МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика”
для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання
Частина 2

2015

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання. Частина 2. / Укл.: Нечипоренко Н.О., Щолокова М.О., Щербина О.А. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. – 42 с.

Укладачі: Нечипоренко Н.О., доцент, к.ф.-м.н.
Щолокова М.О., доцент, к.т.н.
Щербина О.А.,асистент

Рецензент: Мастиновський Ю.В., доцент, к.т.н.

Експерт: Корольков В.В., доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Щербина О.А., асистент

Затверджено
на засіданні кафедри
"Прикладної математики"

Протокол № _9_
від "_16_" _06_ 2015р.

ЗМІСТ

РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

Основні правила інтегрування

1. Якщо $F'(x) = f(x), то \int f(x)dx = F(x) + C,$
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, де а – постійна величина;
3. $\int \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1).$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, (a \neq 0).$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

13. $\int shxdx = chx + C.$

14. $\int chxdx = shx + C.$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

ЗАВДАННЯ 1.

а) знаходження невизначеного інтеграла шляхом зведення його до табличного називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1

$$\int(5x^3+3x^2+4)dx = 5\int x^3dx + 3\int x^2dx + 4\int dx = 5\cdot\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 4x + C =$$
$$= \frac{5}{4}x^4 + x^3 + 4x + C.$$

Приклад 2

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{1+\frac{1}{6}}}{1+\frac{1}{6}} + \frac{x^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} + C =$$
$$= \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Приклад 3

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx -$$
$$- \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + C.$$

б) заміна змінної в невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановки двох видів:

1) $x = j(t)$, де $j(t)$ - монотонна, безперервно диференційована функція нової змінної t. Формула заміни змінної в цьому випадку:

$$\int f(x)dx = \int f[j(t)]\cdot j'(t)dt .$$

2) $u = y(t)$, де u - нова змінна. Формула заміни змінної при цій підстановці:

$$\int f[y(t)]\cdot y'(t)dt = \int f(u)du .$$

Такий варіант заміни змінної часто називають підведенням під знак диференціала. Користуючись цим правилом, можна поширити таблицю основних інтегралів:

17. $\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

18. $\int ctgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Приклад 4

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2 - x^2)^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Приклад 5

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 + a)}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{2}\int (x^2 + a)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + a) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{x^2 + a} + C .$$

Цими інтегралами можна користуватися як табличними.

Приклад 6

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \{\text{ нехай } \quad 2x-9=u^2, \text{ тоді } \quad x=\frac{u^2+9}{2}, dx = u\,du \ \} =$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2+9} = 2\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{u}{3} + C = \frac{2}{3}arctg\,\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

Приклад 7

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = \{\text{нехай} \quad \cos^2 x = t, \quad \text{тоді} \quad dt = -2\cos x \sin x dx,$$

$$dt = -\sin 2x dx \ \} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = C - \arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 8

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \{\ x^4 \text{ є похідною } \tfrac{1}{5}x^5, \text{ тоді заміняємо } \ x^5 \text{ на t, маємо}\} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{5}dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{1}{5}\ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right| + C.$$

в) <u>інтегрування по частинам.</u>

Якщо u(x) та v(x) диференційовані функції, то правдива наступна формула інтегрування по частинам

$$\int u dv = u\cdot v - \int v du.$$

Цією формулою можна користуватися неоднаразово.

Треба вказати 4 основні випадки, коли використовується метод інтегрування по частинам.

1) інтеграли виду $\underline{\int P_n(x)e^x dx}$.

Тому що при диференційовані показник ступеня многочлена $P_n(x)$ зменшується, то підінтегральні вирази треба розподілити так:

$$P_n(x) = u, \quad e^x dx = dv,$$

тоді $du = P_n'(x)dx$ та $v = \int e^x dx = e^x$.

З формули $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ маємо:

$$\int P_n(x)e^x dx = P_n(x)e^x - \int P_n'(x)e^x dx.$$

До інтегралу справа знову використовуємо формулу інтегрування по частинам. Так треба робити доки при e^x множник залишиться постійнім.

Приклад 9

$\int x^2 e^x dx$ = {нехай $u = x^2$ та $dv = e^x dx$, тоді $du = 2xdx$ та $v = e^x$. З формули інтегрування по частинам маємо} = $x^2 e^x - \int 2xe^x dx$ = {для інтегралу $\int 2xe^x dx$ знову застосуємо формулу: $u = x, \quad dv = e^x dx$ $\Rightarrow$ $du = dx, \quad v = e^x$ } = $x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$ = $= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

2) для інтегралів виду: $\underline{\int P_n(x)\sin xdx}$ та $\underline{\int P_n(x)\cos xdx}$ діємо аналогічно, як і в випадку 1).

Приклад 10

$\int x\cos xdx$ = {нехай $u = x$ та $dv = \cos xdx$, тоді $du = dx$ та $v = \sin x$ } = $x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$

3) інтеграли виду: $\int P_n(x)\ln xdx$.

