus J$.

Шаг 4. Проверить $M = \varnothing$? Если да, то перейти к шагу (15).

Шаг 5. Найти $\delta_p = \max_{i \in M} \delta_i$.

Шаг 6. Вычислить $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$, где

$\Delta_1 = \min_{j \in J \setminus \{s\}} (y_{k_{j+1}+1} - y_{k_{j+1}}) = y_{k_{v+1}+1} - y_{k_{v+1}}, \quad \Delta_2 = y_{m_{p+1}} - f_{m_{p+1}} + \delta.$

Шаг 7. Положить $y_j = y_j - \Delta, \quad \forall\, j \notin I \setminus K$.

Шаг 8. Проверить $\Phi(y) = A$? Если да, то закончить вычисления.

Шаг 9. Проверить $\Phi(y) > A$? Если да, то перейти к шагу 11.

Шаг 10. Положить $y_j = y_j + \varepsilon, \quad \forall\, j \in I \setminus K$, где

$\varepsilon = (A - \sum_{j \in I} \alpha_j y_j) / \sum_{j \in I \setminus K} \alpha_j$, и закончить вычисления.

Шаг 11. Проверить : $\Delta < \Delta_1$? Если да, то перейти к шагу 14.

Шаг 12. Положить

$k_{v+1} = \max\{ i / y_i = y_{k_{v+1}}, \quad k_{v+1} + 1 \le i \le k_{v+2} \}$.

Шаг 13. Проверить $k_{v+1} < k_{v+2}$? Если да, то перейти к шагу 6.

Шаг 14. Положить $J = J \cup \{p\}, \quad K = K \cup \{k_p + 1, \dots, k_{p+1}\}$ и перейти к шагу 3.

Шаг 15. Положить $i=2$.

Шаг 16. Проверить $f_{k_i+1} - y_{k_i+1} < \delta$? Если да, то перейти к шагу 18.

Шаг 17. Проверить $i < s-1$? Если да, то перейти к шагу 21, иначе закончить вычисления.

Шаг 18. Вычислить $\mu = \max\{ j / y_j = y_{k_i+1}, \quad j \geq k_i + 1\}$.

Шаг 19. Положить $r_i = \mu + 1, \quad B = y_{k_i}$.

Шаг 20. Выполнить шаги 3-11 алгоритма В, предварительно заменив на шаге 5 величину δ_i на δ.

Шаг 21. Положить $i=i+1$ и перейти к шагу 16.

Аналогично теореме 2 может быть доказана

Теорема 3. Пусть y – функция, полученная в результате последовательного выполнения алгоритмов А, В и С. Тогда у либо является решением задачи (3), либо минимизирует функционал $\Phi(y)$ на множестве табличных функций, удовлетворяющих соотношениям (1), (7).

Теорема 4. Пусть функция $y=\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ построена в результате последовательного выполнения алгоритмов А, В, С и Ф(у) > А. Тогда функция $y^* = \{y_1 - \varepsilon, y_2 - \varepsilon, \ldots, y_N - \varepsilon\}$, где

является решением задачи (3).

$$\varepsilon = (\sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j - A) / \sum_{j=1}^{N} \alpha_j,$$

Доказательство. Функция y^* удовлетворяет условиям (1) и (2). Действительно, монотонность y^* из монотонности y, а справедливость (2) обуславливается выбором ε как корня уравнения $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j (y_j - \varepsilon) = A$.

Поэтому осталось показать, что $\delta(y^*) = \min_{g \in V_{\alpha,A}} \delta(g)$.

Предположим противное. Пусть существует функция $g \in V_{\alpha,A}$, такая, что $\delta(g) < \delta(y^*)$. Поскольку согласно алгоритму С

$\delta(y) = \max_{1 \leq i \leq s-1} \delta_i = \delta,$

то $\delta(y^*) = \delta + \varepsilon$ и $\delta(g) < \delta + \varepsilon - \sigma$, где $0 < \sigma < \delta + \varepsilon$.

Тогда $g_j - y_j^* \geq \sigma, \quad j = \overline{1,N}$, и, следовательно, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j g_j > A$.

Таким образом, предположение $\delta(g) < \delta(y^*)$ вступает в противоречие с условием (2) для функции g.

Теорема доказана.

Аналогично рассматривается случай, когда $\Phi(y) < A$. Решение задачи, как и ранее, осуществляется следующим образом: последовательно максимизируется Ф(у) на следующих классах табличных функций:

1) удовлетворяющих условиям (1), (5) (алгоритм B_1);

2) удовлетворяющих условиям (1), (7) (алгоритм C_1).

Алгоритмы решения этих задач аналогичны алгоритмам В и С соответственно.

Как и выше, можно показать, что последовательное применение алгоритмов А, B_1, C_1 позволяет построить функцию y, которая либо является решением задачи (3), либо максимизирует функционал $\Phi(y)$ на множестве табличных функций, удовлетворяющих условиям (1), (7), и тогда решением задачи (3) является функция $y^*=\{y_1+\varepsilon, y_2+\varepsilon, \ldots y_N+\varepsilon\}$,

где $$\varepsilon = (A - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j y_j) / \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$

В заключении заметим, что используя полученные значения сеточной функции, обладающей свойствами (1) – (3), можно построить функцию с требуемыми свойствами гладкости [1], [2].

Литература:

1. Нечипоренко Н. А. (1993) Об оптимальном по точности восстановлении монотонных функций. *Кибернетика и вычислительная техника.* – Вып. 97. 106-111.
2. Смоляк С.А. (2010). Восстановление гладких монотонных функций. – Прикладная эконометрика, 2(18). 123-139.

Аманбаев Т.Р., Тилеуов Г.Е., Мамешов Б., Курманалиева А.
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова,
Институт математики и математического моделирования КН МОН, Казахстан

ТЕЧЕНИЕ УЛЬТРАДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ В КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ РАСШИРЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОЦЕССОВ КОАГУЛЯЦИИ И КОНДЕНСАЦИИ

Многофазные дисперсные системы часто встречаются в различных областях современной техники. Особое значение имеет изучение движений дисперсных сред в различных каналах, в частности, переменного сечения. Исследование течений дисперсных сред является одной из актуальных проблем динамики и