В цьому випадку логарифмічну функцію слід прийняти за *u*, тому що після диференціації вона спроститься:

$$u = \ln x, \qquad dv = P_n(x)dx,$$

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \int P_n(x)dx.$$

$$\int P_n(x)\ln xdx = \ln x \cdot \int P_n(x)dx - \int\left[\frac{1}{x}\int P_n(x)dx\right]dx + C.$$

Приклад 11

$\int x\ln xdx$ = {нехай $u = \ln x$, $dv = xdx,$ тоді $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Зробив інтегрування по частинам, знайдемо} = $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{dx}{x}$ =

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

4) для інтегралів виду: $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)arctgxdx$, $\int P_n(x)arcctgxdx$, діємо аналогічно, як і в випадку 3).

Приклад 12

$\int xarctgxdx$ = {нехай $u = arctgx$, тоді $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$ } =

$$= x\cdot arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

ЗАВДАННЯ 2.

Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

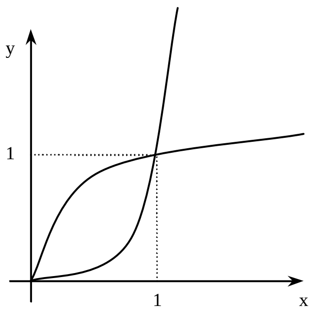
$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

Розв'язок

Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, такими що $f_2(x) \geq f_1(x)$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

Побудуємо фігуру:



Знайдемо координати точок перетину парабол:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y_1 = 0, y_2 = 1 \end{cases}$$

На відрізку [0, 1] $\qquad \sqrt{x} \geq x^2$, тоді:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ кв. од.}$$

ЗАВДАННЯ 3.

а) дифференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними має вигляд:

$$N(x)dx + M(y)dy = 0$$

Приклад 13

Розв’язати рівняння $2^{x+y} + 3^{x-2y}y' = 0$.

Розв'язок

Для визначення типу заданого диференціального рівняння першого порядку запишемо його у такому вигляді

$$\frac{3^x}{3^{2y}} \cdot \frac{dy}{dx} = -2^x \cdot 2^y \quad \Rightarrow \quad \frac{3^x}{3^{2y}} \cdot dy + 2^x \cdot 2^y dx = 0.$$

Приведемо рівняння до рівняння з відокремленими змінними шляхом його ділення на $3^x \cdot 2^y$. Одержимо:

$$\frac{dy}{3^{2y} \cdot 2^y} + \frac{2^x}{3^x}dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(9 \cdot 2)^y} + \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 0.$$

Шляхом інтегрування одержимо

$$\int 18^{-y}dy + \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = C \quad \Rightarrow \quad -\frac{18^{-y}}{\ln 18} + \left(\frac{2}{3}\right)^x : \ln\frac{2}{3} = C.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння буде

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} - \frac{1}{18^y \cdot \ln 18} = C.$$

б) однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна звести до вигляду

$$y' = f(x,y),$$

де функція $f(x,y)$ не змінюється при заміні x та y на tx та ty, тобто задовольняє умові $f(tx,ty) = f(x,y)$.

Приклад 14

Розв’язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x+y}$.

Розв'язок

Це рівняння є однорідним тому, що для правої частини рівняння виконується умова:

$$\frac{ty}{tx+ty} = \frac{ty}{t\cdot(x+y)} = \frac{y}{x+y}.$$

При підстановці $u = \dfrac{y}{x}$ маємо: $y = u\cdot x \;\Rightarrow\; y' = u'\cdot x + u$.

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$u'\cdot x + u = \frac{u\cdot x}{x+u\cdot x} \;\Rightarrow\; u'\cdot x = \frac{u}{1+u} - u \;\Rightarrow$$

$$x\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u-u-u^2}{1+u} \Rightarrow\; x\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1+u} \;\Rightarrow \frac{1+u}{u^2}du = -\frac{dx}{x}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи його, знаходимо:

$$\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}\right)du = -\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{u} - \ln u = \ln x + \ln C \;\Rightarrow\; \frac{1}{u} = \ln(Cux).$$

Підставимо замість u значення $\dfrac{y}{x}$ та одержимо загальний розв’язок

$$\frac{x}{y} = \ln Cy \;\Rightarrow\; x = \ln(Cy)^y.$$

в) <u>лінійним диференціальним рівнянням першого порядку</u> називають рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' у першому степеню. Таке рівняння можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Приклад 15

Розв’язати рівняння $(x^2-1)\cdot y'+y=\sqrt{x-1}$.

Розв'язок

Запишемо це рівняння у вигляді

$$y'+\frac{y}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}.$$

Це рівняння є лінійне диференціальне рівняння першого порядку, його розв’язок будемо шукати у вигляді

$$y=u(x)\cdot v(x). \qquad (1)$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння.

Запишемо

$$y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x) \qquad (2)$$

Підставимо (1), (2) у задане рівняння. Тоді

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{1}{x^2-1}\cdot u\cdot v=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}$$

або

$$u'\cdot v+u\cdot(v'+\frac{1}{x^2-1}\cdot v)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}. \qquad (3)$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто виконувалась рівність

$$v'+\frac{1}{x^2-1}\cdot v=0.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x^2-1} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln|v|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad\Rightarrow\quad v(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}.$$

Підставимо функцію v у рівняння (3). Одержимо

$$u' \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot dx$$

$$u = \int \frac{dx}{(x+1)^{3/2}} = \int (x+1)^{-3/2} d(x+1) = -\frac{2}{\sqrt{x+1}} + C .$$

Підставимо одержані функції u, v та отримаємо загальний розв’язок

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}} + C\right) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}} + C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} .$$

ЗАВДАННЯ 4.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 .$$

Складемо до нього характеристичне рівняння:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 .$$

При знаходженні коренів характеристичного рівняння можливі наступні випадки:

	Характер коренів характеристичного рівняння	**Часткові розв’язки диференційного рівняння**
1. $D > 0$	$k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$
2. $D = 0$	$k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_2 x}$
3. $D < 0$	$k_{1,2} = a \pm ib$	$y_1 = e^{a x} \cos b x, \quad y_2 = e^{a x} \sin b x$

Загальний розв’язок диференційного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 ,$$

де y_1, y_2 - часткові розв'язки диференційного рівняння,

C_1, C_2 – свавільні постійні.

Приклад 16

Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язок

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$.
Розв'язавши його отримаємо два корені $k_1 = 2, \quad k_2 = 3$, тоді часткові розв'язки диференційного рівняння: $y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x}$.

Отже загальний розв'язок диференційного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 17

Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язок

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 9 = 0$.
Розв'язавши його отримаємо два корені $k_1 = k_2 = -3$, тоді часткові розв'язки диференційного рівняння: $y_1 = e^{-3x}, \quad y_2 = xe^{-3x}$.

Отже загальний розв'язок диференційного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Приклад 18

Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язок

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 25 = 0$.
Розв'язавши його отримаємо два корені $k_{1,2} = 3 \pm 4i$, тоді часткові розв'язки диференційного рівняння:

$$y_1 = e^{3x}\cos 4x, \quad y_2 = e^{3x}\sin 4x.$$

Отже загальний розв'язок диференційного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{3x}\cos 4x + C_2 e^{3x}\sin 4x.$$

ЗАВДАННЯ 5.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є сума часткового розв'язку ($y_ч$) та розв'язку відповідного однорідного рівняння (y_o), тобто $y = y_o + y_ч$.

1. Знайдемо $\underline{y_o}$, розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

2. Знайдемо $\underline{y_ч}$, за спеціальною правою частиною $f(x)$

а) $\underline{f(x) = e^{a\,x} P(x),}$ де $P(x)$ - многочлен *n*-ої степені.

Частковий розв'язок залежить від взаємозв'язку між a та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2. Можливі наступні випадки:

	Взаємозв'язок між a **та** k_1 **і** k_2	**Вигляд часткового розв'язку**
1	$a \neq k_1 \neq k_2$	$y_ч = e^{a\,x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$
2	$a = k_1$ або $a = k_2$	$y_ч = x e^{a\,x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$
3	$a = k_1 = k_2$	$y_ч = x^2 e^{a\,x} M(x)$, $M(x) = A_0 + A_1 x + \mathbf{K} + A_n x^n$

б) $$f(x)=e^{ax}\left[P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx\right],$$

де $P(x)$ - многочлен степені m_1, $Q(x)$ - многочлен степені m_2.

$$n=\max(m_1,m_2) \quad \text{та} \quad z=a+ib\ .$$

Частковий розв'язок залежить від взаємозв'язку між z та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2. Можливі наступні випадки:

	Взаємозв'язок між z та k_1 і k_2	**Вигляд часткового розв'язку**
1	$z\neq k_1\neq k_2$	$y_ч=e^{ax}\left[M(x)\cos bx+N(x)\sin bx\right]$, $M(x)=A_0+A_1x+\mathbf{K}+A_nx^n$ $N(x)=B_0+B_1x+\mathbf{K}+B_nx^n$
2	$z=k_1$ або $z=k_2$	$y_ч=xe^{ax}\left[M(x)\cos bx+N(x)\sin bx\right]$, $M(x)=A_0+A_1x+\mathbf{K}+A_nx^n$ $N(x)=B_0+B_1x+\mathbf{K}+B_nx^n$

Приклад 19

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$. $\qquad y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

Розв'язок

1. Знайдемо y_o, розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 5k + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3 \quad \Rightarrow$
$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x} \;\Rightarrow\; \underline{y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}.$

2. Напишемо структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y_ч$ по виду правої частини $f(x)$.

$f(x) = 13\sin 3x = e^{0x}[0 \cdot \cos 3x + 13\sin 3x] \Rightarrow P(x) = 0$, $Q(x) = 13$ - многочлени нульової степені ($n = 0$);

$z = a + ib = 0 + 3i = 3i$, при чому $z \neq k_1 \neq k_2$. $\Rightarrow$ За таблицею частковий розв'язок матиме вигляд

$$y_ч = e^{0x}\left[A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x\right] = A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x,$$

де $M(x) = A_0$ та $N(x) = B_0$.

Відповідь: $y = y_o + y_ч = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x.$.

ЗАВДАННЯ 6.

Дана функція $z = x^y + \ln\dfrac{x}{y}$. Знайти:

а) частинні похідні І-го та ІІ-го порядків;

б) градієнт у точці $M_0(1,1)$ та у загальному вигляді;

в) диференціал у точці $M_0(1,1)$ та у загальному вигляді.

Розв'язок

а) при обчисленні частинних похідних потрібно користуватися відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну постійною.

Вважаючи змінну y сталою, отримаємо

$$z'_x = y\cdot x^{y-1} + \frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = y\cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}.$$

Якщо вважати x сталою, отримаємо

$$z'_y = x^y\cdot\ln x + \frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = x^y\ln x - \frac{1}{y}.$$

Аналогічно обчислимо

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = y\cdot(y-1)\cdot x^{y-2} - \frac{1}{x^2};$$

$$z''_{xy} = (z'_y)'_x = y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x + x^y\cdot\frac{1}{x} = y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x + x^{y-1};$$

$$z''_{yx} = (z'_x)'_y = 1\cdot x^{y-1} + y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x = y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x + x^{y-1};$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \ln x\cdot x^y\cdot\ln x + \frac{1}{y^2} = x^y\cdot\ln^2 x + \frac{1}{y^2};$$

б) градієнтом функції $z = f(x,y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні цієї функції, тобто

$$grad\ z = \{z'_x, z'_y\} = z'_x\cdot\bar{i} + z'_y\cdot\bar{j}$$

у нашому випадку

$$grad\ z = (y\cdot x^{y-1} + \frac{1}{x})\cdot\bar{i} + (x^y\cdot\ln x - \frac{1}{y})\cdot\bar{j},$$

а у точці $M_0(1,1)$:

$$grad\ z(M_0) = \left(y\cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{M_0}\cdot\bar{i} + \left(x^y\cdot\ln x - \frac{1}{y}\right)\Bigg|_{M_0}\cdot\bar{j} =$$

$$= \left(1\cdot 1^0 + \frac{1}{1}\right)\cdot\bar{i} + \left(1^1\cdot\ln 1 - \frac{1}{1}\right)\cdot\bar{j} = 2\cdot\bar{i} - 1\cdot\bar{j};$$

в) за означенням диференціал dz функції $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy .$$

Тоді у нашому випадку

$$dz = \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x} \right) \cdot dx + \left(x^y \cdot \ln x - \frac{1}{y} \right) \cdot dy ,$$

а у точці $M_0(1,1)$:

$$dz(M_0) = 2 \cdot dx - 1 \cdot dy .$$

ЗАВДАННЯ 7.

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів ***x*** та ***y*** і виражається функцією $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 20x + 200y - 2800$. Визначити витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Розв'язок

Рішення зводиться до пошуку екстремуму функції $z = f(x, y)$. Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = -4x + 2y + 20; \qquad z'_y = -8y + 2x + 200 .$$

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -4x + 2y + 20 = 0, \\ -8y + 2x + 200 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -10, \\ x - 4y = -100. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2(4y - 100) + y = -10, \\ x = 4y - 100. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30, \\ x = 20. \end{cases}$$

Знайшли критичну точку $M_1(20, 30)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$A = z''_{xx} = -4$; $B = z''_{xy} = 2$; $C = z''_{yy} = -8$.

Обчислимо $\Delta = A \cdot C - B^2$ у критичній точці:

$\Delta(M_1) = (-4) \cdot (-8) - 2^2 = 28$. Оскільки $\Delta > 0$ - у точці M_1 є екстремум, причому максимум, тому що $A < 0$.

Отже, $z_{\max} = z(20, 30) = 400$.

Таким чином витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства дорівнюють 20 та 30 одиниць, причому максимальний прибуток підприємства складає 400 ум. од.

ЗАВДАННЯ 8.

Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3+4n-1}{3n^4+2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!}{3^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{2n-1}\right)^n$.

Розв'язок

а) застосовуємо граничну ознаку порівняння: якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряди з додатними членами і існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, то ряди одночасно будуть або збіжними, або розбіжними.

У нашому випадку $a_n = \dfrac{n^3 + 4n - 1}{3n^4 + 2}$, виберемо $b_n = \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$.

Відомо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – розбіжний ряд. Обчислимо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^3 + 4n - 1\right)\cdot n}{(3n^4 + 2)} = \frac{1}{3}.$$

Тобто даний ряд, як і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, є розбіжним;

б) застосуємо ознаку Даламбера:

Обчислимо $\quad l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Якщо l < 1 – ряд збіжний, l > 1 – ряд розбіжний, l = 1 – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

У нашому випадку:

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{3^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{n+1}};$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\cdot(2n+3)}{3} = \infty > 1.$$

За ознакою Даламбера ряд розбіжний;

в) застосуємо ознаку Коші:

Обчислимо $\quad l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Якщо l < 1 – ряд збіжний, l > 1 – ряд розбіжний, l = 1 – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1, \quad \text{тобто ряд – збіжний.}$$

ЗАВДАННЯ 9.

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n\cdot x^n}{n^2}$.

Розв'язок

Цей ряд є степеневим. Радіус збіжності R степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cdot x^n$ можна знайти за формулою:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad \text{або} \qquad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

У нашому випадку маємо:

$$a_{n+1}=\frac{100^{n+1}}{(n+1)^2}; \qquad a_n=\frac{100^n}{n^2};$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{100^n\cdot(n+1)^2}{n^2\cdot 100^{n+1}}=\frac{1}{100}.$$

Ряд збігається, якщо |x| < $\frac{1}{100}$, тобто $-\frac{1}{100}<x<\frac{1}{100}$.

Нехай $x=\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, який збіжний, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ збігається при α>1.

Нехай $x=-\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Це знакозмінний ряд, який абсолютно збігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний.

Остаточно, для області збіжності даного ряду маємо:

$$-\frac{1}{100}\le x\le\frac{1}{100}$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 1.

Знайти невизначений інтеграл:

1. а) $\int e^{\sin 3x}\cos 3xdx$; б) $\int x\sin 3xdx$.

2. а) $\int \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\sin 3xdx$; б) $\int xe^{-2x}dx$.

3. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int x\sin 8xdx$.

4. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; б) $\int arctgxdx$.

5. а) $\int \sqrt[5]{3-5\cos 7x}\cdot\sin 7xdx$; б) $\int x\ln xdx$.

6. а) $\int 3x^2e^{-x^3}dx$; б) $\int (5x-7)e^x dx$.

7. а) $\int \frac{e^{ctg 3x}}{\sin^2 3x}dx$; б) $\int x\cos 5xdx$.

8. а) $\int \sqrt[3]{2+e^{3x}}\cdot e^{3x}dx$; б) $\int (1-4x)\sin 2xdx$.

9. а) $\int \sqrt[3]{5+e^{3x}}\cdot e^{3x}dx$; б) $\int arctg 2xdx$.

10. а) $\int \sqrt{3-5\cos 2x}\cdot\sin 2xdx$; б) $\int xe^{7x}dx$.

11. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int e^x 5xdx$.

12. а) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; б) $\int x\ln 3xdx$.

13. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$; б) $\int \arccos xdx$.

14. а) $\int \sin^{13} x \cos x dx$; б) $\int x e^{-x} dx$.

15. а) $\int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int x \sin 7x dx$.

16. а) $\int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$.

17. а) $\int 7^x (7^x + 3)^4 dx$; б) $\int (x-1) \ln x dx$.

18. а) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5}$; б) $\int (1-4x) \sin 2x dx$.

19. а) $\int \frac{e^{tg 3x}}{\cos^2 3x} dx$; б) $\int x e^{2x} dx$.

20. а) $\int (2 \ln x + 3)^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int (2 - x e^{-3x}) dx$.

21. а) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$; б) $\int arctg \sqrt{x} dx$.

22. а) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$; б) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$.

23. а) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$; б) $\int (x+3) \cos 2x dx$.

24. а) $\int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$; б) $\int (x-2) \cdot \cos x dx$.

25. а) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} dx$; б) $\int x \cdot (\ln x^2 - 1) dx$.

26. а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x + 4}} dx$; б) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

27. а) $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}dx$; б) $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$.

28. а) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+5x-8}$; б) $\int \ln(x+2)dx$.

29. а) $\int \frac{(\ln x-3)^2}{x}dx$; б) $\int x \cdot 3^x dx$.

30. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+4}}dx$; б) $\int \arcsin 3x dx$.

ЗАВДАННЯ 2.

Знайти площу фігури, обмежену заданими лініями.

1. $y = x^2 - 2$; $y = 0$.

2. $y = x^2 - 6x + 5$; $y = 0$.

3. $y = x^3$; $y = x^2$.

4. $y = x$; $y = -x + 2$; $y = 0$.

5. $y = -x^2 + 4$; $y = 0$.

6. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = 0$.

7. $y = \sqrt{x}$; $y = 2 - x$; $y = 0$.

8. $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 0$; $x \geq 1$.

9. $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

10. $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

11. $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$.

12. $y = \frac{1}{x}$; $x = 2$; $y = x$.

13. $y = \frac{4}{x}$; $x = 2$; $y = x$.

14. $y = x^2$; $y = -x^2 + 2$.

15. $y = x$; $y = x^2$.

16. $y = 2x$; $y = 2x^2$.

17. $y = \sin x$; $x = 0$; $x = p$; $y = 0$.

18. $y = \cos x$; $x = 0$; $x = \frac{p}{2}$; $y = 0$.

19. $y = tgx$; $x = 0$; $x = \frac{p}{4}$; $y = 0$.

20. $y = ctgx$; $x = 0$; $x = \frac{p}{4}$; $y = 0$.

21. $y = x^2 - 5x + 6$; $y = x$.

22. $y = x^2 + x$; $y = x + 1$.

23. $y = x^2 + x$; $y = -x$.

24. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{4 - 3x}$.

25. $y = x^2 + 2$; $y = 1 - x^2$; $x = 0$; $x = 1$.

26. $y = x^2$; $y = 2e^x$; $x = 0$; $x = 1$.

27. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{1 - x}$; $y = 0$.

28. $y = x^2 - 4$; $y = 4 - x^2$.

29. $y = x^2 - 9$; $y = 9 - x^2$.

30. $y = x^2 + 5$; $y = x + 5$.

ЗАВДАННЯ 3.

а) знайти частинний розв’язок диференціального рівняння

1.	$y' \ln y \cos x = y$;	$y(0) = 1$.
2.	$(1 + x^2)dy - ydx = 0$;	$y(1) = 1$.
3.	$yy' + xe^{y^2} = 0$;	$y(1) = 0$.

4. $3e^x tgy dx + (1+e^x)\sec^2 y dy = 0;$ $y(0) = \frac{p}{4}.$

5. $ydx - (\ln y)^2 dy = 0;$ $y(0) = e.$

6. $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx;$ $y(0) = 0.$

7. $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y);$ $y(0) = \frac{p}{4}.$

8. $y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0;$ $y(-\frac{15}{16}) = e.$

9. $y = y'\ln y;$ $y(2) = 1.$

10. $y' = e^{x+y} + e^{x-y};$ $y(0) = 0.$

11. $(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0;$ $y(0) = 1.$

12. $xy' + y = y^{2;}$ $y(1) = 0{,}5.$

13. $x^2y^2y' + 1 = y;$ $y(1) = 2.$

14. $\frac{dx}{x(y-1} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0;$ $y(1) = 1.$

15. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$

16. $(1+e^{2x})y'y^2 = e^x;$ $y(0) = 0.$

17. $(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0;$ $y(1) = 1.$

18. $xy' = y^2 + 1;$ $y(1) = 1.$

19. $(x^2y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx;$ $y(1) = 1.$

20. $(1-e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y;};$ $y(0) = 0.$

21. $y'\left(1+x^2\right) = 1 + y^2;$ y(0) = 1.

22. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0;$ $y(0) = 1.$

23. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx;$ $y(2) = 0.$

24. $(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$

25. $(xy^2+x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$ $y(2) = 0.$

26. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0;$ $y(0) = 1.$

27. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy;$ $\quad y(1)=0.$

28. $y' + 2y - y^2 = 0;$ $\quad y(0)=3.$

29. $(1+e^{2x})y^2 y' = e^x;$ $\quad y(0)=1.$

30. $(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0;$ $\quad y(1)=1.$

б) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

1. $2x^2 y' = x^2 + y^2.$

2. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$

3. $x\sin\frac{y}{x}y' + x = y\sin\frac{y}{x}.$

4. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

5. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}.$

6. $xyy' = y^2 + 2x^2.$

7. $xy' - y = xtg\frac{y}{x}.$

8. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$

9. $y' = 4 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2.$

10. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$

11. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y.$

12. $tg\frac{y}{x}(xy' - y) = x.$

13. $xy' = y - \sqrt{xy}.$

14. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$

15. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

16. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}.$

17. $xy'y - y^2 = y'x^2.$

18. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

19. $3xyy' + x^2 = 3y^2.$

20. $xy' - x\cos^2\dfrac{y}{x} = y.$

21. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

22. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 9\dfrac{y}{x} + 9.$

23. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

24. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$

25. $xdy = (2y - x)dx$.

26. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

27. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

28. $xy' + y(\ln\dfrac{y}{x} - 1) = 0.$

29. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

30. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

в) знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

1. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}.$

2. $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x.$

3. $xy' - y = x^2\cos x.$

4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

5. $y' - 3y = e^{-2x}.$

6. $y' + 5y = e^{4x}.$

7. $y' + 2y = e^{3x}.$

8. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x.$

9. $y'\sin x - y\cos x = 1.$

10. $y' - \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x.$

11. $xy' - 2y = 2x^4.$

12. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$

13. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$

14. $x^2y' + xy + 1 = 0.$

15. $y = x(y' - x\cos x).$

16. $y'x = x\ln x + y.$

17. $(xy' - 1)\ln x = 2y.$

18. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$

19. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x}.$

20. $y' = (x+1)^3 + \dfrac{2y}{x+1}.$

21. $(x^2+1)y' + 4xy = 3.$

22. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0.$

23. $x^3y' = 1 - 2x^2y.$

24. $y'ctgx + y = 2\cos^2 xctgx.$

25. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x.$

26. $y' + ytgx = \cos^2 x.$

27. $(2xy+3)dx - x^2dy = 0.$

28. $(x^4 + 2y)dx = xdy.$

29. $\cos xdy = (y + 2\cos x)\sin xdx.$

30. $x^2y' = xy + 1.$

ЗАВДАННЯ 4.

Розв'язати однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. $y'' - 2y' + y = 0$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

5. $y'' - 14y' + 53y = 0$.

6. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

7. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

8. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

9. $y'' + y = 0$.

10. $y'' - y = 0$.

11. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

12. $y'' + 10y' + 34y = 0$.

13. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

14. $y'' + 25y = 0$.

15. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

16. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

17. $y'' + y' - 12y = 0$.

18. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

19. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

20. $y'' - 2y' + 37y = 0$.

21. $y'' - 8y' = 0$.

22. $y'' + 12y' + 36y = 0$.

23. $y'' + 3y' = 0$.

24. $y'' - 9y' + 18y = 0$.

25. $y'' + 8y' = 0$.

26. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

27. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

28. $y'' + y = 0$.

29. $y'' - y = 0$.

30. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

ЗАВДАННЯ 5.

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$.

1. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}(x+5)$;

б) $f(x) = e^{3x}\cos x + x - 3$.

2. $y'' - 2y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = e^{x} \sin 2x$

б) $f(x) = e^{x}(2x+1) + e^{2x} \cos x$.

3. $y'' - 2y' - 8y = f(x)$; а) $f(x) = e^{4x}(3x-1)$;

б) $f(x) = e^{4x} \sin 2x + e^{x}(1-2x)$.

4. $y'' - 12y' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-6x} \cdot x^2$;

б) $f(x) = e^{6x}(1-x) + e^{6x} \sin 3x$.

5. $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x} \cos x$;

б) $f(x) = \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}}(3x^2 + 5)$.

6. $6y'' - y' - y = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}}$;

б) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos \dfrac{x}{3} + x^2 e^{3x}$.

7. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 7e^{4x}$;

б) $f(x) = 2\cos 4x + e^{4x} \sin x$.

8. $y'' - 9y' + 20y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{5x}$;

б) $f(x) = e^{4x} \cos 5x + x^2$.

9. $y'' - 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x} \sin x$;

б) $f(x) = x^2 e^{3x} + e^{x} \sin 3x$.

10. $y'' + 5y' = f(x)$; а) $f(x) = x^3 + 8$;

б) $f(x) = e^{-5x} \cos x - 5xe^{x}$.

11. $y'' + 10y' + 25 = f(x)$; а) $f(x) = \cos 5x$;

б) $f(x) = 10e^{-5x} + 1 - 5x$.

12. $y'' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{x} \sin x$;

б) $f(x) = \cos x + x^3$.

13. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$; а) $f(x) = x^2 e^{4x}$;

б) $f(x) = e^{-6x} \cos x + e^{x}$.

14. $y'' + 2y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x} \sin 3x$;

б) $f(x) = 5e^{-x} + \cos x$.

15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;

б) $f(x) = e^{x}\cos 2x + 3x^{2}$.

16. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x}\sin 6x$;

б) $f(x) = e^{-x}(6x-1) + 2x$.

17. $y'' - 14y' + 49 = f(x)$; а) $f(x) = e^{x}\cos 7x$;

б) $f(x) = (1-x)e^{7x} + 7x^{2}$.

18. $y'' + 2y' - 3y = f(x)$; а) $f(x) = (x+3)e^{-3x}$;

б) $f(x) = e^{x}\cos x + e^{3x}$.

19. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = x^{3}e^{x}$;

б) $f(x) = e^{x}\cos 3x + e^{-3x}\sin x$.

20. $y'' - 10y + 25 = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{5x}$;

б) $f(x) = 7\cos 5x + e^{5x}\sin x$.

21. $y'' + y' - 6y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\cos 2x$;

б) $f(x) = (1-2x)e^{2x} + x^{3}$.

22. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\sin 2x$;

б) $f(x) = (1-2x)e^{-3x} + e^{2x}\cos 3x$.

23. $y'' + 4y' + 4y = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{-2x}$;

б) $f(x) = \cos 2x + e^{-2x}\sin x$.

24. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$;

б) $f(x) = (x-2)e^{-x} + \sin 2x$.

25. $y'' - 12y' + 40y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x}\sin 6x$;

б) $f(x) = e^{6x}\cos 2x + (1+6x)e^{2x}$.

26. $y'' + 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x}\cos 3x$;

б) $f(x) = 7e^{-3x} + \sin 3x$.

27. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$; а) $f(x) = e^{2x}\sin 6x$;

б) $f(x)=5e^{6x}+7\cos 2x$.

28. $y''-6y'+13y=f(x)$; а) $f(x)=e^{3x}\cos 2x$;

б) $f(x)=(1+2x)e^{3x}+2\sin 3x$.

29. $y''+8y'+16=f(x)$; а) $f(x)=5e^{-4x}$;

б) $f(x)=\cos 4x+e^{-4x}\sin x$.

30. $y''-6y'+34y=f(x)$; а) $f(x)=e^{3x}\sin 5x$;

б) $f(x)=e^{5x}\sin 3x+5xe^{3x}$

ЗАВДАННЯ 6.

Для функції $z=f(x,y)$:

а) Знайти частині похідні І-го порядку;
б) Знайти градієнт у точці Мо та у загальному вигляді;
в) Знайти диференціал у точці Мо та у загальному вигляді.

1. $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$, $M_o(2,0)$.

2. $z=\arcsin\sqrt{xy}$, $M_o\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3. $z=arctg\left(x^2+y^2\right)$, $M_o(0,1)$.

4. $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$, $M_o(3,-1)$.

5. $z=\sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}$, $M_o(1,1)$.

6. $z=tg\left(x^3+y^2\right)$, $M_o(-1,2)$.

7. $z=ctg\sqrt{xy^3}$, $M_o(2,1)$.

8. $z=e^{-x^2+y^2}$, $M_o(2,1)$.

9. $z=\ln\left(3x^2-y^4\right)$, $M_o(1,1)$.

10. $z=\arccos\left(\frac{y}{x}\right)$, $M_o(4,2)$.

11. $z=arcctg\left(xy^2\right)$, $M_o(1,2)$.

12. $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$, $M_o(-2,2)$.

13. $z=\sin\sqrt{x-y^3}$, $M_o(2,1)$.

14. $z=tg\left(x^3y^4\right)$, $M_o(3,-1)$.

15. $z=ctg(3x-2y)$, $M_o(1,3)$.

16. $z=e^{2x^2-y^5}$, $M_O(1,-2)$.

17. $z=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$, $M_o(1,4)$.

18. $z=\arcsin\left(2x^3y\right)$, $M_o\left(\frac{1}{2},1\right)$.

19. $z = arctg\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right), M_o(2,3)$.

20. $z = \cos\left(x - \sqrt{xy^3}\right), M_o(1,2)$.

21. $z = \sin\dfrac{x+y}{x-y}, M_o(3,2)$.

22. $z = tg\dfrac{2x-y^2}{x}, M_o(3,2)$.

23. $z = ctg\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}, M_o(4,2)$.

24. $z = e^{-\sqrt{x^2-y^2}}, M_o(1,-1)$.

25. $z = \ln\left(3x^2 - y^2\right), M_o(2,1)$.

26. $z = \arccos\left(x - y^2\right), M_o\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

27. $z = arcctg\dfrac{x^2}{y}, M_o(1,3)$.

28. $z = \cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, M_o(1,2)$.

29. $z = \sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}, M_o(4,2)$.

30. $z = e^{-\left(x^3+y^3\right)}, M_o(-2,3)$.

ЗАВДАННЯ 7.

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів ***x*** та ***y*** і виражається функцією $z = z(x, y)$. Визначити витрати ресурсів ***x*** та ***y***, що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

1. $z(x, y) = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$.

2. $z(x, y) = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y$.

3. $z(x, y) = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y$.

4. $z(x, y) = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y$.

5. $z(x, y) = -2100 - x^2 - y^2 + 60x + 80y$.

6. $z(x, y) = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y$.

7. $z(x, y) = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y$.

8. $z(x, y) = -400 - x^2 - y^2 + 40x + 20y$.

9. $z(x, y) = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y$.

10. $z(x,y) = -3800 - x^2 - y^2 + 120x + 60y$.

11. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 20x + 60y - 600$.

12. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 800$.

13. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100y - 1200$.

14. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x + 100y - 3100$.

15. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 80x + 140y - 4200$.

16. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 60x + 20y - 600$.

17. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100y - 800$.

18. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x - 1200$.

19. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x + 100y - 3100$.

20. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 140x + 80y - 4200$.

21. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x + 60y - 700$.

22. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 140x - 1200$.

23. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 20x + 100y - 1300$.

24. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 160x + 100y - 4000$.

25. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 140x + 140y - 5100$.

26. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 200x + 20y - 2800$.

27. $z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 60x + 40y - 700$.

28. $z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140y - 1200$.

29. $z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 100x + 20y - 1300$.

30. $z(x,y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140x + 140y - 5100$.

ЗАВДАННЯ 8.

Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^2-1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n-3}{2n^2+3n-1}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-n}{2n^3+3n+4}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{p}{2n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{3n^2-6n-1}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!\cdot 4^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n} (n+1)^3$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \frac{n}{5^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2n!}{(2n)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$.

ЗАВДАННЯ 9.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+2)^{2n}}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n9^n (x-1)^{2n}}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n tg \frac{1}{3^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x-1)^n}{(n+3)^2 2^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)(x-1)^n}{(n+1)^2 5^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{(x+1)^n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{8^n (x+1)^{2n}}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – Київ: ЦУЛ, 2002. – 400с. – Серія: Математичні науки.
2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник – М.: ИНФРА – М, 1999.
3. З. С. Щипачов. Высшая математика. - М.: Высшая школа. 1985.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А. П. Рябушко. ч. 1 - Минск.: Вышэйшая школа. 1990.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А. П. Рябушко. ч. 2 - Минск.: Вышэйшая школа. 1991.
6. А. К. Кудрявцев, Б. Л. Демидович. Краткий курс высшей математики. - М: Наука, 1986.
7. А. Я. Дороговцев. Математичний аналіз.: Підручник у двох частинах. К. Либідь, 1993.

Додаток А

Контрольні запитання

1. Яку функцію називають первісною для даної функції?
2. Що називають невизначеним інтегралом даної функції?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Які існують основні методи інтегрування?
5. У чому полягає суть методу інтегрування частинами?
6. Яке означення визначеного інтеграла функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a,b]$?
7. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
8. Які основні властивості визначеного інтеграла?
9. Як записується формула Ньютона – Лейбніца?
10. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
11. Як знайти площі плоских фігур, використовуючи визначений інтеграл?
12. Як обчислити середні значення функцій?
13. Яке рівняння називають диференціальним?
14. Що таке порядок диференціального рівняння?
15. Як формулюється означення загального розв'язку, частинного розв'язку, загального інтегралу диференціального рівняння?
16. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
17. Яке диференціального рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними?
18. Яке диференціального рівняння першого порядку називають однорідним? Як воно розв'язується?
19. Яке диференціального рівняння першого порядку називають лінійним? Як воно розв'язується?
20. Як записується загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами в різних випадках?
21. Як формулюється теорема про структуру розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку?
22. Що називають функцією двох змінних?
23. Що таке частинні й повний прирости функції двох змінних?

24. Яке означення частинних похідних двох змінних?
25. Як обчислюються частинні похідні другого порядку?
26. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
27. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно?
28. Що називають градієнтом функції? Що він характеризує?
29. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних?
30. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних?
31. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції двох змінних?
32. Що називають числовим рядом?
33. Що називається сумою числового ряду?
34. Який числовий ряд називається збіжним?
35. Яка необхідна ознака збіжності числового ряду?
36. У чому полягає гранична ознака порівняння?
37. У чому полягає ознака Даламбера збіжності ряду?
38. У чому полягає ознака Коші збіжності ряду?
39. Який числовий ряд називається знакозмінним й знакопереміжним?
40. У чому полягає ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду?
41. Який знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, умовно збіжним?
42. Що називають функціональним рядом?
43. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
44. За допомогою яких ознак можна знайти область збіжності функціонального ряду?
45. Що називають степеневим рядом?
46. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду?
47. Як обчислюється радіус збіжності степеневого ряду?
48. Який ряд називається рядом Тейлора для функції $f(x)$?
49. Який ряд називається рядом Маклорена для функції $f(x)$?
50. Як розвиваються елементарні функції в ряд Маклорена?